S. 804. B. 160

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XXII.

S. 804. B. 160.

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XXII.

PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 56.

1850.

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE

TOME XXII

PARIS.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 56

1850

TABLE DES ARTICLES

CONTENUS

DANS LE VINGT-DEUXIÈME VOLUME

DE LA NOUVELLE COLLECTION DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Pages.

Biographie de Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, membre de la première classe de l'Institut de France (section de mécanique), par M. Arago, secrétaire perpétuel..... j à cxvij

Éloge historique de Benjamin Delessert, académicien libre, par M. Flourens, secrétaire perpétuel..... cxix à clxiv

Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes, par M. Augustin Cauchy..... 3

Mémoire sur les conditions relatives aux limites des corps, et en particulier sur celles qui conduisent aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, par M. Augustin Cauchy..... 17

16

Pages.

MÉMOIRE sur les rayons lumineux simples, et sur les rayons évanescents, par M. AUGUSTIN CAUCHY..... 29

MÉMOIRE sur le calcul intégral, par M. AUGUSTIN CAUCHY..... 39

RECHERCHES CHIMIQUES sur plusieurs objets d'archéologie trouvés dans le département de la Vendée, par M. E. CHEVREUL..... 181

RÉSUMÉ de chronologie astronomique, par M. BIOT..... 209

TABLES ABRÉGÉES pour le calcul des équinoxes et des solstices, par M. C. L. LARGETEAU..... 477

TABLES pour le calcul des syzygies écliptiques ou quelconques, par M. C. L. LARGETEAU..... 491

ORGANOGRAPHIE et physiologie végétales. Mémoire sur la composition et la structure de plusieurs organismes des plantes, par MM. DE MIRBEL et PAYEN..... 525

MÉMOIRE sur la structure et la composition chimique de la canne à sucre, par M. PAYEN..... 569

MÉMOIRE sur les systèmes d'équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles à coefficiants périodiques, et sur les intégrales élémentaires de ces mêmes équations, par M. AUGUSTIN CAUCHY.. 587

MÉMOIRE sur les vibrations d'un double système de molécules, et de l'éther contenu dans un corps cristallisé, par M. AUGUSTIN CAUCHY. 599

MÉMOIRE sur les systèmes isotropes de points matériels, par M. AUGUSTIN CAUCHY..... 615

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES sur la peinture à l'huile, par M. E. CHEVREUL..... 655

FIN DE LA TABLE DU VINGT-DEUXIÈME VOLUME.

BIOGRAPHIE

DE

LAZARE-NICOLAS-MARGUERITE

CARNOT,

Membre de la première classe de l'Institut de France (section de mécanique),

PAR M. ARAGO,

SECRETAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Lue le lundi 21 août 1837 (1).

Enfance de Carnot, son éducation.

Lazare-Nicolas-Marguerite CARNOT naquit à Nolay (*Côte-d'Or*), dans cet ancien duché de Bourgogne qui déjà avait été le berceau de trois des plus grandes illustrations dont les académies puissent se glorifier : Bossuet, Vauban, Buffon. Son père était avocat et exerçait cette noble profession avec

(1) Cette biographie fut lue dans la séance du lundi 21 août 1837; nous la donnons ici sans y rien changer.

beaucoup de talent (ce qui n'est pas rare), avec un très-grand désintéressement (ce qui, dit-on, est un peu moins commun). L'avocat Claude-Abraham Carnot avait dix-huit enfants : ainsi, d'après le vieil adage qui promet la prospérité aux familles nombreuses, il dut compter sur un avenir heureux pour chacun de ses enfants. En effet, à une certaine époque, il eût pu voir, dans cette nombreuse lignée, deux lieutenants généraux des armées françaises ; un conseiller à la cour de cassation ; un procureur général de cour royale ; la directrice de l'hospice de Nolay ; un magistrat municipal fort estimé pendant qu'il administrait sa commune, plus estimé encore, s'il est possible, lorsqu'après vingt-trois années d'exercice il se fut soumis à une destitution brutale, plutôt que de manquer à son devoir. Il faut dire qu'en père tendre et prévoyant, l'avocat de Nolay ne s'était pas fié sans réserve à la puissance du proverbe et qu'il présida toujours personnellement à la première éducation de ses fils. Lazare Carnot, le sujet de cette Biographie, ne quitta même le toit paternel que pour aller, comme on disait alors, faire sa rhétorique et sa philosophie.

L'enfance des hommes privilégiés qui, à des titres divers, ont joué un rôle éclatant sur la scène du monde, a de tout temps fixé l'attention des biographes. Le *Connais-toi toi-même !* d'un ancien philosophe serait interprété d'une façon par trop mesquine, si on se bornait à n'y voir qu'un conseil de prudence ; la maxime est susceptible d'une interprétation plus juste et plus large : elle nous présente, je crois, l'espèce humaine, envisagée dans son ensemble, comme le plus important sujet d'étude qu'on puisse se proposer. Ainsi, Messieurs, recherchons avec soin de quelle manière s'annon-

cent, naissent et grandissent ces intelligences extraordinaires qui, après leur entier développement, doivent se frayer des routes inconnues. Ces traits caractéristiques méritent d'être recueillis avec d'autant plus d'intérêt, qu'ils deviendront chaque jour plus rares. Dans nos écoles modernes, taillées, du nord au midi, de l'est à l'ouest, exactement sur le même patron ; soumises à des règles communes, à une discipline uniforme ; où les enfants d'ailleurs arrivent à l'âge de neuf à dix ans pour n'en sortir qu'à dix-huit ou vingt, les individualités s'effacent, disparaissent ou se couvrent d'un masque de convention. L'agronome se garde bien d'aller dans une serre chaude, quand il veut connaître la taille, la forme, le port de ces admirables plantes qui sont l'ornement des forêts séculaires. Ce n'est pas non plus dans nos régiments qu'on pourrait espérer de retrouver les vrais types des paysans bretons, normands, lorrains ou franc-comtois. Nos *écoles-régiments* (qu'on me passe l'expression) ne dérouteraient pas moins les moralistes. Là, il s'établit une sorte de moyenne autour de laquelle, avec de très-légers écarts, toute la jeunesse va aujourd'hui se grouper. Est-ce un bien, est-ce un mal ? Dieu me garde d'aborder ici une semblable question ; je dis seulement que c'est un fait, et ce fait expliquera pourquoi j'ai recueilli diverses particularités de l'enfance de notre confrère qui, sans cela, auraient pu sembler trop minutieuses.

Carnot n'avait encore que dix ans lorsque sa mère, dans un voyage à Dijon, l'emmena avec elle et, pour le récompenser de la docilité réfléchie qu'il montrait en toute circonstance, le conduisit au spectacle. On donnait ce jour-là une pièce où des évolutions de troupes, où des combats se

succédaient sans relâche. L'écolier suivait, avec une attention soutenue, la série d'événements qui se déroulaient devant lui ; mais tout à coup il se lève, il s'agite et, malgré les efforts de sa mère, il interpelle, en termes à peine polis, un personnage qui venait d'entrer en scène. Ce personnage était le général des troupes auxquelles le jeune Carnot s'intéressait ; par ses cris, l'enfant avertissait le chef inhabile que l'artillerie était mal placée, que les canonniers, vus à découvert, ne pouvaient manquer d'être tués par les premiers coups de fusil tirés du rempart de la forteresse qu'on allait attaquer ; qu'en établissant, au contraire, la batterie derrière certain rocher qu'il désignait de la voix et du geste, les soldats seraient beaucoup moins exposés. Les acteurs interdits ne savaient que faire ; M^me^ Carnot était désolée du désordre que son fils occasionnait ; la salle riait aux éclats ; chacun cherchait dans sa tête l'explication d'une *espiéglerie* si peu ordinaire ; et la prétendue espiéglerie n'était autre chose que la révélation d'une haute intelligence militaire, le premier symptôme de cet esprit supérieur qui, dédaignant les routes battues, créait, quelques années plus tard, une nouvelle tactique ; et proposait de remplacer les fortifications si artistement, si ingénieusement combinées de Vauban, par un tout autre système.

De douze à quinze ans, Carnot suivit les cours du collége d'Autun. Il s'y fit remarquer par une tournure d'esprit vive, originale, et par une rare intelligence. Ensuite il entra au petit séminaire de la même ville. A seize ans, Carnot avait achevé sa philosophie. La fermeté que nous trouverons en lui, dans le cours de la plus orageuse carrière, était déjà alors le trait dominant de son caractère. Les

timides professeurs du séminaire d'Autun en firent la pénible expérience, le jour où leur écolier devait soutenir sa thèse.

Cette cérémonie se passait toujours en public. D'après des règlements dont la libéralité semblerait aujourd'hui excessive à nos autorités universitaires, chaque auditeur avait le droit de faire des objections. La critique pouvait s'exercer également sur le fond et sur la forme. L'amour-propre du maître courait donc autant de risques que celui de l'élève, et la réputation d'un grand établissement se trouvait, de cette manière, à la merci d'un jeune étourdi. De là l'habitude de lancer les concurrents dans l'arène, escortés d'un mentor qui venait au secours de leur mémoire infidèle, qui, par un mot dit à propos, les ramenait dans la bonne voie dès qu'ils commençaient à s'en écarter, qui souvent même était entraîné à combattre pour son propre compte. Suivant ces *us et coutumes*, le corps enseignant du séminaire d'Autun se dirigeait déjà vers la salle des exercices où un public nombreux était assemblé, lorsque le jeune Carnot signifia qu'il entendait monter seul en chaire ; qu'il ne voulait pas être accompagné d'un souffleur ; qu'il ne tenait aucunement au rôle qu'on lui avait assigné, et qu'il le jouerait seul ou ne le jouerait pas du tout. Cette résolution fut tour à tour combattue par la prière et par la menace, mais inutilement : il fallut, bon gré, mal gré, se soumettre au caprice, sans antécédents, de l'écolier. Au reste, le plus éclatant succès le justifia bientôt, même aux yeux des professeurs irrités. Un incident assez étrange devait signaler la séance ; une dame, la femme d'un docteur en médecine, devint l'adversaire le plus redoutable du jeune rhétoricien : elle argumenta contre

lui, en latin, avec une puissance de dialectique, avec une facilité, une grâce, une élégance d'expressions dont Carnot et l'auditoire furent d'autant plus étonnés, qu'aucune indiscrétion, jusque-là, n'avait même fait soupçonner que Mme l'Homme eût porté ses lectures plus loin que la *Cuisinière bourgeoise,* l'*Almanach de Liége* et le *Petit Paroissien.*

Carnot s'était tellement pénétré, je ne dis pas seulement du principe religieux, mais encore, ce qui n'est pas la même chose, des minutieuses pratiques de dévotion scrupuleusement suivies au petit séminaire d'Autun, que plusieurs de ses parents eurent un moment la pensée de le faire entrer dans les ordres. Ils étaient fortifiés dans cette idée par le souvenir d'un grand nombre de dignitaires ecclésiastiques dont cette honorable famille pouvait se glorifier, et parmi lesquels figuraient des chanoines, des vicaires généraux du diocèse de Châlons, des docteurs en Sorbonne et un abbé de Cîteaux. La carrière du génie militaire prévalut cependant, et le jeune Carnot fut envoyé à Paris dans une école spéciale où il devait se préparer aux examens. Les camarades qu'il trouva dans cet établissement n'avaient certainement pas été élevés au séminaire; car la piété profonde du nouvel écolier, et dont au reste il se serait bien gardé de faire mystère, devint le sujet de leurs continuels sarcasmes. Des sarcasmes ne sont pas des raisons : Carnot n'en fut donc point ébranlé; mais il sentit le besoin de mûrir, par la réflexion et l'étude, des idées, des sentiments auxquels son âme candide et pure s'était jusque-là abandonnée avec charme et sans nulle défiance. La *théologie* devint ainsi, pendant quelques mois, l'unique occupation d'un *apprenti-officier.* Personne aujourd'hui ne pourrait dire quel fut l'effet de ces

méditations ; car, à toutes les époques de sa vie, Carnot évitait soigneusement, même dans l'intimité du foyer domestique, les discussions, je dirai plus, les simples entretiens relatifs à la religion. Nous savons seulement qu'il professait des principes adoptés aujourd'hui par tous les esprits honnêtes et éclairés. « La tolérance universelle, » disait-il, lorsque, proscrit et errant sur une terre étrangère, il avait à repousser les traits acérés de la calomnie, « la tolérance univer-« selle, voilà le dogme dont je fais hautement profession..... « J'abhorre le fanatisme, et je crois que le fanatisme de l'ir-« réligion, mis à la mode par les Marat et les père Duchêne, « est le plus funeste de tous. Il ne faut pas tuer les hommes « pour les forcer à croire ; il ne faut pas les tuer pour les em-« pêcher de croire ; compatissons aux faiblesses d'autrui, « puisque chacun a les siennes, et laissons les préjugés s'user « par le temps, quand on ne peut pas les guérir par la « raison. »

Après la théologie, les études scientifiques, celles surtout de la géométrie et de l'algèbre, eurent leur tour, et comme à Nolay, comme à Autun, les succès furent rapides et éclatants. M. de Longpré, directeur de l'École préparatoire, connaissait d'Alembert. L'illustre géomètre ne dédaignait pas d'aller, parmi de très-jeunes écoliers, encourager de son suffrage le mérite naissant. Dans une de ses visites, il distingua particulièrement Carnot, et lui adressa de flatteuses, de prophétiques paroles, que notre confrère répétait avec émotion, même aux époques où la fortune l'avait rendu un des arbitres des destinées de l'Europe.

Ne serait-ce pas ici, Messieurs, le lieu de regretter que, dans notre société, telle qu'un demi-siècle de révolutions l'a

faite, les relations personnelles qui s'établissaient jadis entre les professeurs et les élèves d'élite des grandes écoles aient totalement disparu, qu'elles soient même, en quelque sorte, devenues impossibles. L'instant marqué par les programmes voit aujourd'hui arriver des savants, des littérateurs illustres, dans de spacieux amphithéâtres. La foule les y attend. Pendant des heures entières, tout ce que la science, tout ce que les lettres offrent de profond, de subtil, de nouveau, est développé avec méthode, avec clarté, avec éloquence; mais la leçon finie, le professeur se retire, sans même savoir les noms de ceux qui l'ont écouté. Cependant, au milieu d'un semblable auditoire (je me bornerai, Messieurs, à une seule citation), Fourcroy trouvait, dans un jeune garçon apothicaire venu furtivement pour l'entendre, le collaborateur dévoué, exact, infatigable, ingénieux, qu'à ces traits-là chacun de vous a déjà nommé : il découvrait *Vauquelin!*

Entrée de Carnot à l'École de Mézières comme lieutenant en second du génie.

Lorsque Carnot quitta l'établissement de M. de Longpré, l'ordonnance en vertu de laquelle un généalogiste concourait avec un géomètre à l'examen des futurs officiers du génie n'était pas en vigueur. En 1771, tout Français pouvait encore, sans montrer de parchemins, être admis à l'École de Mézières, à la condition toutefois que ses père et mère n'eussent pas tenté d'enrichir leur famille et leur pays par le commerce ou par un travail manuel. Le jeune aspirant montra, devant l'examinateur Bossut, des connaissances mathématiques peu communes. Son père, suivant les tristes exigences de l'épo-

que, prouva de son côté que jamais un de ses navires n'avait été en de lointains pays échanger les fruits du sol français, de l'industrie française contre des productions réservées par la nature à d'autres climats; que ses mains n'avaient point combiné les caractères mobiles de Guttenberg, fût-ce même pour reproduire la Bible ou l'Évangile; qu'il n'avait personnellement concouru à l'exécution d'aucun de ces instruments admirables qui mesurent le temps ou sondent les profondeurs de l'espace.

Après la preuve légale de tous ces mérites négatifs, le jeune Carnot fut déclaré d'assez bonne maison pour porter l'épaulette, et il reçut, sans retard, celle de lieutenant en second.

Décoré de cette épaulette tant désirée, Carnot, âgé alors de dix-huit ans, se rendit à l'École du génie. Là, sous les auspices de Monge, il cultiva sans doute la géométrie descriptive et les sciences physiques avec ses succès habituels; mais, il faut l'avouer, nous en sommes réduits sur ce point à de simples conjectures; car, en poussant à l'extrême le désir naturel de dérober aux étrangers la connaissance, alors peu répandue, de l'art d'élever et de détruire les fortifications, on avait fait de la célèbre École de Mézières une sorte de conclave dont nul profane ne pénétrait jamais les secrets.

Carnot, lieutenant en premier dans le service des places.

Le 12 janvier 1773, Carnot, devenu lieutenant en premier, fut envoyé à Calais. Les travaux d'une place où les oscillations périodiques de l'Océan ajoutent une condition nouvelle et importante aux données, déjà très-compliquées par

elles-mêmes, du problème de la fortification, intéressèrent vivement le jeune officier. Il franchit ainsi, sans encombre, le passage ordinairement si pénible des théories savantes à une pratique fastidieuse, des brillantes illusions dont on se berce dans les écoles aux tristes réalités de la vie.

Le *Mémorial de Sainte-Hélène* dit que, dans sa jeunesse, « Carnot passait parmi ses camarades pour un original. » Cette qualification, Napoléon l'avait empruntée à Carnot lui-même; je la trouve dans la réponse à Bailleul, mais expliquée, mais commentée, mais dépouillée de ce vague qui permet de la considérer à volonté comme un compliment ou comme une injure. Carnot à vingt ans était, pour les officiers de la garnison de Calais, un *original* ou un *philosophe* (de ces deux mots l'un valait l'autre), parce qu'il ne s'associait ni à leur turbulence, ni à aucune de leurs fredaines; parce qu'il vivait dans les bibliothèques plus qu'au café; parce qu'il lisait Thucydide, Polybe, César, de préférence aux ouvrages licencieux de l'époque; parce que s'il avait d'intimes relations avec le commandant général de la Picardie, le prince de Croy, c'était non pour obtenir des permissions, des allégements de service, mais pour l'aider dans des recherches géographiques délicates, pour travailler à des cartes de l'hémisphère sud, où devaient figurer les dernières découvertes des navigateurs. Carnot, cependant, n'était rien moins qu'un censeur morose. Sévère envers lui-même, il avait pour les autres un fonds d'indulgence inépuisable. Ses moments de loisir ou de délassement, il les employait à composer de petits vers, empreints toujours d'une gaieté douce et de bonne compagnie. Citer des chansons dans la biographie d'un géomètre, c'eût été certainement une nouveauté; ce faible mérite, tout à

ma portée, a failli me séduire; un peu de réflexion m'y a fait renoncer. Depuis qu'un grand poëte a mis, chez nous, son cachet immortel sur ce genre de composition, une chanson ne doit plus être citée à la légère.

Première communication entre Carnot et l'Académie des sciences. — Aérostats.

La première communication directe entre Carnot et l'Académie des sciences (ce fait sera une nouveauté pour tout le monde) fut amenée par un problème qui non-seulement n'a pas encore été résolu, mais dont la solution paraît impossible à beaucoup de physiciens : *le problème de la direction des aérostats.*

Les découvertes scientifiques, celles même dont les hommes pouvaient espérer le plus d'avantage, les découvertes, par exemple, de la boussole et de la machine à vapeur, furent reçues, à leur apparition, avec une dédaigneuse indifférence. Les événements politiques, les hauts faits militaires, jouissent exclusivement du privilége d'émouvoir la masse du public. Il y a eu, cependant, deux exceptions à cette règle. Sur cette seule indication, chacun de vous a déjà nommé l'*Amérique* et les *aérostats, Christophe Colomb* et *Montgolfier.* Les découvertes de ces deux hommes de génie, si différentes, jusqu'ici, dans leurs résultats, eurent, en naissant, des fortunes pareilles. Recueillez, en effet, dans la *Historia del Almirante,* les marques de l'enthousiasme général que la découverte de quelques îles excita chez l'*Andalous,* le *Catalan,* l'*Aragonais,* le *Castillan;* lisez le récit des honneurs inouïs qu'on s'empressait de rendre, depuis les plus grandes villes jus-

qu'aux plus petits hameaux, non-seulement au chef de l'entreprise, mais encore aux simples matelots des caravelles la *Santa-Maria*, la *Pinta* et la *Niña*, qui les premières touchèrent les rives occidentales de l'Atlantique, et dispensez-vous ensuite de chercher dans les écrits de l'époque quelle sensation les *aérostats* produisirent parmi nos compatriotes: les processions de *Séville* et de *Barcelone* sont l'image fidèle des fêtes de *Lyon* et de *Paris*. En 1783, comme deux siècles auparavant, les imaginations exaltées n'eurent garde de se renfermer dans les limites des faits et des probabilités. Là, il n'était pas d'Espagnol qui, sur les traces de Colomb, ne voulût, lui aussi, aller fouler de ses pieds des contrées où, dans l'espace de quelques jours, il devait recueillir autant d'or et de pierreries qu'en possédaient jadis les plus riches potentats. En France, chacun, suivant la direction habituelle de ses idées, faisait une application différente, mais séduisante de la nouvelle faculté, j'ai presque dit des nouveaux organes, que l'homme venait de recevoir des mains de *Montgolfier*. Le physicien, transporté dans la région des météores, prenant la nature sur le fait, pénétrait enfin, d'un seul regard, le mystère de la formation de la foudre, de la neige, de la grêle. Le géographe, profitant d'un vent favorable, allait explorer, sans danger comme sans fatigue, et ces zones polaires que des glaces amoncelées depuis des siècles semblent vouloir dérober pour toujours à notre curiosité, et ces contrées centrales de l'*Afrique*, de la *Nouvelle-Hollande*, de *Java*, de *Sumatra*, de *Bornéo*, non moins défendues contre nos entreprises par un climat dévorant que par les animaux et les peuplades féroces qu'elles nourrissent. Certains généraux croyaient se livrer à un travail urgent en étudiant les systèmes de fortifi-

cation d'artillerie qu'il conviendrait d'opposer à des ennemis voyageant en ballon; d'autres élaboraient de nouveaux principes de tactique applicables à des batailles aériennes. De tels projets, qu'on dirait empruntés à l'*Arioste*, semblaient assurément devoir satisfaire les esprits les plus aventureux, les plus enthousiastes; il n'en fut pas ainsi, cependant. La découverte des aérostats, malgré le brillant cortége dont chacun l'entourait à l'envi, ne parut que l'avant-coureur de découvertes plus grandes encore: rien désormais ne devait être impossible à qui venait de conquérir l'atmosphère; cette pensée se reproduit sans cesse; elle revêt toutes les formes; la jeunesse s'en empare avec bonheur; la vieillesse en fait le texte de mille regrets amers. Voyez la maréchale de *Villeroi :* octogénaire et malade, on la conduit, presque de force, à une des fenêtres des Tuileries, car elle ne croit pas aux ballons; le ballon, toutefois, se détache de ses amarres; notre confrère *Charles*, assis dans la nacelle, salue gaiement le public et s'élance ensuite majestueusement dans les airs. Oh! pour le coup, passant, et sans transition, de la plus complète incrédulité à une confiance sans bornes dans la puissance de l'esprit humain, la vieille maréchale tombe à genoux, et, les yeux baignés de larmes, laisse échapper ces tristes paroles : « Oui, c'est décidé, maintenant, c'est certain; ILS trouveront le secret de ne plus mourir, *et ce sera quand je serai morte!* »

Carnot, d'un esprit sévère, et d'ailleurs il n'avait pas quatre-vingts ans, se garda bien d'aller aussi loin que la maréchale de Villeroi. Il se fit remarquer cependant parmi les enthousiastes. Il croyait alors, il a toujours cru depuis à la *possibilité* de diriger les ballons, et conséquemment aux ap-

plications que les sciences et l'art de la guerre en avaient espérées. Les archives de l'Académie doivent renfermer un mémoire où le capitaine du génie Carnot soumettait à ses maîtres un dispositif de rames légères qui, suivant lui, devaient conduire au but. Ce mémoire n'a pas encore été retrouvé. Je continuerai mes recherches, et si le travail me semble pouvoir ajouter à la réputation de notre confrère, le public n'en sera pas privé. Peut-être y joindrai-je un mémoire du même genre, également inédit, d'un autre académicien, de l'illustre Meunier.

Éloge de Vauban par Carnot.—Ses discussions avec M. de Montalembert.

Certaine société littéraire d'une très-petite ville s'était jadis qualifiée, de sa pleine autorité, de *fille de l'Académie française*. *Voltaire* ne voulait pas qu'on lui refusât ce titre : « Je la tiens même, disait-il, pour une fille très-vertueuse, puisque jamais elle n'a fait parler d'elle. »

L'épigramme n'eût pas été applicable à l'Académie de Dijon. Cette société célèbre ne fuyait les regards du public, ni lorsqu'elle mit en question « si le rétablissement des « sciences et des arts avait contribué à épurer les mœurs, » ni surtout lorsqu'elle couronna le discours où *Jean-Jacques* se prononçait pour la négative. Le temps a fait bonne justice du paradoxe; mais il n'a pas dû effacer le souvenir du procédé généreux qui, en donnant à *Rousseau* une célébrité inattendue, l'attacha pour toujours à la carrière brillante dans laquelle il a trouvé des émules, des rivaux, mais point de maître.

Au titre que je viens de rappeler, l'Académie de Dijon peut ajouter encore celui d'avoir fait naître la première production de Carnot dont la presse se soit emparée : l'*Éloge de Vauban.*

L'intrépidité, le désintéressement, la science de l'illustre maréchal avaient déjà reçu, par la bouche de Fontenelle, un hommage auquel il semblait difficile de rien ajouter. Quels discours, en effet, pourraient plus dignement caractériser une vie militaire que ces quelques chiffres : « Vauban fit « travailler à 300 places ; il en éleva 33 neuves ; il conduisit « 53 siéges ; il s'est trouvé à 140 actions de vigueur. » Et ces autres paroles ne semblent-elles pas empruntées à Plutarque? « Les mœurs de Vauban ont tenu bon contre les di- « gnités les plus brillantes et n'ont pas même combattu. En « un mot, c'était un Romain qu'il semblait que notre siècle « eût dérobé aux plus heureux temps de la République! »

L'éloge d'où ces deux passages sont tirés m'avait toujours paru si éloquent, si vrai, qu'au moment où, pour la première fois, je trouvai un discours sur Vauban parmi les productions de notre confrère, je me surpris à maudire de toute mon âme le programme académique qui, se jouant de l'inexpérience d'un jeune homme, l'avait exposé à une redoutable comparaison. En vérité, je n'aurais pas été plus inquiet, si j'eusse découvert que Carnot avait essayé de refaire la *Mécanique de Lagrange*, *Athalie* ou les *Fables de Lafontaine.* Ces craintes étaient exagérées. Les membres bourguignons de l'Académie de Dijon eurent raison de penser que le Bourguignon Vauban pouvait encore devenir un intéressant sujet d'étude, après le brillant portrait tracé par Fontenelle. Et, en effet, le secrétaire de l'Académie des scien-

ces avait prudemment laissé dans l'ombre l'un des plus beaux côtés de l'illustre maréchal.

L'éloge de Vauban, sous la plume d'un officier du génie, semblait devoir consister principalement dans une appréciation exacte des moyens de défense et d'attaque dont l'illustre maréchal a doté l'art de la guerre. Ce ne fut pas cependant le plan qu'adopta Carnot. C'est surtout par les qualités du cœur, par les vertus, par le patriotisme, que Vauban lui semblait digne d'admiration : « C'était, s'écriait-il, un de ces « hommes que la nature donne au monde tout formés à la « bienfaisance; doués, comme l'abeille, d'une activité innée « pour le bien général; qui ne peuvent séparer leur sort de « celui de la République, et qui, membres intimes de la so- « ciété, vivent, prospèrent, souffrent et languissent avec « elle. »

Le prince Henri de Prusse assistait à la séance de l'Académie de Dijon dans laquelle l'éloge de Vauban fut lu et couronné. Il exprima, dans les termes les moins équivoques, tout le plaisir que ce discours lui avait fait; il assura l'auteur, verbalement et par écrit, de sa profonde estime. Piqué d'émulation, le prince de Condé, qui présidait l'assemblée comme gouverneur de la Bourgogne, enchérit encore sur les marques de bienveillance que le jeune officier du génie recevait du frère de Frédéric le Grand.

Carnot avait-il donc encensé les préjugés nobiliaires? Ses principes de 1784 étaient-ils tellement différents de ceux qui depuis ont dirigé toutes ses actions, que le suffrage des grands ne pût pas lui manquer? Écoutez, Messieurs, et prononcez!

La dîme royale, cet écrit qui, sous Louis XIV, amena

l'entière disgrâce de Vauban, dont Fontenelle eut la prudence de ne pas même citer le titre dans l'énumération des travaux de l'illustre maréchal, Carnot l'appelait un exposé simple et pathétique des faits; un ouvrage où « tout frappe par la précision et la vérité ». La répartition des impôts, en France, paraît *barbare* au jeune officier ; la manière de les percevoir *plus barbare encore.* D'après lui, le véritable objet d'un gouvernement est d'obliger au travail tous les individus de l'État; le moyen qu'il indique pour arriver à ce résultat serait (je cite textuellement) de faire passer les richesses, des mains où elles sont superflues, dans celles où elles sont nécessaires. Carnot s'associe sans réserve à ce précepte de Vauban : les lois devraient prévenir l'affreuse misère des uns, l'excessive opulence des autres; il s'élève contre l'odieuse multiplicité des priviléges dont les classes les plus nombreuses de la population avaient alors tant à souffrir; enfin, après avoir partagé les hommes en deux catégories, les travailleurs et les oisifs, il va jusqu'à dire de ces derniers, dont suivant lui on s'est exclusivement occupé en constituant les sociétés modernes, qu'*ils ne commencent à être utiles qu'au moment où ils meurent, car ils ne vivifient la terre qu'en y rentrant.* Telles sont, Messieurs, les hardiesses qu'une académie couronnait en 1784; qui dictaient à Buffon, qu'on n'accusera certainement pas d'avoir été un novateur en matière de gouvernement, ces paroles si flatteuses pour le lauréat : « Votre style est noble et coulant; vous avez fait, Monsieur, un ouvrage agréable et utile; » qui inspiraient au frère d'un roi absolu le désir d'attacher Carnot, dont il se déclarait l'*ami,* au service de la Prusse; qui valurent au jeune officier la bienveillance du prince que Worms, Coblentz, peu d'années

après, voyaient à la tête de l'émigration! Qu'on ose ensuite appeler notre révolution de 1789 un effet sans cause, un météore dont rien n'avait dû faire prévoir l'arrivée! Les transformations morales de la société sont assujetties à la loi de continuité; elles naissent, grandissent comme les produits du sol, par des nuances insensibles.

Chaque siècle développe, discute, s'assimile en quelque sorte des vérités ou, si l'on veut, des principes dont la conception appartenait au siècle précédent; ce travail de l'esprit passe ordinairement inaperçu du vulgaire; mais quand le jour de l'application arrive, quand les principes réclament leur part d'action, quand ils veulent pénétrer dans la vie politique, les intérêts anciens, n'eussent-ils à invoquer en leur faveur que cette même ancienneté, s'émeuvent, résistent, combattent, et la société est ébranlée jusque dans ses fondements. Le tableau sera complet, Messieurs, si j'ajoute que, dans ces luttes acharnées, ce ne sont jamais les principes qui succombent.

Carnot, comme je l'ai déjà remarqué, avait à peine effleuré dans son éloge la partie technique des travaux de Vauban; mais, dans les quelques phrases qu'il écrivit à ce sujet, il s'avisa de dire que *certain vulgaire ignorant* se faisait de la fortification une idée erronée en la réduisant à l'art de tracer sur le papier des lignes assujetties à des conditions plus ou moins systématiques. Ces paroles, dans leur généralité, semblaient devoir passer inaperçues; un malheureux concours de circonstances leur donna une importance qui n'était ni dans les prévisions, ni surtout dans les désirs de l'auteur. En 1783, un général d'infanterie membre de cette Académie, M. le marquis de Montalembert, publia,

sous le titre de *Fortification perpendiculaire*, un système de défense des places entièrement nouveau. Ce système fut combattu à outrance par le corps presque tout entier du génie militaire. Le rejeton d'une illustre famille, l'officier général de l'armée française, l'académicien pouvait assurément, sans trop de vanité, ne pas se croire compris dans le vulgaire ignorant que l'auteur de l'éloge avait signalé en passant; mais M. de Montalembert s'obstina à s'appliquer ces expressions, et, pour se venger, il publia une édition de l'éloge de Vauban accompagnée de notes où l'offense, où l'outrage étaient portés à leur comble. Il y avait dans ce pamphlet de quoi bouleverser mille fois la tête d'un jeune homme; cependant en cette difficile occurrence, Carnot se montra déjà ce qu'il a toujours été depuis : franc, loyal, et complétement insensible à des injures non méritées.

« Si vos soupçons étaient fondés, écrivit-il à son fougueux antagoniste, « j'aurais méconnu les premiers devoirs de l'hon-« nêteté, de la décence; j'aurais manqué surtout aux égards « infinis que les militaires doivent à un général distingué : « croyez qu'il n'est aucun officier du génie qui n'apprît, avec « le même plaisir, de M. le marquis de Montalembert, à bien « fortifier les places, que du brave d'Essé à les bien dé-« fendre. »

On appréciera l'à-propos, la délicatesse de cette citation, quand j'aurai dit que le brave d'Essé, qui, en 1543, après plus de trois mois d'une résistance héroïque, obligea toutes les forces de l'empereur à lever le siége de Landrecies, était un des ancêtres de M. de Montalembert.

La modération, la politesse, sont un moyen de succès presque infaillible contre la violence et l'outrage; aussi, dans les

luttes de la presse, faut-il souvent les envisager comme le simple résultat d'un calcul, comme une preuve d'habileté. Mais la lettre de Carnot ne permettait pas de se méprendre sur la sincérité de ses sentiments. Votre ouvrage, écrivait-il à celui qui venait de critiquer amèrement le fond, le style, je puis presque ajouter la ponctuation de son éloge, votre ouvrage *est plein de génie..... Maintenant que vos casemates sont connues et éprouvées, la fortification va prendre une nouvelle face; elle deviendra un art nouveau.* « Il ne sera « plus permis d'employer les revenus de l'État à faire du « médiocre, quand vous nous avez appris à faire du bon..... « Quoique le corps du génie n'ait point l'avantage de vous « posséder, nous n'en croyons pas moins avoir le droit de « vous compter parmi ses plus illustres membres. Quiconque « étend nos connaissances, quiconque nous fournit de nou- « veaux moyens d'être utile à la France, devient notre con- « frère, notre chef, notre bienfaiteur. » M. de Montalembert ne résista pas à des témoignages d'estime si explicites, si flatteurs. Le désaveu le plus formel de la malencontreuse brochure suivit de près la réponse de Carnot; d'autre part, il faut bien l'avouer, les chefs supérieurs du génie furent tellement irrités des éloges qu'un simple capitaine s'était permis de donner à des systèmes qu'eux avaient repoussés d'autorité, qu'une lettre de cachet et la Bastille apprirent à notre confrère qu'à la veille de notre grande révolution, la liberté d'examen, cette précieuse conquête de la philosophie moderne, n'avait pas encore pénétré dans les habitudes militaires. Une semblable rigueur paraît inexplicable, alors même qu'on fait la plus large part aux exigences de l'esprit de corps et aux susceptibilités de l'amour-propre; Carnot, en

effet, tant dans son éloge que dans sa lettre à Montalembert, s'était montré le plus chaud défenseur de l'arme à laquelle il appartenait, et « qui fait profession, disait-il, de sacrifier son temps et sa vie à l'État. » Je le demande, celui-là avait-il donc méconnu les devoirs de sa position qui, appelé à mettre en balance les services de l'officier de troupes et ceux de l'ingénieur auquel est dévolu le dangereux honneur de tracer les parallèles, de commander la tranchée ou de diriger une tête de sape, s'exprimait si noblement : « L'officier du gé-« nie est au milieu du péril, mais il y est seul et dans le si-« lence; il voit la mort, mais il faut qu'il l'envisage avec « sang-froid; il ne doit point courir à elle comme les héros « des batailles; il la voit tranquillement venir; il se porte « où la foudre éclate, non pour agir, mais pour observer; « non pour s'étourdir, mais pour délibérer. »

J'aurais peut-être moins longuement insisté, Messieurs, sur ce fâcheux épisode de la vie de Carnot, s'il ne m'avait pas été donné de reconnaître moi-même combien de pareils temps sont loin de nous; si accompagnant, dans la visite de quelques villes de guerre, nos officiers du génie les plus illustres, je n'avais vu, lorsqu'on discutait les améliorations dont ces places semblaient susceptibles, le simple sous-lieutenant opposer vivement et en toute liberté ses idées, ses réflexions, ses systèmes, aux opinions des généraux; ne se rendre qu'après avoir été victorieusement réfuté, et sortir définitivement de cette lutte animée, non pas, comme jadis, pour aller à la Bastille, mais avec de nouvelles chances d'avancement.

Ceux à qui est dévolu le devoir de réclamer sans cesse les améliorations dont notre état social est susceptible, se dé-

courageraient, Messieurs, si, quand l'occasion s'en présente, on ne montrait pas au public que leurs efforts ont quelquefois été couronnés de succès.

Essai sur les machines. Théorème nouveau sur les pertes de force.

La première, je dirai plus, la principale production scientifique de Carnot, date de l'année 1783; elle est intitulée : *Essai sur les machines en général.*

Ceux-là se tromperaient beaucoup qui chercheraient dans l'essai de notre confrère la description technique ou l'étude spéciale d'une quelconque des machines simples ou composées dont les hommes ont su tirer tant d'avantages. Tel n'était pas, en effet, le but que l'auteur avait en vue.

Une machine, considérée dans sa plus grande généralité, est l'assemblage d'un nombre plus ou moins considérable de pièces fixes ou mobiles à l'aide desquelles les forces de toute nature produisent ordinairement des effets que leur action directe ne pourrait pas réaliser. Voyez, par exemple, le tailleur de pierre, la main sur la manivelle d'une machine bien simple, sur la manivelle du cric ou du treuil; il renverse, il incline à sa convenance, il soulève jusqu'au faîte des plus hautes bâtisses d'énormes blocs que, sans cela, il ne parviendrait pas à déplacer de l'épaisseur d'un cheveu.

A la vue de ces effets, les ignorants crient à la merveille; ils se persuadent que les machines multiplient les forces, et cette idée fausse, radicalement fausse, les jette dans des conceptions bizarres, ordinairement très-compliquées, qui enlèvent chaque année, en pure perte, d'immenses capitaux à

l'agriculture, à l'industrie manufacturière et au commerce.

Dans une force, quelle qu'en soit la nature, ce qui doit s'apprécier en argent, ce que le fabricant achète à l'ingénieur, peut aisément se ramener à un effet très-simple et dont tout le monde a une idée nette. On suppose la force directement appliquée à l'élévation d'un poids; on voit la hauteur à laquelle la force l'élève dans un certain temps, et ces deux données de l'expérience, le poids et la hauteur, multipliées entre elles forment un produit qui est l'appréciation exacte de la force employée. Ce produit, en effet, pour un temps donné, ne peut pas augmenter ou diminuer sans que la force n'augmente ou ne diminue dans la même proportion; en sorte, par exemple, que s'il devient double, triple, décuple, c'est que la force a doublé, triplé, décuplé.

Le produit, qui donne la mesure directe d'une force, sert également à l'apprécier quand elle a exercé son action sur la résistance par l'intermédiaire d'une machine; eh bien! cette machine, douez-la par la pensée de toutes les perfections imaginables, et le produit du poids par la hauteur qu'il aura parcourue en un temps donné, sera précisément égal à celui qu'on avait obtenu en opérant avec la même force sans aucun intermédiaire. L'effet réel, disons mieux, l'effet convenablement envisagé d'une machine quelconque, ne surpassera donc jamais celui que la force motrice était en état de produire naturellement. Si vous le voulez, vous pourrez sans doute, avec une machine, soulever des masses énormes, des millions, des milliards de kilogrammes, par exemple; mais puisque ce produit du poids par la hauteur doit rester constant, les quantités dont ces masses pourront être soulevées en une minute seront un million ou un milliard de fois plus

petites que celles où votre main eût porté un seul kilogramme dans le même temps.

Chacun comprendra maintenant le véritable sens de l'aphorisme de mécanique : *Les machines font perdre en temps ou en vitesse ce qu'elles font gagner en force.* Qu'on me donne un point d'appui situé hors de la terre, s'écriait *Archimède,* et cette terre si grande, si massive, je la soulèverai à l'aide d'un levier par le seul effort de ma main. L'exclamation de l'immortel géomètre caractérisait merveilleusement les machines, en tant qu'elles donnent à l'homme le moyen de réaliser des effets qui, sans cela, seraient des milliards de milliards de fois au-dessus de sa force naturelle; mais l'antiquité l'eût sans doute beaucoup moins admirée, si, analysant de plus près les phénomènes, comme nous venons de le faire, quelqu'un avait ajouté : Oui! sans doute, mathématiquement parlant, avec son point d'appui et son levier Archimède soulèverait le globe; mais après 40 millions de siècles d'un effort continu, car un tel calcul ne dépasse pas aujourd'hui les limites de la science, le déplacement opéré serait à peine de l'épaisseur d'un cheveu.

Si la machine idéale, si la machine douée de toutes les perfections imaginables n'ajoute rien à la force qui la met en action, du moins elle ne lui fait rien perdre; elle transforme les effets par équivalents rigoureux. Il n'en est pas de même d'une machine réelle: ici la puissance et la résistance communiquent entre elles à l'aide de pièces que nous supposions inflexibles et qui ne le sont pas; à l'aide de chaînes et de cordages dont la roideur ne saurait manquer d'être nuisible; les parties mobiles tournent d'ailleurs dans des collets, dans des crapaudines où s'opèrent de grands frot-

tements; toutes ces causes réunies absorbent en pure perte une partie très-notable de la force motrice; ainsi les effets d'une machine doivent toujours être inférieurs à ceux que la force eût engendrés en agissant directement sur les résistances.

Ces résultats de la théorie, confirmés d'ailleurs complétement par l'expérience, n'empêchent pas que sous de certains points de vue telle ou telle machine ne puisse, sans paradoxe, être recommandée; qu'elle ne soit utile, et même souvent indispensable. Des considérations de solidité ou d'ornement obligent, par exemple, de porter au sommet de certains édifices des blocs de pierre ou de marbre dont le poids dépasse les forces de l'ouvrier le plus vigoureux; supprimez le treuil, supprimez les machines analogues, et un seul homme ne pourra plus exécuter le travail que l'architecte aura conçu; il faudra réunir des milliers de bras sur un même point; des espaces resserrés y mettront obstacle; le *grand appareil* disparaîtra de tous les monuments d'architecture; la porte triomphale, le palais, ne seront plus construits, comme la modeste chaumière, qu'avec de petits moellons.

Vous le voyez, Messieurs, il est des cas, nous ne saurions trop le répéter, dans lesquels, bon gré, mal gré, on doit se résigner à la perte de force qu'entraînent les machines, puisque sans leur secours certains travaux deviendraient inexécutables.

Les pertes de force qui dépendent de la flexibilité des matériaux dont les machines sont composées, de la roideur des cordes et du frottement, avaient été remarquées des plus anciens mécaniciens; les modernes ont été plus loin : leurs

expériences servent à apprécier ces pertes, à les évaluer en nombres avec une assez grande exactitude.

La science en était à ce point lorsque Carnot publia son *Essai*. Dans cet ouvrage notre confrère, envisageant les machines, et même plus généralement tout système de corps mobiles, sous un point de vue entièrement neuf, signale une cause inaperçue ou du moins imparfaitement analysée par ses prédécesseurs, et qui, en certains cas, doit aussi donner lieu à des pertes considérables; il montre qu'on doit, à tout prix, éviter les changements brusques de vitesse. Carnot fait plus : il trouve l'expression mathématique de la perte de *force vive* que de pareils changements occasionnent; il montre qu'elle est égale à la *force vive* dont tous les corps du système seraient animés, si on douait chacun de ces corps de la vitesse finie qu'il a perdue à l'instant même où le changement brusque s'est réalisé.

Tel est, Messieurs, l'énoncé du principe qui, sous le nom de *théorème de Carnot,* joue un si grand rôle dans le calcul de l'effet des machines.

Ce beau, ce précieux théorème est aujourd'hui connu de tous les ingénieurs; il les guide dans la pratique; il les garantit des fautes grossières que commettaient leurs devanciers.

Si je devais en faire sentir l'importance aux gens du monde, je dirais peut-être, malgré la bizarrerie apparente du rapprochement, que Carnot a étendu au monde matériel un proverbe dont la vérité n'était guère constatée que dans le monde moral; que *beaucoup de bruit et peu de besogne* est désormais un dicton tout aussi applicable aux travaux effectifs des machines qu'aux entreprises de certains individus dont la pé-

tulance fait espérer des merveilles que l'événement ne réalise jamais. En m'adressant aux hommes d'étude, je les prierais de distinguer soigneusement l'invention des organes matériels à l'aide desquels les forces transmettent leur action d'un point à un autre, de la découverte de ces vérités primordiales qui s'appliquent indistinctement à tous les systèmes imaginables; j'essayerais de faire voir que, sous ce premier point de vue, les anciens ne nous étaient peut-être pas inférieurs. La vis d'Archimède, les engrenages de Ctésibius, les fontaines hydrostatiques d'Héron d'Alexandrie, l'appareil rotatif à vapeur du même ingénieur, une foule de machines de guerre, et parmi elles les balistes, viendraient au besoin fortifier mon doute. Au contraire, dans le champ des vérités théoriques, la prépondérance des modernes se montrerait incontestable. Là apparaîtraient successivement et dans tout leur éclat : en Hollande, Stévin et Huyghens; en Italie, Galilée et Torricelli; en Angleterre, Newton et Maclaurin; en Suisse, Bernouilli et Euler; en France, Pascal, Varignon, d'Alembert, Lagrange et Laplace.

Eh bien! Messieurs, voilà les illustres personnages à côté desquels Carnot est allé se placer par la découverte de son beau théorème.

Je ne sais, en vérité, si je ne dois pas craindre, en insistant plus longtemps sur les inconvénients des changements brusques, de faire naître dans mon auditoire le désir que, tout inconvénient mis de côté, je passe *brusquement* à un autre sujet; je me hasarderai, cependant, à ajouter encore quelques mots.

Il vient d'être souvent question de forces perdues : l'expression est juste quand on compare les effets d'une machine

à ceux qu'elle aurait pu produire, toutes les autres circonstances restant les mêmes, si le constructeur avait soigneusement évité les changements subits de vitesse; mais il ne faut pas croire qu'aucune force ou fraction de force puisse être jamais anéantie dans l'acception grammaticale du mot : tout ce qui ne se retrouve ni dans l'effet utile engendré par le moteur, ni dans ce qu'il conserve de puissance après avoir agi, a concouru à l'ébranlement et à la destruction de la machine.

Ce dernier trait était nécessaire pour faire apprécier les éminents, les incontestables services que le théorème de Carnot a déjà rendus et qu'il rendra de plus en plus à l'art et à l'industrie. Si je ne craignais la vive incrédulité qui, de prime abord, s'attacherait à mes paroles, j'ajouterais que ce même théorème d'analyse et de mécanique a aussi joué un grand rôle dans les événements nombreux de notre révolution, dont les déterminations de Carnot pouvaient changer le caractère. Au reste, j'en ai trop dit pour ne pas compléter ma pensée.

Dans ma jeunesse, encouragé par la bienveillance, par l'amitié dont Carnot voulait bien m'honorer, je prenais quelquefois la liberté de reporter ses souvenirs sur ces grandes époques de nos annales révolutionnaires où les partis, dans leurs convulsions frénétiques, furent anéantis, vaincus ou seulement apaisés par des mesures brusques, violentes, par de véritables coups d'État. Je demandais alors à notre confrère comment, seul entre tous, il avait constamment espéré d'arriver au but sans secousses, et sans porter atteinte aux lois; sa réponse, toujours la même, s'était profondément gravée dans ma mémoire; mais quelle ne fut pas ma sur-

prise lorsque, sortant un jour du cercle d'études qu'un jeune astronome doit d'abord s'imposer, je retrouvai textuellement la réponse constante dont il vient d'être question, dans l'énoncé d'un théorème de mécanique; lorsque je vis que notre confrère m'avait toujours entretenu de l'organisation politique de la société, précisément comme dans son ouvrage il parle d'une machine où des changements brusques entraînent nécessairement de grandes déperditions de force, et, tôt ou tard, amènent la dislocation complète du système!

Serait-il donc vrai, Messieurs, que dans notre humaine faiblesse les esprits les plus élevés fussent si peu convaincus de la bonté, de la sagesse des déterminations que le cœur leur inspire, qu'ils eussent besoin de les confirmer, de les corroborer par des assimilations plus ou moins forcées?

Ce doute ne vous étonnera pas si j'ajoute que, dans toutes les occasions difficiles, un des savants dont les travaux ont le plus illustré cette Académie se réglait, à l'en croire, sur cette maxime assurément très-commode : « L'eau prend « exactement la forme du vase qui la contient : un esprit « sage doit, avec la même fidélité, se modeler sur les cir- « constances du moment. »

Je pourrais citer aussi un autre de nos confrères non moins célèbre, à qui certain personnage demandait un jour devant moi par quel secret il avait traversé sans encombre les terribles époques de nos discordes civiles : « Tout pays « en révolution, répondit-il, est une voiture dont les che- « vaux ont pris le mors aux dents; vouloir arrêter les che- « vaux, c'est courir de gaieté de cœur à une catastrophe; « celui qui saute de la voiture s'expose à être broyé sous

« les roues; le mieux est de s'abandonner au mouvement en « fermant les yeux, ainsi ai-je fait! »

Dans l'ouvrage dont l'analyse m'a entraîné plus loin que je ne le prévoyais, Carnot a consacré quelques lignes à la question du *mouvement perpétuel.* Il fait voir non-seulement que toute machine, quelle qu'en soit la forme, abandonnée à elle-même s'arrêtera, mais il assigne encore l'instant où cela doit arriver.

Les arguments de notre confrère sont excellents; aucun géomètre n'en contestera la rigueur : faut-il espérer, toutefois, qu'ils dessécheront dans leur germe les nombreux projets que chaque année, je me trompe, que *chaque printemps* voit éclore?

Voilà ce dont on ne saurait se flatter. Les faiseurs de mouvements perpétuels ne comprendraient pas plus l'ouvrage de Carnot, que les inventeurs de la quadrature du cercle, de la trisection de l'angle, n'entendent la géométrie d'Euclide. De la science, ils n'en ont pas besoin : leur découverte, ils la doivent à une inspiration soudaine, surnaturelle. Aussi, rien ne les décourage, rien ne les détrompe; témoin cet artiste, d'ailleurs fort estimable, qui sans se douter de ce qu'il y avait de naïvement burlesque dans les termes de sa demande, me priait d'aller voir *pourquoi tous ses mouvements perpétuels s'étaient arrêtés!*

Carnot, homme politique. — L'un des juges de Louis XVI.

Carnot fut un des premiers officiers de l'armée française qui embrassèrent loyalement et avec enthousiasme les vues régénératrices de l'Assemblée nationale. Cependant, les

annales de la révolution ne font mention de lui qu'à partir de 1791.

Certains écrivains prennent à tort l'esprit de prosélytisme pour la juste mesure de la sincérité des convictions politiques ; ils ne comprennent point qu'une vie retirée, studieuse, puisse s'allier à un profond désir de réformes sociales; les deux années d'inaction de Carnot leur semblent un véritable phénomène. Or, devinez de quoi ils se sont avisés pour l'expliquer ? Ils placent notre confrère parmi les émigrés de Coblentz ; ses tendances républicaines ne dateraient ainsi que de l'époque où il serait rentré furtivement en France. Je ne vous ferai pas, Messieurs, l'injure de réfuter une aussi risible supposition.

En 1791, Carnot était en garnison à *Saint-Omer*, et s'y maria avec M^lle^ Dupont, fille d'un administrateur militaire né dans ce pays. Ses principes politiques, la modération de sa conduite, ses connaissances variées lui valurent bientôt après l'honneur de représenter le département du *Pas-de-Calais* à l'Assemblée législative. A partir de cette époque, Carnot se livra tout entier aux devoirs impérieux qui lui furent imposés ou par le choix de ses concitoyens ou par le suffrage de ses collègues ; l'homme public absorba presque entièrement le géomètre : ce dernier ne se montra plus que de loin en loin.

Ici, Messieurs, deux routes se présentent à moi. L'une est unie et frayée ; la seconde semble bordée de précipices. Si j'en croyais quelques personnes que leur bienveillance pour moi a rendues timides, je n'hésiterais pas à choisir la première. Prendre l'autre, ce sera encourir, je le sais, les reproches d'imprudence, d'aveuglement. A Dieu ne plaise que je me suppose la force de lutter contre des préventions si nettes,

si décidées; mais de mesquines considérations d'amour-propre s'évanouiront toujours à mes yeux devant le sentiment du devoir. Or, je le demande, ne blesserais-je pas profondément la conscience publique, si, même dans cette enceinte consacrée aux arts, aux lettres, aux sciences, je me bornais à parler de l'académicien Carnot? Sans doute, en déroulant devant vous la longue série de découvertes de tel ou tel savant illustre revêtu durant sa vie du titre de sénateur, on a pu légitimement, très-légitimement s'écrier que la postérité ne garderait aucun souvenir de fonctions sans portée, et qui d'ailleurs, de dégradation en dégradation, avaient fini par se réduire à des communications mensuelles avec la trésorerie; mais ce serait un acte antinational, un acte d'ingratitude, que d'appliquer de telles paroles à la grande ombre de Carnot. On le désire, on le veut, on l'ordonne presque; eh bien! j'y consens; je ne parlerai pas du drame dont le dénoûment fut la mort tragique du successeur de cent rois et le renversement de la monarchie; cependant, moi partisan décidé de l'abolition de la peine de mort, je n'aperçois pas les prétendues difficultés de position qui m'auraient empêché de m'abandonner ici publiquement aux inspirations de ma conscience; je ne devine pas mieux pourquoi je me serais abstenu de rendre aussi cette enceinte confidente de l'aversion profonde que je professe pour tout arrêt politique rendu par un corps politique. Faut-il le dire, enfin, une fraternelle sollicitude pour la mémoire de Carnot ne me paraissait pas exiger le sacrifice qui m'est imposé. A-t-on oublié tout ce que l'histoire contemporaine m'aurait fourni de documents accusateurs contre les mille courtisans dont les manœuvres intéressées, hypocrites, antinationales,

jetèrent le monarque dans un labyrinthe sans issue, le firent déclarer coupable à l'unanimité par la représentation nationale, et rendirent, bien plus encore que les ardentes idées démocratiques de la Convention, la catastrophe du 21 janvier inévitable. Si de ces hautes considérations de morale, j'étais descendu à l'appréciation minutieuse des faits, à leur discussion technique, telle qu'il faudrait la soumettre à une cour d'appel ou de cassation, j'aurais trouvé avec tous les esprits droits, avec notre Daunou, par exemple, l'illégalité du célèbre procès, moins dans la nature de la sentence, moins dans la sévérité de la peine infligée, que dans la composition même du tribunal, que dans l'usurpation de pouvoir qui lui avait donné naissance. Or, Messieurs, et je n'aurais pas manqué d'en faire la remarque, quand la Convention s'investissait du droit de prononcer sur le sort de Louis XVI; quand elle réglait, après coup, sa jurisprudence; quand elle s'attribuait simultanément les fonctions d'accusateur et de juge, Carnot était absent de Paris, Carnot remplissait aux armées une de ces missions importantes dont son ardent patriotisme trouvait toujours le secret de vaincre les difficultés.

Carnot, membre du comité de salut public.

La concession qu'on a exigée de moi, si tant il y a, cependant, que je m'y sois bien exactement conformé, m'autorise à me montrer moins docile au sujet d'une autre période de la vie de Carnot, plus orageuse, plus difficile encore. Évitons, j'y consens de grand cœur, évitons de reporter nos regards sur certaines phases irritantes de nos discordes

civiles; pour moi, je n'y mettrai jamais qu'une condition : c'est que la mémoire d'aucun de nos confrères n'en souffrira. Eh bien, Messieurs, supposez un moment que je me taise ici sur le *membre du comité de salut public;* ne conclura-t-on pas de mon silence, je dis plus, n'aura-t-on pas le droit d'en conclure que j'ai reconnu l'impossibilité de repousser les attaques vives, nombreuses, poignantes, dont il a été l'objet? Ces attaques, Carnot, de son vivant, a pu les dédaigner; il m'était au contraire imposé d'en chercher l'origine, d'en peser consciencieusement la valeur. Je le dis sans *forfanterie,* aucune puissance humaine ne m'eût décidé à faire retentir ici le nom de Carnot, si je n'avais découvert les causes honorables, patriotiques, de certains actes que la plus atroce des calomnies, que la calomnie politique, avait souillés de sa bave infecte. Mon travail, au reste, n'a pas été sans quelques difficultés. Personne dans l'avenir n'aurait peut-être plus l'occasion d'en réunir les éléments. Encore quelques années, en effet, et les collègues et les collaborateurs de Carnot, dont j'ai pu recueillir les lumières et les témoignages, auront payé leur tribut à la nature.

En 1793, la Convention était dans l'État le seul pouvoir organisé capable d'opposer une digue efficace au débordement d'ennemis qui de toutes les parties de l'Europe venaient se ruer sur la France et menacer sa nationalité. La nationalité d'un peuple est comme l'honneur : la plus légère blessure lui devient mortelle. Tels étaient, Messieurs, les sentiments de tant de conventionnels dont la France révère la mémoire; tels étaient les liens qui les attachaient au poste périlleux où l'élection les avait appelés.

En créant le *comité de salut public* (le 6 avril 1793), la

Convention s'était réservé le choix de ses membres. Jusqu'au fameux 31 mai, on n'y comptait que des conventionnels neutres ou tout au moins étrangers aux deux fractions de l'assemblée qui se faisaient une guerre à mort. A la suite de plusieurs renouvellements partiels, il se composait, le 11 septembre 1793, de *Robespierre*, *Saint-Just*, *Couthon*, *Collot d'Herbois*, *Billaud-Varennes*, *Prieur* de la Marne, *Prieur* de la Côte-d'Or, *Carnot*, *Jean-Bon Saint-André*, *Barère*, *Hérault de Séchelles*, *Robert Lindet*.

La Convention, lorsqu'elle déféra de si grands pouvoirs au comité de salut public, voulait que chaque affaire fût dans ce comité le sujet d'une discussion, d'une délibération approfondie; que la majorité des voix prononçât. Les décisions, pour acquérir force de loi, devaient, à peine de nullité, être revêtues d'un certain nombre de signatures. Ces prescriptions avaient le plus grand de tous les défauts, celui d'être complétement inexécutables. L'homme a trouvé de nos jours le secret de décupler sa vitesse quand il se déplace, de modifier sa force quand il doit agir, de porter ses regards scrutateurs dans les régions de l'infini; il n'a pas découvert encore les moyens de lire une page d'écriture en moins de temps qu'on n'en employait jadis. Il faut même reconnaître qu'à cet égard le plus humble commis expéditionnaire marcherait l'égal de *César*, de *Cicéron*, de *Descartes*, de *Bossuet*. Les innombrables dépêches que le comité de salut public recevait journellement de tous les points de nos frontières menacées ou envahies, de toutes les villes, de tous les villages de l'intérieur où les promoteurs d'une nouvelle organisation politique luttaient violemment contre les préjugés et les intérêts des castes privilégiées, ne pouvaient être exa-

minées avec maturité. Le zèle, l'activité, le dévouement ne suffisaient pas à l'expédition de tant de graves affaires; une réforme était indispensable ; il y allait du salut de la France. Deux voies différentes se présentaient : on pouvait provoquer la réorganisation du comité, ou partager le travail entre ses divers membres. La réorganisation du comité, en présence d'un ennemi puissant, au milieu de difficultés inouïes (dont aucune époque de l'histoire des peuples n'avait offert l'exemple), eût jeté dans la Convention de nouveaux ferments de discorde, énervé son pouvoir magique, et compromis la défense du territoire. La division du travail devait prévaloir, et elle prévalut en effet. *Carnot* fut chargé de l'organisation des armées et de leurs opérations; *Prieur* de la Côte-d'Or, de l'armement; *Robert Lindet*, des approvisionnements; *Robespierre, Saint-Just, Couthon, Billaud-Varennes, Collot d'Herbois*, se réservèrent la politique, la police générale et les mesures de sûreté. Dans chaque nature de questions, une seule signature était sérieuse et emportait responsabilité ; les autres, quoique exigées par la loi, devaient être regardées comme l'accomplissement d'une simple formalité : il était évident, en effet, qu'on serait obligé de les donner sans discussion et même sans examen.

Telles furent, Messieurs, les bases de la convention que Robert Lindet, pour sa sûreté personnelle, fit consigner dans une déclaration écrite, et à l'aide de laquelle les membres du comité de salut public crurent pouvoir, sans outre-passer les termes de leur mandat, conjurer les orages qui, de toutes parts, menaçaient le pays. Cet arrangement confidentiel sera sans doute blâmé : les uns crieront à l'illégalité, les autres à l'imprudence. Je rappellerai aux premiers qu'enlacés dans

une organisation vicieuse, les membres du comité étaient chaque jour aux prises avec une impossibilité, et que le mot *impossible* est français, quoi qu'en ait pu dire l'amour-propre national à une époque où les admirables triomphes de nos armées semblaient légitimer toutes les hyperboles. Le reproche d'imprudence, je l'admets sans réserve. J'ajoute que, de la part de Carnot, cette imprudence était volontaire; qu'en se résignant à signer sans examen les décisions de tous ses collègues, il faisait sciemment à la France le plus grand de tous les sacrifices; qu'il plaçait son honneur aux mains de plusieurs de ses ennemis déclarés; que, comptant enfin sur la justice tardive de la postérité, il arborait cette devise, presque surhumaine, d'une des plus puissantes organisations que la révolution ait fait surgir du flot populaire, cette devise que tout patriote sincère et doué de quelque chaleur d'âme pourrait au reste avouer : *Périsse ma réputation plutôt que mon pays !*

Vous l'avez déjà compris, Messieurs, mon but est de partager en deux catégories distinctes et les membres du comité de salut public et la longue série de ses actes.

Le terrible comité contribua puissamment à la défense du territoire; grâces lui soient rendues! On ne pouvait résister à mille passions déchaînées que par la vigueur des déterminations; que par l'énergie de la volonté; qu'en allant avec une main de fer saisir en tout lieu les barbares qui, auxiliaires de l'étranger, voulaient déchirer les entrailles de la patrie : le comité se montra énergique et vigoureux; il eut souvent une main de fer : gloire au comité!

Mais bientôt, Messieurs, la fermeté dégénère en frénésie; mais bientôt on immole les riches par l'unique raison qu'ils sont riches; mais bientôt la terreur règne d'une extrémité de

la France à l'autre; elle porte indistinctement le deuil et le désespoir dans la famille du simple soldat et dans celle du général; elle saisit ses victimes dans l'humble demeure de l'artisan, comme dans le palais doré de l'ancien duc et pair; elle n'épargne ni l'âge ni le sexe; elle frappe en aveugle toutes les opinions; ajoutant enfin la dissimulation à la cruauté, elle parodie les formes de la justice! Ah! Messieurs, à ce spectacle, le cœur se serre, l'espérance se dessèche; les plus vives, les plus ardentes sympathies font place à une douleur profonde.

Je sais qu'on a expliqué, qu'on a voulu excuser ces sanglantes saturnales, en invoquant la volonté populaire. Si je juge du peuple de 93, que je n'ai point connu, par celui que nous avons vu à l'œuvre en 1830, l'explication est menteuse, je n'hésite point à le dire. Le peuple, dans un moment d'effervescence et d'entraînement, se porte quelquefois à des actes coupables; jamais il ne s'est associé à des barbaries quotidiennes. On le dégrade en disant que la terreur pouvait seule le faire marcher à la rencontre des hordes ennemies; on ne méconnaît pas moins ses sentiments, lorsqu'on insinue qu'il a voulu la mort d'un des membres de cette Académie, qui honorait la France par son génie, la mort d'un autre de nos confrères qui honorait l'espèce humaine par sa vertu. Non, Messieurs; non! dans le noble pays de France, la mort de Lavoisier, la mort de Malesherbes n'ont pas pu être commandées par des considérations de salut public. Point de ménagements pour de pareils crimes; il faut les flétrir aujourd'hui; il faudra les flétrir demain; il faudra les flétrir toujours. Voués par sentiment, par conviction, par la puissance irrésistible de la logique, au culte de la liberté, repous-

sons loin de nous l'exécrable pensée que l'échafaud soit l'inévitable auxiliaire de la démocratie.

Les crimes que je viens de qualifier sans ménagement, la France, l'Europe, le monde tout entier les ont, en quelque sorte, personnifiés; ces crimes, c'est *Robespierre!*

De jeunes, d'estimables écrivains qui dépouillent aujourd'hui nos annales révolutionnaires avec l'infatigable patience des anciens Bénédictins, croient avoir trouvé que l'opinion publique s'est égarée. D'après eux, *Robespierre* et ses séides auraient beaucoup moins contribué aux actes sanguinaires de la terreur que les *Billaud-Varennes*, les *Collot d'Herbois*, les *Hébert*. Il y a du courage, Messieurs, à se porter ainsi les défenseurs d'un personnage qui depuis près d'un demi-siècle est devenu le type, le symbole de la cruauté politique. A ce seul titre, les nouveaux historiens pourraient espérer d'être écoutés sans préventions : un honorable caractère uni à un incontestable talent ne leur donne pas moins de droits à la sérieuse attention du public. Pour moi, je n'aurais que faire d'essayer ici de percer ces épais nuages; mon sujet ne l'exige pas : je veux absoudre *Carnot* de toute participation à de grands crimes, sans examiner s'il faut les imputer à *Collot d'Herbois*, à *Billaud-Varennes*, plutôt qu'à *Robespierre*, *Saint-Just* et *Couthon*.

Dans aucune circonstance de sa longue carrière politique, Carnot ne fut un homme de parti. Jamais on ne le vit essayer de faire prévaloir ses opinions, ses systèmes, ses principes, par des voies tortueuses que l'honneur, que la justice, que la probité n'eussent point avouées.

Rapporteur, le 9 juin 1792, de la commission chargée de proposer des réparations en faveur des familles de *Théobald*

Dillon et de *Berthois*, massacrés devant Lille par leurs propres troupes, Carnot ne transige pas avec un rigoureux devoir. Tout autre, en des temps aussi difficiles, eût cru peut-être nécessaire de ménager la susceptibilité de l'armée; lui, ne trouve dans son âme que des paroles brûlantes pour flétrir un acte d'égarement odieux. « Je ne vous rappellerai « point, s'écrie-t-il, les circonstances de cette atrocité. La « postérité, en lisant notre histoire, y croira voir le crime « d'une horde de cannibales, plutôt que celui d'un peuple « libre. »

En 1792, des gardes nationaux, sous le nom de *fédérés*, se réunissaient en grand nombre à *Soissons*, et y formaient déjà le noyau d'une armée de réserve. Tout à coup le bruit se répand à Paris que le pain de ces volontaires a été empoisonné, que des monstres ont mêlé du verre pilé à tous les approvisionnements de farines, que deux cents soldats sont déjà morts, que les hôpitaux regorgent de malades. L'exaspération de la population parisienne est à son comble; le rassemblement de Soissons s'est formé contre la volonté royale; c'est donc au roi, à la reine, à tous leurs adhérents que le crime doit être imputé. On n'attend plus pour agir que le rapport du commissaire envoyé au camp. Ce commissaire était Carnot. Son examen véridique réduisit au néant toute cette fantasmagorie : il n'y avait point de morts; il n'y avait point de malades; les farines n'étaient pas empoisonnées; des vitraux, détachés par le vent ou par la balle de quelque écolier des fenêtres d'une vieille église, étaient tombés par hasard, non en poudre, mais en gros morceaux, sur un sac, sur un seul sac de farine. Le témoignage loyal de l'honnête homme calma la tempête populaire.

Celui-là n'était pas un *homme de parti,* bien entendu dans la mauvaise acception de ce terme, qui, chargé fréquemment de missions importantes aux armées et à l'intérieur, y remplit ses devoirs avec une telle modération, qu'il put, lorsque les circonstances l'exigèrent, sans crainte d'être démenti, se rendre à lui-même publiquement le témoignage de n'avoir jamais fait arrêter personne. En pénétrant dans les bureaux du comité de salut public, nous y trouverions des preuves non moins claires de la bienveillante indulgence de Carnot envers ceux qui professaient des opinions politiques différentes des siennes, dès que toutefois elles s'alliaient à de l'honnêteté et à une vive antipathie pour l'intervention de l'étranger dans les affaires intérieures de la France. Ainsi nous verrions sous le nom de *Michaux*, parmi les collaborateurs de notre confrère, le célèbre *Darçon*, qui était un émigré rentré. Mais à quoi bon se traîner sur des faits particuliers, lorsqu'une réflexion générale peut également conduire au but? La Convention était l'arène où allaient se combattre les chefs des factions qui divisaient le pays; mais c'est dans les *clubs* qu'ils se créaient des adhérents et la force matérielle dont l'action, dont la seule présence annulait souvent les effets des plus éloquents discours. Si la Convention voyait éclater la foudre, c'est hors de son enceinte que l'orage commençait à poindre, qu'il grossissait, qu'il acquérait une puissance irrésistible. On n'était alors un homme influent en politique, qu'à la condition de paraître tous les jours aux *Jacobins* ou aux *Cordeliers*, qu'à la condition de s'y mêler à tous les débats : eh bien! Messieurs, Carnot n'appartenait à aucune de ces associations; jamais un mot de lui ne retentit dans les clubs. En ces temps de

troubles, Carnot se fit exclusivement l'*homme de la nationalité.*

Le rôle était beau, mais non pas sans danger. Robespierre surtout s'en montrait jaloux. S'être emparé, s'écriait-il, dans une de ses harangues, de toutes les opérations militaires, c'est un *acte d'égoïsme;* refuser obstinément de se mêler des affaires de police intérieure, c'est se ménager des moyens d'accommodement avec les ennemis du pays. Je suis désolé, disait-il à Cambon dans une autre circonstance, je suis désolé de ne rien comprendre à l'entrelacement de lignes et de teintes que je vois sur ces cartes. Ah! si j'avais étudié l'art militaire dans ma jeunesse, je ne serais pas forcé, toutes les fois qu'il s'agit de nos armées, de subir la suprématie de l'odieux Carnot. Cette animosité datait de l'époque où notre confrère blâma le coup d'État (en tant que coup d'État) sous lequel succomba la *Gironde.* Vers le même temps, Saint-Just l'accusa de *modérantisme*, et demanda qu'il fût mis en jugement pour avoir, à l'armée du Nord, refusé d'apposer sa signature sur l'ordre d'arrestation du général O'Moran. Carnot sortait toujours sain et sauf de ces terribles épreuves, non par un sentiment de justice ou d'affection, mais parce que chacun, ami comme ennemi, reconnaissait l'impossibilité de le remplacer utilement, dans sa spécialité militaire, par tout autre *conventionnel!*

De pareilles relations, entre les membres d'un même conseil, sembleront aujourd'hui fabuleuses! Est-ce ma faute à moi si notre patriotisme débile ne peut pas concevoir toute l'étendue des sacrifices que s'imposèrent nos pères pour sauver le pays?

Au premier rang de ces sacrifices, je n'ai pas hésité, vous

vous le rappellerez, Messieurs, à placer l'obligation où se trouvait notre confrère de signer aveuglément une foule d'actes de ses collègues. J'ai expliqué comment cette nécessité s'était *manifestée;* eh bien! on en abusa jusqu'à faire signer à Carnot, une fois, l'arrestation de son propre secrétaire; une autre fois, celle du restaurateur chez lequel il prenait ses repas. Le mot *infernal* me paraît encore trop faible quand il faut caractériser de tels actes; et cependant, pour l'honneur de notre confrère, nous devons presque nous féliciter qu'ils aient eu lieu, car ils sont la preuve, irrécusable, parlante de l'arrangement écrit qui, dans le comité, fut convenu *au nom du salut du pays.*

J'avais lu, même dans des ouvrages royalistes, j'avais lu dans des écrits publiés par des républicains, que Carnot avait sauvé, au comité de salut public, plus de personnes que ses collègues n'en ont immolé. Carnot ne s'absentait donc des séances qu'aux époques où les affaires militaires absorbaient tous ses moments; Carnot assistait donc quelquefois aux délibérations du comité, et alors l'innocence y comptait un avocat plein d'âme et de fermeté. Le hasard, il y a peu de jours, m'a fait découvrir que le rôle de défenseur officieux n'était pas le seul que Carnot s'y fût donné.

Il y a parmi vous, Messieurs, un vénérable académicien également versé dans les théories mathématiques et dans leurs applications; il a glorieusement attaché son nom à d'utiles travaux et à de vastes projets que l'avenir réalisera peut-être. Il a parcouru une longue carrière sans se faire, certainement, sans mériter un ennemi! et cependant sa tête fut un jour menacée, et des misérables voulaient la faire tomber lorsqu'elle créait un des monuments scientifiques qui ont jeté

le plus d'honneur sur l'ère révolutionnaire. Une lettre anonyme apprend à notre confrère quel danger il vient de courir. L'orage est dissipé, mais il peut se reformer d'un instant à l'autre; la main amie trace un plan de conduite, des règles de prudence, signale la nécessité de se ménager une retraite. Elle ne laissera pas son œuvre inachevée; elle reprendra la plume si le danger reparaît.

L'écrivain anonyme, Messieurs, était Carnot; le géomètre qu'il conservait ainsi à la science et à notre affection était M. de Prony. A cette époque, M. de Prony et Carnot ne s'étaient jamais vus.

Les années 1793 et 1794 ont été caractérisées par deux genres de *terreur* : la terreur de l'intérieur, je viens de le prouver, Messieurs, notre confrère y resta toujours étranger dans ce qu'elle avait de criminel; la terreur que les soldats français inspirèrent à d'innombrables ennemis venus de tous les points de l'Europe assaillir nos frontières : celle-ci fut bien l'œuvre de Carnot; celle-ci a été glorieuse; le souvenir en sera immortel; je la revendique pour la mémoire de notre confrère; je la revendique aussi pour l'honneur de l'Académie. Vous ne refuserez pas, Messieurs, de suivre de nouveau Carnot dans cette phase si belle, si brillante de sa carrière publique. J'en ai pour garant votre dévouement au pays.

Carnot chargé de l'organisation et de la direction de nos armées.

A diverses époques, on a vu, en France ainsi que dans d'autres pays, de simples administrateurs occuper avec succès les postes éminents de ministre de la guerre ou de la

marine. Le général en chef, l'amiral, recevaient alors des commandements avec carte blanche, quant à la nature des opérations, et les ministres n'avaient guère à s'occuper que de l'envoi opportun et régulier des approvisionnements et des renforts. Le croiriez-vous, Messieurs? c'est dans un cercle aussi étroit que la mauvaise foi, que l'envie, ont voulu renfermer l'influence que Carnot exerça sur nos destinées. Mais il nous sera facile de renverser en quelques mots cette œuvre d'une hideuse ingratitude.

Lorsque notre confrère devint, en août 1793, membre du comité de salut public, la France subissait une épouvantable crise. Les débris de l'armée de Dumouriez étaient repoussés de position en position; *Valenciennes*, *Condé*, ouvraient leurs portes à l'ennemi; *Mayence*, pressée par la famine et sans espoir d'être secourue, capitulait; deux armées espagnoles envahissaient notre territoire; vingt mille Piémontais franchissaient les Alpes; les quarante mille Vendéens de Cathelineau s'emparaient de *Bressuire*, de *Thouars*, de *Saumur*, d'*Angers*; ils menaçaient *Tours*, *le Mans*, et attaquaient *Nantes* par la rive droite de la Loire, pendant que Charette opérait sur la rive opposée; *Toulon* recevait dans son port une escadre anglaise; enfin, nos principales villes, *Marseille*, *Caen*, *Lyon*, se séparaient violemment du gouvernement central.

Vous avez maintenant sous les yeux, Messieurs, une faible image des dangers qui menaçaient la patrie; et l'on ose prétendre que la Convention, que la terrible Convention espéra échapper à l'imminente catastrophe que l'Europe presque tout entière croyait inévitable, sans même établir un certain ensemble dans les opérations de ses nombreux généraux; et l'on a pu imaginer qu'en chargeant l'un de ses membres de la

direction à peu près souveraine des affaires militaires, elle n'attendait de lui que les mesures méthodiques, réglementaires, compassées d'un fournisseur ou d'un intendant d'armée! Non, non! personne n'a pu se rallier de bonne foi à de semblables idées.

Ne croyez pas, néanmoins, que je dédaigne les services administratifs de Carnot. J'admire, au contraire, leur noble simplicité. Il n'y avait alors, en effet, dans son ministère, ni cette inextricable filière de paperasses que la plus petite affaire exige de nos jours; ni ce réseau, si artistement tissu, où tout se lie, depuis le garçon de bureau jusqu'au chef de service, d'une manière si serrée, si intime, que la main la plus ferme, la plus hardie, ne saurait se flatter d'en rompre ou d'en séparer les éléments. Alors le chef responsable prenait une connaissance directe et personnelle des dépêches qui lui étaient adressées; alors les conceptions de l'homme d'élite n'étaient pas exposées à périr sous les coups d'une multitude de médiocrités envieuses; alors un simple sergent d'infanterie (le jeune Hoche) ne travaillait pas seulement pour les cartons poudreux des archives, lorsqu'il composait un *mémoire sur les moyens de pénétrer en Belgique;* alors la lecture de ce travail inspirait à Carnot cette exclamation prophétique : « *Voilà un sergent d'infanterie qui fera son chemin.* » Alors le sergent, suivi de l'œil dans toutes ses actions, devenait coup sur coup, et dans l'espace de quelques mois, capitaine, colonel, général de brigade, général de division et général en chef; alors une classe peu nombreuse de la société n'était pas seule investie du privilége de fournir les chefs de nos armées; alors, en fait comme en droit, chaque soldat avait des lettres de commandement dans sa giberne : une action d'é-

clat les en faisait sortir; alors la force militaire, malgré son immense importance, malgré les services éclatants qu'elle rendait au pays, malgré les désordres de l'époque, inclinait respectueusement ses faisceaux devant l'autorité civile, mandataire de la nation.

Jetons nos regards sur une autre face de l'administration de la guerre, et Carnot ne nous paraîtra ni moins grand ni moins heureux.

On manque de cuivre pur; à la voix de la patrie éplorée, les sciences trouvent dans les cloches des couvents, des églises, des horloges publiques, la mine inépuisable d'où elle extraira sans retard tout le métal que l'Angleterre, la Suède, la Russie lui refusent. On n'a point de salpêtre; des terrains où jadis on n'eût cherché cette substance que pour s'assurer de la délicatesse d'un moyen d'analyse chimique, fourniront à tous les besoins de nos armées, de nos escadres. La préparation des cuirs destinés à la chaussure exigeait des mois entiers de travail; d'aussi longs délais ne sauraient se concilier avec les besoins de nos soldats, et l'art du tanneur reçoit des perfectionnements inespérés : désormais, des jours y remplaceront des mois. La fabrication des armes est si minutieuse, que ses lenteurs paraissent inévitables; des moyens mécaniques viennent aussitôt fortifier, diriger, remplacer la main de l'ouvrier; les produits naissent au gré des besoins. Les ballons n'avaient été jusqu'en 1794 qu'un simple objet de curiosité; à la bataille de Fleurus un ballon portera le général Morlot dans la région des nuages; de là les moindres manœuvres de l'ennemi seront aperçues, signalées à l'instant, et une invention toute française procurera à nos armes un éclatant triomphe. Les crayons de graphite (*mine*

de plomb) sont la plume et l'encre de l'officier en campagne; c'est avec le crayon qu'il trace sur le pommeau de la selle de son cheval ces quelques caractères qui lancent au fort de la mêlée des milliers de fantassins, de cavaliers, d'artilleurs; le graphite est une des substances que la nature semblait avoir refusées à notre sol; le comité de salut public ordonne de le créer de toutes pièces, et cet ordre de faire une découverte est exécuté sans retard, et le pays s'enrichit d'une nouvelle industrie. Enfin, car il faut bien me résigner à ne pas tout dire, les premières idées du télégraphe sont tirées des in-folio où depuis des centaines d'années elles restaient enfouies sans aucun profit; on les perfectionne, on les étend, on les applique, et dès ce moment les ordres arrivent aux armées en quelques minutes; le comité de salut public suit de Paris toutes les péripéties de la guerre, à l'est, au nord, et à l'ouest, comme s'il siégeait au milieu des combattants.

Ces créations en quelque sorte spontanées; ces directions patriotiques données à tant de nobles intelligences; cet art, aujourd'hui perdu, d'exciter le génie, de l'arracher à son indolence habituelle, occuperont toujours une large place dans les annales du comité de salut public et dans l'histoire de la vie de notre confrère. Sans sortir, toutefois, du sujet qui nous occupe, nous aurions encore bien d'autres mérites, bien d'autres services à enregistrer.

Carnot était du très-petit nombre d'hommes qui, en 1793, croyaient fermement que la République triompherait tôt ou tard de ses innombrables ennemis. Aussi, tout en donnant au présent la large part que les circonstances commandaient, son administration, l'œil sur l'avenir, dota-t-elle la France de plusieurs grandes institutions dont les heu-

reux effets ne pouvaient se développer qu'avec lenteur.

Si le temps me le permettait, j'aurais à citer ici, parmi les grands établissements à la formation desquels Carnot contribua, la première École normale, l'École polytechnique, le Muséum d'histoire naturelle, le Conservatoire des arts et métiers; et au nombre des travaux qu'il encouragea de son suffrage, la mesure de la terre, l'établissement du nouveau système des poids et mesures, les grandes, les incomparables tables du cadastre.

Ce sont d'assez beaux titres, Messieurs, pour une *ère de destruction*.

La Convention mit aux mains de Carnot la masse colossale mais incohérente de la réquisition. Il fallut l'organiser, la discipliner, l'instruire : Carnot en tira *quatorze armées*. Il fallut lui créer des chefs habiles; notre confrère savait, avec certain général athénien, que *mieux vaudrait une armée de cerfs commandée par un lion, qu'une armée de lions commandée par un cerf;* Carnot fouilla sans relâche la mine féconde, inépuisable des sous-officiers; comme je l'ai déjà dit, son œil pénétrant allait dans les rangs les plus obscurs chercher le talent uni au courage, au désintéressement, et l'élevait rapidement aux premiers grades. Il fallut coordonner tant de mouvements divers; Carnot, comme l'*Atlas* de la fable, porta seul, pendant plusieurs années, le poids de tous les événements militaires de l'Europe; il écrivait lui-même, de sa main, aux généraux; il leur donnait des ordres détaillés où toutes les éventualités étaient minutieusement prévues; ses plans, celui qu'il adressa à Pichegru, par exemple, le 21 ventôse an II, semblaient le fruit d'une véritable *divination*. Les faits vinrent tellement

justifier les prévisions de notre confrère, que pour écrire le récit de la mémorable campagne de 1794, on aurait à peine quelques noms propres de villages à changer dans les instructions qu'il avait adressées au général en chef. Les lieux où il fallait livrer bataille ; ceux où l'on devait se borner à de simples démonstrations, à des escarmouches ; la force de chaque garnison, de chaque poste, tout est indiqué, tout est réglé avec une admirable netteté. C'est sur un ordre de Carnot que *Hoche* se dérobe un jour à l'armée prussienne, traverse les *Vosges*, et, se réunissant à l'armée du *Rhin*, va frapper sur *Wurmser* un coup décisif qui amène la délivrance de l'*Alsace*. En 1793, pendant que l'ennemi s'attendait, conformément aux préceptes classiques de la stratégie, à voir nos troupes se porter de la *Moselle* sur le *Rhin ;* pendant qu'il accumulait sur ce dernier fleuve de formidables moyens de résistance, Carnot, sans s'inquiéter des vieilles théories, détacha inopinément quarante mille hommes de l'armée de la *Moselle* et les envoya sur la *Meuse* à marches forcées. Telle fut la manœuvre célèbre qui décida du succès de cette campagne de 1793, pendant laquelle les généraux autrichiens et hollandais eurent le double chagrin d'être constamment battus, et de l'être contre les règles. Oui, Messieurs, la tribune nationale ne fut que juste, le jour où elle retentit de ces belles paroles, devenues aujourd'hui historiques : « *Carnot a organisé la victoire.* »

Carnot sur le champ de bataille de Wattignies.

On pourrait dire des armées françaises, comme de certains peintres, qu'elles ont eu *plusieurs manières*. Un jour

de bataille, il est vrai, les armées impériales et les armées républicaines se précipitaient sur l'ennemi avec la même intrépidité ; hors de là, tout était différent. Le soldat de l'Empire ne voyait la patrie que dans l'armée ; c'était pour l'honneur, pour la gloire de l'armée qu'il répandait son sang à *Wagram,* à *Sommo-Sierra,* à la *Moscowa.* Le soldat de la République se battait pour le pays : l'indépendance nationale, telle était surtout la pensée qui l'animait pendant le combat ; les récompenses, il n'y songeait seulement pas.

Suivez ces mêmes soldats dans la vie privée, et vous verrez ces dissemblances se continuer. L'impérialiste reste soldat par ses sentiments et par ses manières ; le républicain, confondu dans la masse de la population, ne se distingue bientôt plus d'un artisan, d'un laboureur qui n'aurait jamais quitté l'atelier ou la charrue.

Ce sont ces nuances, habilement saisies, artistement reproduites qui, dès le premier jour, ont si vivement frappé le public dans l'admirable *fronton de notre David.*

Je ne puis pas me résoudre à voir le général Carnot dans un personnage *à culottes courtes et à bas bleus*, me disait, un jour, dans la bibliothèque de l'Institut, certain officier de l'Empire connu par sa valeur brillante. J'insiste. Eh ! bien, soit, ajouta-t-il ; les bas bleus peuvent aller à un général qui n'a pas reçu le *baptême du feu !* Hier encore, avec moins de rudesse, il est vrai, dans les termes, un de nos confrères reproduisait devant moi la même pensée. Je remplirai donc un devoir en prouvant que, dans l'occasion, l'homme aux bas bleus savait bravement payer de sa personne.

Le prince de *Cobourg*, à la tête de soixante mille hommes,

occupait toutes les issues de la forêt de *Mormale* et bloquait *Maubeuge*. Cette ville une fois prise, les Autrichiens ne rencontraient plus d'obstacles sérieux pour arriver à Paris. Carnot voit le danger; il persuade à ses collègues du comité de salut public que notre armée, malgré sa grande infériorité numérique, peut livrer bataille; qu'elle doit attaquer l'ennemi dans des positions qui paraissaient inexpugnables. C'était un de ces moments suprêmes qui décident du sort, de l'existence des nations. Le général *Jourdan* hésite devant une aussi terrible responsabilité. Carnot se rend à l'armée : en quelques heures tout est convenu, tout est disposé; les troupes s'ébranlent; elles fondent sur les ennemis; mais ils sont si nombreux, ils occupent une position si bien choisie, ils ont creusé tant de retranchements, ils les ont garnis d'une artillerie tellement formidable, que le succès est incertain. A la fin de la journée notre aile droite a gagné quelque terrain; mais l'aile gauche en a peut-être perdu davantage. D'ailleurs elle a laissé quelques canons dans les mains des Autrichiens. Renforçons l'aile gauche! s'écrient les vieux tacticiens. Non! non! réplique Carnot, qu'importe le côté par lequel nous triompherons? Il faut bien, bon gré, mal gré, céder à l'autorité sans limites du représentant du peuple. La nuit est employée à dégarnir l'aile déjà compromise; ses principales troupes se portent sur la droite, et quand le soleil se lève c'est en quelque sorte une autre armée que Cobourg trouve devant lui. La bataille recommence avec une nouvelle fureur. Enfermés dans leurs redoutes, protégés par des bois, par des taillis, par des haies vives, les Autrichiens résistent vaillamment; une de nos colonnes d'attaque est repoussée et commence à se débander. Ah! qui pourrait dépeindre les cruelles

angoisses de Carnot; sans doute son imagination lui représente déjà l'ennemi pénétrant dans la capitale, défilant sur nos boulevards et se livrant aux actes de vandalisme dont tant de proclamations, tant d'insolents manifestes nous avaient menacés! Ces déchirantes pensées, en tout cas, n'abattent pas son courage; Carnot rallie les soldats, les reforme sur un plateau; destitue solennellement, à la vue de toute l'armée, le général qui, en désobéissant à des ordres formels, s'était laissé vaincre; s'empare du fusil d'un grenadier, et marche à la tête de la colonne en costume de représentant. Rien ne résiste plus alors à l'impétuosité de nos troupes; les charges de la cavalerie autrichienne sont repoussées à la baïonnette; tout ce qui s'engage dans les chemins creux dont Wattignies est entouré y trouve la mort. Carnot pénètre enfin dans ce village, la clef de la position de l'armée ennemie, à travers des monceaux de cadavres, et dès ce moment Maubeuge est débloqué.

On se demandera, sans doute, où Carnot avait puisé cette fermeté, cette vigueur, ce coup d'œil militaire, cette connaissance des troupes? N'en cherchez la source que dans son ardent patriotisme. C'est à Wattignies que, pour la première fois, il entendit la fusillade et le canon ennemis. Mais je me trompe, Messieurs, c'est la seconde fois et non pas la première : la première fois, Carnot, marchant, comme à Wattignies, un mousquet à la main, emporta d'assaut, à la tête de soldats de nouvelle levée, la ville de *Furnes,* occupée par les Anglais.

La bataille de Wattignies, envisagée d'après ses résultats, occupera toujours une des premières places dans les fastes de la révolution française. Je serais probablement moins

affirmatif sur les difficultés de cette journée comparée à tant d'autres, si je ne pouvais m'autoriser de l'opinion du prince de Cobourg lui-même. Quand il vit les bataillons français s'ébranler, ce général chercha les termes les plus incisifs pour exprimer, en présence de son état-major, la confiance que lui inspiraient le nombre, l'ardeur de ses troupes, et enfin les obstacles de toute espèce, naturels ou artificiels, que présentait aux assaillants le terrain accidenté occupé par l'armée autrichienne. « Les républicains, s'écria-t-il, sont d'ex-« cellents soldats; mais s'ils me délogent d'ici, je consens à « me faire républicain moi-même. » Rien assurément de plus énergique, de plus significatif ne pouvait sortir de la bouche de Cobourg. Pour ma part, je ne saurais concevoir de plus glorieux bulletin de la bataille de Wattignies!

L'auteur allemand auquel j'emprunte cette anecdote ne dit pas si, après l'avoir délogé, les Français sommèrent le général autrichien de tenir sa parole. J'ai quelque raison de supposer que, malgré leur esprit de propagande, ils dédaignèrent une recrue qui, peut-être, se serait soumise, mais dont la vocation semblait bien incertaine.

Comptes rendus des opérations des armées.

Carnot sentit la convenance, le besoin, de montrer envers les armées nationales une déférence dont jadis les gouvernements absolus pouvaient se croire dispensés, lorsque leurs soldats étaient enrôlés à prix d'argent : chaque année, il devait dérouler à la face du pays le tableau détaillé des batailles livrées par nos légions et des résultats qu'elles avaient produits. Voici comment se terminait le récit de la campagne

de dix-sept mois, pendant laquelle les troupes de la République ne déposèrent pas les armes un seul instant :

27 victoires, dont huit en bataille rangée;
120 combats de moindre importance;
80,000 ennemis tués;
91,000 prisonniers;
116 places fortes ou villes importantes prises, dont trente-six après siége ou blocus;
230 forts ou redoutes emportés;
3,800 bouches à feu;
70,000 fusils;
1,900 milliers de poudre;
90 drapeaux.

Qu'on nous dise, si on l'ose, après avoir lu ce tableau, que la statistique n'est jamais éloquente!

Carnot, nommé par quatorze départements, entre au conseil des Anciens, puis au Directoire exécutif. — Envoi de Hoche en Vendée, de Moreau et Jourdan sur le Rhin, et de Bonaparte en Italie.

Carnot quitta le comité de salut public peu de temps avant l'insurrection des sections parisiennes contre la Convention. Reportez vos souvenirs vers les événements militaires qui suivirent la retraite légale, obligée de notre confrère; vous verrez, presque partout, la victoire abandonner les drapeaux de la République, les revers se succéder, comme précédem-

ment les triomphes; tous les ressorts se détendre, la défiance, le découragement, s'emparer des esprits; et vous comprendrez alors, mieux encore que par une série non interrompue d'éclatants succès, de quel poids peut être le génie d'un seul homme sur la destinée des nations.

Carnot fut appelé à la législature qui remplaça la Convention nationale, par *quatorze départements*. Si l'expression d'un sentiment personnel m'était permise ici, je dirais combien j'ai été heureux de trouver le nom du département des *Pyrénées-Orientales* dans la liste de ceux qui essayèrent de dédommager notre grand citoyen des outrages dont une poignée de représentants, excités par le boucher Legendre, l'abreuvèrent à plusieurs reprises. Peu de temps après son entrée au conseil des Anciens, Carnot, sur le refus de Sieyes, devint l'un des cinq membres du *Directoire exécutif*.

Au moment où, pour la seconde fois, Carnot fut ainsi appelé à diriger nos armées, la République se trouvait sur le bord d'un abîme. Le trésor public était vide. Le Directoire se procura à grand'peine des garçons de bureau et des domestiques, tant on le croyait insolvable. Il fallait souvent ajourner le départ d'un courrier extraordinaire, à cause de l'impossibilité de pourvoir aux frais de son voyage; les généraux eux-mêmes ne recevaient plus les *huit francs* (JE NE ME TROMPE PAS), les *huit francs en numéraire par mois* qui leur avaient été accordés comme supplément de la solde en assignats; les agriculteurs n'approvisionnaient plus les marchés; les manufacturiers refusaient de vendre leurs produits, parce qu'on aurait eu le droit de les payer en papier-monnaie, et que le papier-monnaie était alors sans valeur. D'une extrémité de la France à l'autre, la famine avait

jeté le peuple dans une irritation extrême qui, chaque jour, se manifestait par de sanglants désordres. L'armée n'offrait guère un aspect moins déplorable : elle manquait de moyens de transport, de vêtements, de souliers, de munitions. La misère avait engendré l'indiscipline. Pichegru nouait des trames criminelles avec le prince de Condé, se faisait battre à Heidelberg, compromettait l'armée de Jourdan, évacuait Manheim, levait le siége de Mayence et livrait la frontière du Rhin aux Autrichiens. La guerre se rallumait en Vendée; les Anglais nous menaçaient d'une descente dans les Pays-Bas et sur nos propres côtes; enfin, à la frontière des Alpes, Schérer et Kellermann soutenaient avec désavantage une guerre défensive contre les forces réunies de l'empereur d'Autriche, du roi de Sardaigne et des princes italiens confédérés.

Il fallut, Messieurs, une grande force d'âme unie au plus ardent patriotisme, pour accepter, en de si cruelles circonstances, le fardeau des affaires publiques. Ajoutons que Carnot s'aveuglait si peu sur les vices de la constitution de l'an III, et surtout sur les inconvénients d'un pouvoir exécutif multiple, qu'il les avait publiquement signalés au sein de la Convention à l'époque où cette constitution fut discutée. « Les destinées de l'État, s'écriait-il alors, ne dépendront « plus que du caractère personnel de cinq hommes. Plus ces « caractères différeront, plus les vues des cinq directeurs « seront dissemblables, et plus l'État aura à souffrir de leur « influence alternative. » La majorité dédaigna ces justes appréhensions; fidèle à une règle de conduite dont jamais on ne le vit se départir, Carnot se soumit sans murmure; et dès que le nouveau gouvernement eut reçu la sanction légale, il

le servit avec l'énergie, le zèle, le dévouement, qu'avait jadis déployés le membre du comité de salut public.

La Vendée était en feu; *Hoche* reçoit de Carnot, avec la mission de la pacifier, le plan d'un nouveau système d'opérations. Ce général républicain s'y conforme, triomphe de *Charette*, s'empare de *Stofflet*, et purge le Morbihan des bandes nombreuses de chouans qui le ravageaient. En moins de huit mois, la guerre civile, cette guerre impie où des deux côtés, cependant, on déployait tant de courage, cesse de désoler notre territoire.

Sur le *Rhin*, nos armées sont placées sous les commandements de Jourdan et de Moreau. Un plan de campagne savant, profond, coordonne les mouvements de ces deux généraux, et porte bientôt leurs troupes victorieuses au cœur de l'Allemagne.

En Vendée, en Allemagne, sur le Rhin, Carnot, comme on vient de le voir, avait investi de sa confiance des officiers déjà célèbres par de mémorables triomphes. Le commandement de l'armée d'Italie, il le donna, au contraire, à un général de vingt-cinq ans, dont les titres connus se réduisaient alors à quelques services secondaires rendus pendant le siége de Toulon, et à la facile défaite des sectionnaires parisiens, le 13 vendémiaire an III, sur les humbles champs de bataille du *Pont-Royal*, de la *rue Saint-Honoré* et du *perron de Saint-Roch*. Je revendique ici en faveur de Carnot l'honneur d'avoir personnellement désigné et choisi le jeune général Bonaparte pour le commandement de notre troisième armée, parce qu'il lui appartient légitimement; parce que ce choix fut longtemps considéré, à tort, comme le résultat d'une intrigue de boudoir, et que chacun, ce me semble, doit être heureux de voir

l'histoire de l'incomparable campagne d'Italie purifiée d'une telle souillure. J'ai pensé, enfin, que je ne devais pas négliger de vous montrer notre confrère apercevant, avec une perspicacité infinie, le héros de *Rivoli*, d'*Arcole*, de *Castiglione*, à travers l'écorce de timidité, de réserve, tranchons le mot, de mauvaise grâce, que tout le monde remarquait alors dans le protégé de *Barras*.

Je prévois tout ce que je rencontrerais d'incrédulité, si j'essayais d'étendre davantage les limites de l'influence que notre confrère exerça sur la campagne d'Italie; et, cependant, ne trouverais-je pas, même dans le petit nombre de pièces officielles actuellement connues du public, à la date du 10 floréal an IV, par exemple, une dépêche du quartier général de *Chérasco*, dans laquelle Bonaparte écrivait à Carnot : « La suspension d'armes conclue entre le roi de Sardaigne et « nous me permet de communiquer par Turin, c'est-à-dire « d'épargner la moitié de la route; *je pourrai donc recevoir* « *promptement* VOS ORDRES ET CONNAÎTRE VOS INTENTIONS POUR « LA DIRECTION A DONNER A L'ARMÉE. » Une lettre au ministre des finances, du 2 prairial an IV, datée du quartier général de *Milan*, m'offrirait ce passage : « Le Directoire exécutif, « qui m'a nommé au commandement de cette armée, A AR- « RÊTÉ UN PLAN DE GUERRE *offensif* qui exige des mesures « promptes et des ressources extraordinaires. »

Le 2 prairial an IV (21 mai 1796), Carnot écrivait au jeune général : « Attaquez *Beaulieu* avant que des renforts puis- « sent le rejoindre; ne négligez rien pour empêcher cette « réunion; il ne faut pas s'affaiblir devant lui, et, surtout, « ne pas lui donner, par un morcellement désastreux, les « moyens de nous battre en détail et de reprendre le terrain

« qu'il a perdu... Après la défaite de Beaulieu, vous ferez « l'expédition de Livourne... L'intention du Directoire est « que l'armée ne dépasse le Tyrol qu'après l'expédition du « sud de l'Italie. »

Sans doute, ces prescriptions générales ne sont pas la campagne d'Italie. Aucune intelligence humaine ne pouvait prévoir ni le chemin que suivrait le général Beaulieu après sa séparation de l'armée piémontaise, ni les manœuvres de Wurmser, ni la longue résistance de ce vieux général dans Mantoue, ni les marches d'Alvinzi, ni tant d'incidents glorieux que je m'abstiens de rappeler; sans doute il ne fallut rien moins que la hardiesse, que le génie de Bonaparte, que la coopération d'intrépides officiers, tels que *Masséna, Augereau, Lannes, Murat, Rampon,* pour anéantir, en quelques mois, trois grandes armées autrichiennes. Aussi, tout ce que j'ai voulu dire, c'est qu'il y aurait injustice à laisser le nom de Carnot complétement en dehors de ces immortelles campagnes.

J'aurai le droit de me montrer plus exigeant, si nous étudions une autre face de ces guerres : leur côté moral et civilisateur. Qui ne se rappelle ces traités de paix où les chefs d'œuvre de la peinture, de la sculpture, étaient pour les ennemis les moyens de se faire pardonner la perfidie et la trahison, et ces visites solennelles du général victorieux à des savants modestes, illustrés par d'importantes découvertes? Eh bien, Messieurs, tout cela, quoi qu'on en ait pu dire, était prescrit par Carnot. Des doutes seront-ils encore permis, si je transcris cette lettre de notre confrère, du 24 *prairial an IV:* « Général, en vous recommandant, « par notre lettre du 26 floréal, d'accueillir et de visi- « ter les artistes fameux des pays dans lesquels vous vous

« trouvez, nous vous avons désigné particulièrement le cé-
« lèbre astronome *Oriani*, de Milan, comme devant être
« protégé et honoré par les troupes républicaines. Le Di-
« rectoire apprendra avec satisfaction que vous avez rempli
« ses intentions à l'égard de ce savant distingué, et il vous
« invite, en conséquence, à lui rendre compte de ce que vous
« avez fait pour donner au citoyen Oriani des témoignages
« de l'intérêt et de l'estime que les Français ont toujours eus
« pour lui, et pour lui prouver qu'ils savent allier à l'amour
« de la gloire et de la liberté celui des arts et des talents. »

Publication de l'ouvrage intitulé : RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL.

Le mot de science, que la série des événements vient de placer sous ma plume, me rappelle que cette époque est celle de la publication d'un des ouvrages mathématiques de Carnot. Je sens tout ce qu'il y aura de fatigant pour vous à en écouter l'analyse ; mais il faut bien que, dans cette enceinte, le savant se montre aussi quelquefois. L'ouvrage précoce et si remarquable sur les machines, dont nous avons donné une idée, a fait assez connaître tout ce qu'on était en droit d'attendre de l'esprit ferme, lucide, pénétrant de Carnot. C'était donc un brillant avenir de gloire que le jeune officier apportait en sacrifice à la patrie, lorsque, obéissant à la voix de ses concitoyens, il échangeait la vie douce, tranquille du mathématicien, contre la carrière aventureuse et parsemée d'écueils du tribun. Ce sacrifice, au reste, il ne le fit pas sans regret ; car la géométrie fut toujours son délassement favori. Privé, par des devoirs impérieux de tous les jours, du plaisir

de se mesurer avec les grands problèmes dont la solution exige des années d'efforts continus et persévérants, Carnot choisit ces questions difficiles, mais circonscrites, qui peuvent être prises, abandonnées et reprises à bâtons rompus, qu'un esprit élevé et susceptible d'une forte contention développe et approfondit, sans papier, sans crayon, à la promenade, au milieu des agitations de la foule, pendant les gaietés d'un repas et les insomnies d'une nuit laborieuse : il dirigea enfin ses méditations vers la *métaphysique du calcul.* Aujourd'hui de telles recherches seraient, je le crains, peu goûtées; cependant, qu'on se reporte aux époques où les études mathématiques firent graduellement surgir tant de natures diverses de quantités, et l'on verra toutes les appréhensions qu'elles inspirèrent à des esprits rigides, et l'on reconnaîtra que, sur beaucoup de points, c'est l'habitude plutôt que la vraie science qui nous a rendus plus hardis.

Parmi les quantités que j'ai entendu désigner, les *irrationnelles* se présentèrent d'abord. Les anciens évitèrent de s'en servir avec un soin scrupuleux; les modernes eussent bien désiré aussi n'en point faire usage; *mais elles vainquirent par leur foule*, dit l'ingénieux auteur de la *Géométrie de l'infini.*

Aux quantités qui n'étaient pas numériquement assignables, succédèrent les quantités impossibles, les *quantités imaginaires*, véritables symboles dont on essayerait vainement de donner, je ne dis pas des valeurs exactes, mais encore de simples approximations. Ces imaginaires, on les combine néanmoins aujourd'hui sans scrupule, par addition, par soustraction; on les multiplie, on les divise les unes par les autres comme des quantités réelles; en fin de compte, les imagi-

naires disparaissent quelquefois au milieu des transformations qu'elles subissent, et le résultat est alors tenu pour tout aussi certain que si l'on y était arrivé sans le secours de ces hiéroglyphes de l'algèbre. Il faut l'avouer, mille et mille applications du calcul justifient cette confiance, et cependant peu de géomètres manquent de se prévaloir de l'absence d'imaginaires, dans les démonstrations où ils sont parvenus à les éviter.

L'*infini* fit irruption pour la première fois, dans la géométrie, le jour où *Archimède* détermina le rapport approché du diamètre à la circonférence par une assimilation du cercle à un polygone circonscrit *d'une infinité de côtés*. *Bonaventure Cavalieri* alla ensuite beaucoup plus loin; diverses considérations l'amenèrent à distinguer des *infiniment grands* de plusieurs ordres, des quantités *infinies*, qui cependant étaient *infiniment plus petites* que d'autres quantités. Doit-on s'étonner qu'en présence de ces résultats, et malgré sa vive prédilection pour des combinaisons qui l'avaient conduit à de véritables découvertes, l'ingénieux auteur italien se soit écrié dans le style de l'époque : *Voilà des difficultés dont les armes d'Achille elles-mêmes n'auront pas raison!*

Les *infiniment petits* s'étaient, eux, glissés dans la géométrie, même avant les *infiniment grands*, et non pas seulement pour faciliter, pour abréger telle ou telle démonstration, mais comme le résultat immédiat et nécessaire de certaines propriétés élémentaires des courbes.

Étudions, en effet, les propriétés de la plus simple de toutes, de la circonférence de cercle; et par là, nous n'entendrons pas cette courbe rugueuse, grossière, que nous parviendrions à tracer à l'aide de nos compas, de nos tire-lignes

les mieux affilés, mais bien la circonférence de cercle douée d'une perfection idéale, mais bien une courbe sans épaisseur, sans aspérités d'aucune nature. A cette courbe, menons par la pensée une tangente. Dans le point unique où la tangente et la courbe se toucheront, elles formeront un angle qu'on a appelé l'*angle de contingence*. Cet angle, dès l'origine des sciences mathématiques, a été l'objet des plus sérieuses réflexions des géomètres. Depuis deux mille ans, il est rigoureusement démontré qu'aucune ligne droite, partant du sommet de l'angle de contingence, ne saurait être comprise entre ses deux côtés, qu'elle ne saurait passer entre la courbe et la tangente. Eh bien! je le demande : l'angle dans lequel une ligne droite infiniment déliée ne pourrait pas s'introduire, ne pourrait pas s'insinuer, qu'est-ce autre chose, si ce n'est un infiniment petit?

L'angle de contingence infiniment petit, où aucune ligne droite ne saurait être intercalée, peut cependant comprendre entre ses deux côtés des milliards de circonférences de cercle, toutes plus grandes que la première. Cette vérité est établie sur des raisonnements d'une évidence incontestable et incontestée. Voilà donc, au cœur même de la géométrie élémentaire, un infiniment petit, et, ce qui est encore plus incompréhensible, un infiniment petit susceptible d'être fractionné tant qu'on veut! L'intelligence humaine était humiliée, abîmée devant de pareils résultats; mais enfin c'étaient des résultats, et elle se soumettait.

Les infiniment petits que *Leibnitz* introduisit dans son calcul différentiel excitèrent plus de scrupules. Ce grand géomètre en distinguait de plusieurs ordres : ceux du second étaient négligeables à côté des infiniment petits du pre-

mier; à leur tour, les infiniment petits du premier ordre disparaissaient devant les quantités finies. A chaque transformation des formules, on pouvait, d'après cette hiérarchie, se débarrasser de nouvelles quantités ; et cependant il fallait croire, il fallait admettre que les résultats définitifs avaient une exactitude rigoureuse; que le calcul infinitésimal n'était pas une simple méthode d'approximation. Telle fut, tout bien considéré, l'origine de l'opposition vive et tenace que le nouveau calcul souleva à sa naissance; telle était aussi la difficulté qu'un homme également célèbre comme géomètre et comme théologien, que l'évêque de Cloyne, *Berkeley*, avait en vue, lorsqu'il criait aux incrédules en matière de religion : « Voyez les mathématiques : n'ad-« mettent-elles pas des mystères plus incompréhensibles que « ceux de la foi? »

Ces mystères n'existent plus aujourd'hui pour ceux qui veulent s'initier à la connaissance des méthodes dont se compose le calcul différentiel dans la théorie des fluxions de *Newton*, dans un mémoire où d'*Alembert* met en usage la considération des limites vers lesquelles convergent les rapports des différences finies des fonctions, ou enfin dans la Théorie des fonctions analytiques de *Lagrange*. Toutefois, la marche leibnitzienne a prévalu, parce qu'elle est plus simple, plus facile à retenir, et qu'elle se prête beaucoup mieux aux applications. Il est donc important de l'étudier en elle-même, de pénétrer dans son essence, de s'assurer de la parfaite exactitude des règles qu'elle fournit, sans avoir besoin de les corroborer par les résultats du calcul fluxionnel, du calcul des limites ou de celui des fonctions. Cette tâche, je veux dire la recherche du véritable esprit de l'analyse diffé-

rentielle, forme le principal objet du livre que Carnot publia en 1799 sous le titre modeste de *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. J'ose affirmer que les auteurs, d'ailleurs si estimables, des meilleurs traités de calcul différentiel n'ont pas encore assez puisé dans l'ouvrage de notre confrère. Les avantages qui doivent résulter de l'introduction immédiate, dans les formules, de quantités infiniment petites ou élémentaires; les considérations à l'aide desquelles on peut prouver qu'en négligeant plus tard ces quantités, le calculateur n'en arrive pas moins à des résultats d'une exactitude mathématique, par l'effet de certaines compensations d'erreurs; enfin, pour le dire en deux mots, les traits fondamentaux et caractéristiques de la méthode leibnitzienne, Carnot les analyse avec une clarté, une sûreté de jugement et une finesse d'aperçus qu'on chercherait vainement ailleurs, quoique la question ait été l'objet des réflexions et des recherches des plus grands géomètres de l'Europe.

Carnot, fructidorisé, est obligé de prendre la fuite; il est rayé de la liste de l'Institut, et remplacé par le général Bonaparte.

La France s'est toujours montrée idolâtre de la gloire militaire. Satisfaites largement cette passion dans une guerre nationale, et soyez sans inquiétude sur l'administration intérieure, quelque inhabile qu'elle soit. Les sympathies du peuple, et au besoin sa résignation, sont acquises à tout gouvernement qui chaque mois pourra se parer d'une nouvelle victoire sur ses ennemis extérieurs. Je n'aperçois dans nos annales qu'une seule exception à cette règle; encore

faudra-t-il que, par une assimilation si souvent trompeuse, les représentants légaux du pays soient considérés comme les interprètes fidèles des vœux, des sentiments, des opinions de la majorité. L'exception dont je veux parler, c'est le gouvernement directorial qui me la fournira.

Lorsque les élections de l'an V apportèrent un nombreux renfort de royalistes aux deux minorités du conseil des Cinq Cents et du conseil des Anciens, qui jusque-là s'étaient bornées à faire au Directoire une opposition très-modérée ; lorsque, forte de ce qu'elle pensait être l'appui populaire, la minorité, se croyant devenue majorité, levait le masque jusqu'à nommer à la présidence du conseil des Cinq Cents ce même Pichegru qui, naguère, flétrissait par la trahison les lauriers qu'il avait cueillis en Hollande au nom de la République; lorsque les ennemis du pouvoir directorial dévoilaient ouvertement leurs projets dans les salons du célèbre club de Clichy; lorsque, aux récriminations, aux accusations réciproques, parvenues au dernier terme de l'exaltation, succédaient déjà des voies de fait contre les patriotes et les acquéreurs de biens nationaux, nos troupes étaient partout triomphantes. L'armée de Rhin-et-Moselle sous les ordres de Moreau, l'armée de Sambre-et-Meuse commandée par Jourdan, venaient de traverser glorieusement le Rhin ; elles marchaient au cœur de l'Allemagne, l'armée d'Italie était à vingt lieues de Vienne; Bonaparte signait à Léoben les préliminaires d'un traité de paix vivement attendu. Il pouvait, sans compromettre les négociations, se montrer difficile même sur de simples questions d'étiquette; il pouvait *refuser* NET de mettre dans les protocoles le nom de l'empereur d'Allemagne avant celui de la

République française; il pouvait aussi, quand le général Meerweld et le marquis de Gallo lui parlaient de reconnaissance, répliquer, sans forfanterie, par ces mémorables paroles : « La République française ne veut pas être reconnue; « elle est en Europe ce qu'est le soleil sur l'horizon; tant « pis pour qui ne veut pas la voir et en profiter. » Est-il donc étonnant, je vous le demande, Messieurs, que, dans une position si favorable de nos affaires extérieures, Carnot crût à la possibilité d'une conciliation entre les partis politiques qui se partageaient le pays; qu'il refusât, j'emploie à dessein ses propres paroles, de conjurer le danger en sortant des limites de la constitution; qu'il repoussât loin de lui toute pensée de coup d'État, moyen assurément très-commode de sortir d'embarras, mais moyen dangereux, et qui presque toujours finit par devenir funeste à ceux-là mêmes qui l'ont employé à leur profit.

J'aurais vivement désiré, Messieurs, pouvoir pénétrer plus avant dans l'examen du rôle que joua Carnot à cette époque critique de notre révolution; je n'ai rien négligé pour soulever quelque coin du voile dont reste encore couvert un événement qui exerça tant d'influence sur la destinée de notre confrère et sur celle du pays : mes efforts, je l'avoue, ont été infructueux. Les documents ne manquent pas, mais ils émanent presque tous d'écrivains trop intéressés, soit à excuser, soit à flétrir le 18 fructidor, pour n'être pas suspects. Les récriminations pleines d'âcreté, de violence, auxquelles d'anciens collègues se livrèrent alors les uns contre les autres, m'ont rappelé cette célèbre et si sage déclaration de Montesquieu : « N'écoutez ni le *père Tournemine*, ni moi, parlant « l'un de l'autre; car nous avons cessé d'être amis. » Les

antécédents, les opinions, le caractère, les démarches connues et avouées des divers personnages qui firent ce coup d'État ou en devinrent les victimes, n'auraient guère été un guide plus fidèle. J'aurais vu Hoche marcher, un moment, contre son protecteur constant et zélé; contre celui qui lui avait sauvé la vie sous le régime de Robespierre, et qui transformait, en 1793, les galons du jeune sergent d'infanterie en épaulettes de général en chef; j'eusse trouvé Bonaparte contribuant, par son délégué Augereau, au renversement et à la proscription du seul directeur avec lequel il eût conservé des relations intimes pendant la campagne d'Italie; je l'aurais vu, à son passage à Genève, faire arrêter le banquier Bontems, sous le prétexte qu'il avait favorisé l'évasion de ce même Carnot à qui, quelques mois auparavant, lui, Bonaparte, écrivait de *Plaisance* (20 floréal, an IV), de *Milan* (le 20 prairial de la même année), de *Vérone* (le 9 pluviôse, an V) : « Je vous dois des remercîments particuliers pour les « attentions que vous voulez bien avoir pour ma femme; je « vous la recommande; elle est patriote sincère, et je l'aime « à la folie..... — Je mériterai votre estime; je vous prie de « me conserver votre amitié. — .... La récompense la plus « douce des fatigues, des dangers, des chances de ce métier-ci, « se trouve dans l'approbation du petit nombre d'hommes « qu'on apprécie. — .... J'ai toujours eu à me louer des mar- « ques d'amitié que vous m'avez données, à moi et aux « miens, et je vous en conserverai toujours une vraie recon- « naissance..... L'estime d'un petit nombre de personnes « comme vous, celle de mes camarades, du soldat,.... m'in- « téressent vivement. »

Des deux républicains sincères que renfermait le Direc-

toire exécutif, j'en aurais rencontré un parmi les fructidorisants, l'autre parmi les fructidorisés ; le satrape Barras, de qui on avait pu dire, sans exciter de réclamation, qu'il était toujours vendu et toujours à vendre, se serait offert à moi comme l'ami, comme l'allié, ou du moins, comme le confident intime de l'austère, du probe La Réveillère ; j'aurais vu ce même Barras qui depuis, qui déjà peut-être à cette époque, correspondait directement avec le comte de Provence, entouré d'une cohue de séides, dont aucun, pour le dire en passant, ne refusa plus tard la livrée impériale, renverser sous d'incessantes accusations de royalisme le seul homme de nos assemblées qui, toujours fidèle à ses convictions, combattit pied à pied l'insatiable ambition de Bonaparte.

Cherchant ensuite dans les faits, mais uniquement dans les faits, si la majorité des conseils était réellement factieuse ; si la contre-révolution ne pouvait se conjurer que par un coup d'État ; si le 18 fructidor, enfin, était inévitable, j'aurais trouvé, et cela malgré les concessions mutuelles que se firent sans doute les proscripteurs, comme au temps d'*Octave*, de *Lépide*, d'*Antoine ;* j'aurais trouvé une élimination ou, si l'on veut, une épuration de quarante et un membres seulement dans le conseil des Cinq Cents, et de onze dans le conseil des Anciens.

Le fil qui pourrait guider sûrement l'historien dans ce labyrinthe de faits contradictoires, je le répète, je ne l'ai point trouvé. Les mémoires arrachés à la famille de Barras par ordre de Louis XVIII ; les mémoires que La Réveillère a laissés, et dont il est si désirable que le public ne soit pas plus longtemps privé ; les confidences que d'un autre côté on est en

droit d'attendre de la part de quelques-unes des victimes du coup d'État directorial, dissiperont peut-être tous les nuages. Dieu veuille, pour l'honneur du pays, qu'en fin de compte la mutilation violente et illégale de la représentation nationale n'apparaisse pas comme le résultat exclusif de haines, d'antipathies personnelles excitées ou du moins entretenues en grande partie par les intrigues de plusieurs femmes célèbres. Au reste, les investigations des historiens à venir, quelque étendues, quelque complètes qu'elles puissent être, ne jetteront aucun louche sur la parfaite loyauté de notre confrère. Déjà il ne reste plus de vestiges des accusations articulées dans le rapport officiel présenté en l'an VI au conseil des Cinq Cents : en quelques pages, Carnot les réduisit au néant. Tout ce que la malveillance ou la simple préoccupation osent emprunter aujourd'hui au pamphlet si artificieusement élaboré de Bailleul, se réduit à un reproche banal grossièrement exprimé, et dont j'aurais dédaigné de faire mention si Carnot n'avait indiqué lui-même à quelles conditions il l'acceptait.

Les roués politiques qualifient de *niais* tous ceux qui dédaigneraient des succès achetés aux dépens de la bonne foi, de la loyauté, de la morale ; mais, il ne faut pas s'y méprendre, *niais* est l'épithète polie ; *stupide* est celle qu'on préfère alors qu'on ne se croit pas tenu à des ménagements et au langage de la bonne compagnie. Cette épithète, dédaigneusement jetée dans le rapport officiel de Bailleul, avait cruellement blessé Carnot ; elle est ironiquement reproduite presque à chaque page de la réponse de notre confrère. Oui, dit-il quelque part, le *stupide Aristide* est chassé de son pays ; le *stupide Socrate* boit la ciguë ; le *stupide Caton* est réduit à

se donner la mort; le *stupide Cicéron* est assassiné par l'ordre des triumvirs; oui! le *stupide Phocion* aussi est conduit au supplice, mais glorieux de subir le sort réservé de tout temps à ceux qui servent bien leur pays.

Carnot s'échappa du Luxembourg à l'instant même où des sbires entraient dans sa chambre pour l'arrêter. Une famille d'artisans bourguignons le recueillit et le cacha. Ceux dont la vie est une série non interrompue de privations savent toujours compatir au malheur. Notre confrère se réfugia ensuite chez M. Oudot, grand partisan du coup d'État du 18 fructidor, et où, dès lors, personne ne se serait avisé de chercher le directeur proscrit. Carnot n'avait pas encore quitté Paris lorsqu'on le raya de la liste des membres de cet Institut national à la création duquel il avait tant contribué.

Des lois rendues les 19 et 20 fructidor an V déclaraient vacantes toutes les places occupées par les citoyens que le coup d'État du 18 avait frappés. Le ministre de l'intérieur, Letourneux, écrivit donc à l'Institut pour lui enjoindre de procéder au remplacement de Carnot. Les trois classes concouraient alors à la nomination des membres de chacune d'elles. *Cent quatre* votants prirent part au scrutin; l'urne ne reçut aucun billet blanc!

Je sais, Messieurs, à quel point, en temps de révolution, les esprits les plus droits, les plus fermes, subissent l'influence de l'opinion publique; je sais qu'à la distance qui nous sépare du 18 fructidor, personne ne peut se croire le droit de jeter le moindre blâme sur la condescendance que montra l'Institut pour les ordres ministériels: toutefois, j'exprimerai ici franchement le regret que d'impérieuses circonstances n'aient pas permis à nos honorables devanciers de

tracer, dès l'ère fructidorienne, une ligne de démarcation tranchée entre l'homme politique et l'homme d'étude. Sous la régence, dans l'affaire de l'abbé de Saint-Pierre, *Fontenelle* avait déjà, par une boule courageuse, protesté contre cette prétention de tous les pouvoirs, de confondre ce que l'intérêt des sciences, des lettres, des arts, commande de tenir éternellement séparé. Si en l'an V de la République *cinquante-trois* votants avaient eu la hardiesse d'imiter *Fontenelle,* l'Institut n'eût pas subi, sous la Restauration, des mutilations cruelles; privés de l'appui que leur donnaient de fâcheux précédents, plusieurs ministres n'auraient certainement pas eu l'inqualifiable pensée de créer à Paris une Académie des sciences sans *Monge,* une Académie des beaux-arts sans *David!*

Vous êtes étonnés, sans doute, que je n'aie pas encore fait connaître le nom du personnage qui succéda à Carnot dans la première classe de l'Institut; eh! Messieurs, c'est que j'ai reculé, tant que je l'ai pu, devant un devoir pénible. Quand il procédait au remplacement d'un de ses fondateurs, d'un de ses membres les plus illustres, l'Institut obéissait, du moins, à une loi formelle rendue par les pouvoirs de l'État; mais est-il, je vous le demande, aucune considération au monde qui doive faire accepter la dépouille académique d'un savant victime de la rage des partis, et cela surtout lorsqu'on se nomme le *général Bonaparte?* Comme vous tous, Messieurs, je me suis souvent abandonné à un juste sentiment d'orgueil en voyant les admirables proclamations de l'armée d'Orient signées : LE MEMBRE DE L'INSTITUT, *général en chef;* mais un serrement de cœur suivait ce premier mouvement, lorsqu'il me revenait à la pensée que *le membre de*

l'Institut se parait d'un titre qui avait été enlevé à son premier protecteur et à son ami.

Je n'ai jamais cru, Messieurs, qu'il fût utile de créer, aux dépens de la vérité, des êtres d'une perfection idéale; et voilà pourquoi, malgré quelques bienveillants conseils, j'ai persisté à divulguer ce que vous venez d'entendre sur la nomination du général Bonaparte à l'Institut. Au reste, dans votre bouche, me disait un *napoléoniste quand même*, l'anecdote est sans gravité : tout le monde ne sait-il pas que les astronomes cherchent des taches dans le soleil! Ainsi, Messieurs, ma position m'aura donné le privilége de dire la vérité sans blesser personne, ce qui, par parenthèse, est infiniment rare!

Je regrette de n'avoir pu découvrir le nom du généreux citoyen qui arracha Carnot à sa retraite et le conduisit heureusement dans sa chaise de poste jusqu'à Genève.

Arrivé dans cette ville, Carnot se logea chez un blanchisseur, sous le nom de Jacob. La prudence lui commandait une retraite absolue; le désir d'avoir des nouvelles certaines de sa chère patrie l'emporta ; il sortit, fut reconnu dans la rue par des espions du Directoire qui s'attachèrent à ses pas, découvrirent sa demeure, et la firent immédiatement surveiller. Des agents français, accrédités auprès de la république de Genève, poussèrent hautement le cri d'extradition, et portèrent même officiellement cette demande au gouvernement génevois. Le magistrat aux mains duquel tomba d'abord la pièce diplomatique était, heureusement, un homme de cœur et de conscience, qui sentit toute l'étendue de la flétrissure qu'on voulait infliger à son pays. Ce magistrat s'appelait M. Didier. A cette place, Messieurs, ce serait un crime de ne

pas citer un nom honorablement connu dans les lettres, quand il se rattache à une belle action. M. Didier écrivit à Carnot ; il l'avertissait du danger qu'il courait, le suppliait de quitter sur-le-champ sa demeure, et lui indiquait le point du lac où l'attendait un batelier, qui le transporterait à Nyon. Il était déjà bien tard ; les sbires du Directoire guettaient leur proie. Notre confrère va droit à son hôte, et sans autre préambule, lui demande excuse de s'être introduit dans sa maison sous un nom supposé. « Je suis, ajoute-t-il, un proscrit, je suis Carnot ; on va m'arrêter ; mon sort est dans vos mains : voulez-vous me sauver ? Sans aucun doute, » répond l'honnête blanchisseur ; aussitôt il affuble Carnot d'une blouse, d'un bonnet de coton, d'une hotte ; il dépose sur sa tête un large paquet de linge sale qui, en fléchissant, tombe jusqu'aux épaules du prétendu Jacob, et couvre sa figure. C'est à la faveur d'un pareil déguisement que l'homme à qui naguère il suffisait de quelques lignes pour ébranler ou arrêter dans leur marche des armées commandées par les *Marceau*, les *Hoche*, les *Moreau*, les *Bonaparte ;* pour répandre l'espérance ou la crainte à *Naples*, à *Rome*, à *Vienne ;* c'est, triste retour des choses d'ici-bas, c'est comme garçon de service d'une buanderie qu'il gagne, sain et sauf, le petit batelet qui doit le faire échapper à la déportation. Sur le batelet, une nouvelle et bien étrange émotion attendait Carnot. Dans le batelier apposté par M. Didier, il reconnaît ce même Pichegru dont les coupables intrigues avaient rendu le 18 fructidor peut-être inévitable. Pendant toute la traversée du lac, pas une seule parole ne fut échangée entre les deux proscrits. Le temps, le lieu, les circonstances semblaient en effet peu propres à des débats politiques, à

des récriminations! Carnot, au reste, eut bientôt à se féliciter de sa réserve : à Nyon, la lecture des journaux français lui apprit qu'il avait été trompé par une ressemblance fortuite; que son compagnon de voyage, loin d'être un général, n'avait jamais fait manœuvrer que sa frêle embarcation, et que Pichegru, arrêté par Augereau, attendait la déportation dans une des prisons de Paris. Carnot était encore à Nyon lorsque Bonaparte venant d'Italie traversa cette petite ville en se rendant à Rastadt. Comme tous les autres habitants, il illumina ses fenêtres pour rendre hommage au général.

Si le cadre que je me suis tracé m'amenait plus tard à parler de la rare et sincère modestie de Carnot, on ne m'opposerait pas, j'espère, la petite illumination de Nyon. Quand il plaçait deux chandelles sur sa fenêtre, en l'honneur de victoires auxquelles il avait concouru par ses ordres, ou, du moins, par ses conseils, Carnot proscrit, Carnot sous le coup d'une menace d'extradition et d'un exil dans les déserts de la Guyane, devait assurément être agité de sentiments bien divers ; mais il n'est nullement présumable que l'orgueil figurât dans le nombre.

18 *brumaire.— Rentrée de Carnot en France.— Sa nomination au ministère de la guerre. — Sa démission. — Son passage au Tribunat.*

Depuis plus de deux ans Carnot avait disparu de la scène politique; depuis plus de deux ans il vivait à *Augsbourg* sous un nom supposé, exclusivement occupé de la culture des sciences et des lettres, lorsque le général Bonaparte revint d'Égypte, et renversa d'un souffle, le 18 brumaire,

un gouvernement qui n'avait pas su prendre racine dans le pays. Un de ses premiers actes fut le rappel de l'illustre exilé, et sa nomination au ministère de la guerre. L'ennemi était alors à nos portes. Carnot n'hésita pas à accepter; mais peu de mois après, quand les immortelles victoires de *Marengo* et d'*Hohenlinden* eurent donné à nos armes une supériorité incontestable, lorsque l'indépendance du pays fut de nouveau assurée, Carnot se démit de ses fonctions. Il ne voulut pas consentir à paraître complice des changements qui se préparaient dans la forme du gouvernement. « Citoyens consuls, écrivait-il le 16 vendémiaire an IX, je « vous donne de nouveau ma démission; veuillez bien ne pas « différer à l'accepter. »

Ce n'est pas avec cette sécheresse qu'on se sépare pour un léger dissentiment. La lettre que je viens de lire était le corollaire des vifs combats que la République et l'Empire se livraient déjà chaque jour dans les personnes du *premier consul* et du *ministre de la guerre.*

Rappelé aux affaires publiques, comme tribun, en 1802, Carnot s'oppose à la création de la Légion d'honneur. Il croit, j'allais dire il devine qu'une distinction décernée sans enquête, par la volonté non contrôlée d'une seule personne, finira, malgré son titre fastueux, et d'après le cours naturel des choses de ce monde, par ne plus être qu'un moyen de se faire des créatures, et de réduire au silence une fourmilière de petites vanités. Carnot s'élève aussi de toutes ses forces contre l'érection du consulat à vie; mais c'est surtout au moment où l'on propose de porter Bonaparte au trône impérial qu'il redouble d'ardeur et d'énergie. L'histoire a déjà recueilli ses nobles paroles; elle dira

aussi qu'entouré de vieux jacobins, qu'entouré de ceux-là mêmes qui, au 18 fructidor, l'avaient poursuivi comme royaliste, Carnot reste presque *seul* debout au milieu de la défection générale, ne fût-ce que pour montrer au monde que la conscience politique n'est pas un vain nom.

Le Tribunat fut bientôt supprimé. Carnot rentra dans la vie privée ; je ne dis pas, avec joie, Messieurs, car chez notre confrère les vertus du citoyen occupèrent toujours la première place ; car il avait espéré que, nouveau *Washington*, le général Bonaparte mettrait à profit une occasion unique de fonder, en France, l'ordre et la liberté sur des bases inébranlables ; car tout homme initié aux affaires publiques et doué de quelque prévoyance ne voyait pas sans inquiétude les rênes de l'État placées sans contrôle et sans garantie aux mains d'un soldat ambitieux. Je pourrai, du moins, vous montrer que les loisirs de Carnot furent noblement, glorieusement employés.

Publication de la Géométrie de position.

On rapporte qu'un jeune étudiant, presque découragé par quelques difficultés inhérentes aux premiers éléments des mathématiques, alla consulter d'Alembert, et que ce grand géomètre lui répondit : *Marchez, Monsieur, marchez, et la foi vous viendra !*

Le conseil était bon, et les géomètres en masse l'ont suivi ; ils *marchent*, eux aussi, ils perfectionnent les méthodes, ils en multiplient les applications sans se préoccuper de deux ou trois points où la métaphysique de la science offre des obscurités. Est-ce à dire pour cela qu'on doive à jamais re-

noncer à remplir ces lacunes? Tel n'était pas l'avis de Carnot. Nous l'avons déjà vu consacrant les courts moments de repos que lui laissaient ses fonctions directoriales à la métaphysique du calcul infinitésimal; la suppression du Tribunat lui permettra de soumettre à des investigations pareilles une question non moins ardue, la question des quantités négatives.

Il arrive souvent qu'après avoir mis un problème en équation, l'analyse vous offre, parmi les solutions cherchées, des nombres négatifs; par exemple : *moins* 10; *moins* 50; *moins* 100; ces solutions, les anciens analystes ne savaient de quelle manière les interpréter. Viète lui-même les négligeait comme absolument inutiles, comme insignifiantes. Peu à peu on s'habitua à voir, dans les nombres négatifs, des quantités plus petites que zéro. *Newton* et *Euler* ne les définissaient pas autrement (*Arithmétique universelle* et *Introduction à l'analyse infinitésimale*). Cette notion s'est aujourd'hui introduite dans la langue vulgaire : le plus petit marchand comprend à merveille la position d'un correspondant qui lui annonce des bénéfices négatifs. La poésie a donné aussi sa sanction à la même pensée, témoin ces deux vers par lesquels Chénier stigmatisait ses ennemis politiques, les rédacteurs du *Mercure de France :*

> Qu'ont fait ces nains lettrés qui, sans littérature,
> *Au-dessous du néant*, soutiennent le *Mercure*.

Eh bien! Messieurs, c'est une notion placée ainsi sous l'autorité des plus grands géomètres des temps modernes; c'est une notion consacrée par l'assentiment de qui a, comme on

dit, plus d'esprit que Voltaire, que Rousseau, que Bonaparte, par l'assentiment de la généralité du public, que Carnot a combattue avec les armes acérées de la logique.

Rien assurément de plus simple que la notion d'une quantité négative quand cette quantité est accolée à une quantité positive plus grande qu'elle; mais une quantité négative détachée, mais une quantité négative prise isolément, doit-elle être réellement considérée comme au-dessous de zéro, et à plus forte raison comme inférieure à une quantité positive? Carnot, d'accord en ce point avec d'Alembert, celui des grands mathématiciens du dernier siècle qui s'est le plus occupé de la philosophie de la science, soutient que les quantités négatives isolées figurent dans des opérations avouées de tout le monde, et où, cependant, il ne serait pas possible de les supposer au-dessous de zéro. Malgré l'aridité de pareils détails, je citerai une de ces opérations. Personne ne nie que:

$$+ 10 \text{ ne soit à } - 10 \text{ comme } - 10 \text{ est à } + 10.$$

Pour que quatre nombres forment une proportion, il faut et il suffit, en effet, que, si ces quatre nombres sont convenablement rangés par ordre, le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens. Il n'y a pas lieu à s'effaroucher, Messieurs; ce que j'invoque ici n'est autre chose que le principe de la fameuse *règle de trois* des maîtres d'écriture et d'arithmétique; c'est le principe du calcul qui s'exécute quelques centaines de mille fois par jour dans les boutiques de la capitale. Or, dans la proportion que je viens de citer, le produit des extrêmes est $+ 100$ comme le produit des moyens; ainsi $+ 10 : - 10 :: - 10 : + 10$. Cependant si $+ 10$, premier

terme de la proportion, surpasse le second terme — 10, il est impossible de supposer en même temps que — 10, premier terme du second rapport, surpasse + 10, second terme de ce même second rapport; — 10 ne saurait, à la fois, être inférieur et supérieur à + 10.

Tel est en substance un des principaux arguments sur lesquels notre confrère se fonde pour soutenir que la notion de grandeur absolue ou comparative ne doit pas plus être appliquée aux quantités négatives qu'aux imaginaires; qu'il n'y a pas lieu à examiner si elles sont plus grandes ou plus petites que zéro; qu'il faut les considérer *comme des êtres de raison, comme de simples formes algébriques.*

Lorsque le génie de Descartes eut montré que les positions de toutes les courbes possibles, que leurs formes, que l'ensemble de leurs propriétés peuvent être implicitement renfermées dans des équations analytiques, la question des quantités négatives se présenta sous un jour entièrement nouveau. L'illustre philosophe établit lui-même en principe qu'en géométrie ces quantités ne diffèrent des quantités positives que par la direction des lignes sur lesquelles on doit les compter. Cette vue profonde et simple est malheureusement sujette à des exceptions. Supposons, par exemple, que d'un point pris hors d'un cercle on se propose de mener une droite tellement située que la portion comprise dans ce cercle ait une longueur donnée. Si l'on prend pour inconnue la distance du point d'où la droite doit partir au point de la circonférence qu'elle rencontrera d'abord, le calcul donne deux valeurs: l'une, *positive*, correspond au premier point d'intersection de la droite cherchée et du cercle; l'autre, *négative*, détermine la place de la seconde intersection. Or,

qui ne voit que ces deux longueurs, l'une positive, l'autre négative, doivent cependant être portées du même côté du point de départ de la droite?

Carnot s'est proposé de faire disparaître ces exceptions. Les solutions négatives isolées, il ne les admet pas plus en géométrie qu'en algèbre. Pour lui ces solutions, abstraction faite de leurs signes, sont les différences de deux autres quantités absolues; celle de ces quantités qui était la plus grande dans le cas sur lequel on a établi le raisonnement, se trouve seulement la plus petite lorsque la racine négative apparaît. En géométrie comme en algèbre, la racine négative, prise avec le signe + est donc la solution d'une question différente de celle qu'on a mise, ou du moins de celle qu'on a exclusivement voulu mettre en équation. Comment arrive-t-il maintenant que des problèmes étrangers se mêlent au problème unique que le géomètre voulait résoudre; que l'analyse réponde avec une déplorable fécondité à des questions qu'on ne lui a pas faites; que si on lui demande, par exemple, de déterminer parmi toutes les ellipses qu'on peut faire passer par quatre points donnés celle dont la surface est un maximum, elle donne trois solutions, quand évidemment il n'y en a qu'une de bonne, d'admissible, d'applicable; qu'à l'insu du calculateur, et contre son gré, elle groupe ainsi, dans ce cas, un problème relatif à la surface limitée de l'ellipse, avec un problème concernant l'hyperbole, courbe à branches indéfinies et dès lors nécessairement, à une surface indéfinie? Voilà ce qui avait besoin d'être éclairci, voilà ce dont la théorie de la *corrélation des figures* et la *Géométrie de position* que Carnot a rattachées à ses vues sur les quantités négatives, donnent *le plus ordinairement* des solutions faciles.

Depuis les travaux de notre confrère, chacun applique ainsi sans scrupule la formule établie sur un état particulier de telle ou telle courbe, à toutes les formes différentes que cette courbe peut prendre. Ceux qui liront les ouvrages des anciens mathématiciens, la collection de Pappus, par exemple; ceux qui verront même, dans le siècle dernier, deux géomètres célèbres, Simson et Stewart, donner autant de démonstrations d'une proposition que la figure à laquelle elle se rapportait pouvait prendre de positions ou de formes différentes par le déplacement de ses parties; ceux-là, dis-je, porteront très-haut le service que Carnot a rendu à la géométrie. Je voudrais pouvoir dire avec la même vérité que les vues de notre confrère se sont plus ou moins infiltrées dans cette multitude de traités élémentaires que chaque année voit paraître, qu'elles ont contribué à perfectionner l'enseignement; mais, sur ce point, je n'ai guère à exprimer que des regrets. Aujourd'hui la partie philosophique de la science est très-négligée; les moyens de briller dans un examen ou dans un concours marchent en première ligne; sauf quelques rares exceptions, les professeurs songent beaucoup plus à familiariser les élèves avec le mécanisme du calcul qu'à leur en faire sonder les principes. Je ne sais, en vérité, si on ne pourrait pas dire, de certaines personnes, qu'elles emploient l'analyse comme la plupart des manufacturiers se servent de la machine à vapeur, sans se douter de son mode d'action. Et qu'on ne prétende pas que cet enseignement vicieux soit un sacrifice obligé à la passion dominante de notre époque, à la rage d'aller vite en toutes choses. Des membres illustres de cette Académie n'ont-ils pas montré, dans des ouvrages de géométrie et de statique devenus jus-

tement célèbres, que la plus extrême rigueur n'exclut pas la concision ?

La *Géométrie de position* de Carnot n'aurait pas, sous le rapport de la métaphysique de la science, le haut mérite que je lui ai attribué, qu'elle n'en serait pas moins l'origine et la base des progrès que la géométrie, cultivée à la manière des anciens, a faits depuis trente ans en France et en Allemagne. Les nombreuses propriétés de l'espace que notre confrère a découvertes montrent, à tous les yeux, la puissance et la fécondité des méthodes nouvelles dont il a doté la science. Qu'on me permette de justifier par quelques citations l'opinion favorable que je me suis formée des méthodes d'investigation trouvées par Carnot.

« Si d'un point donné on imagine trois plans perpendicu-
« laires entre eux qui coupent une sphère, la somme des sur-
« faces des trois cercles formant les intersections sera toujours
« la même, quelques directions qu'on donne à ces plans,
« pourvu qu'ils ne cessent pas de couper tous les trois la
« sphère. »

— « Dans tout trapèze, la somme des carrés des diagona-
« les est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles,
« plus deux fois le produit des côtés parallèles. »

— « Dans tout quadrilatère plan ou gauche, la somme des
« carrés des deux diagonales est double de la somme des
« carrés des deux droites qui joignent les points milieux des
« côtés opposés. »

J'aurai atteint mon but si ces citations, que je pourrais multiplier à l'infini, inspirent aux professeurs de mathématiques le désir de voir, par eux-mêmes, dans la *Géométrie de position* de Carnot, comment tous ces théorèmes curieux

découlent avec facilité des méthodes de notre illustre confrère.

Carnot inventeur d'un nouveau système de fortifications.

Il y aurait dans cette biographie une lacune qui deviendrait l'objet de vos justes critiques si, malgré tant de points de vue différents sous lesquels j'ai déjà envisagé l'imposante figure de Carnot, je négligeais de vous parler de l'ingénieur militaire, de l'inventeur d'un nouveau système de fortifications.

Vous vous rappelez sans doute les vifs débats que Carnot eut à soutenir, dès son entrée dans la carrière militaire, avec les chefs de l'arme à laquelle il appartenait. Un caractère droit et inflexible lui faisait déjà repousser le joug pesant de l'esprit de corps. L'âge mûr ne démentit pas un si honorable début. Carnot trouva aussi dans sa raison élevée le secret de se soustraire aux préoccupations, quelquefois passablement burlesques, des hommes trop exclusivement livrés à une spécialité. Les officiers du génie eux-mêmes n'ont pas toujours échappé à de semblables travers. Eux aussi poussent quelquefois jusqu'à l'exagération les conséquences d'un excellent principe. On en a vu, je suis du moins certain de l'avoir entendu dire, on en a vu qui ne parcourent pas une vallée, qui ne gravissent pas une colline, qui ne franchissent pas un pli de terrain, sans former le projet d'y établir une grande fortification, un château crénelé, ou une simple redoute. La pensée qu'avec la facilité actuelle des communications, chaque point du territoire peut devenir un champ de bataille les obsède sans cesse; c'est pour cela qu'ils s'opposent à l'ouverture des routes, à la construction des ponts,

au défrichement des bois, au desséchement des marais. Les places de guerre ne leur paraissent jamais complètes; chaque année, ils ajoutent de nouvelles et dispendieuses constructions à celles que les siècles y avaient déjà entassées; l'ennemi aurait, sans aucun doute, beaucoup à faire pour franchir tous les fossés, tous les défilés étroits et sinueux, toutes les portes crénelées, tous les ponts-levis, toutes les palissades, toutes les écluses destinées aux manœuvres d'eau, tous les remparts, toutes les demi-lunes que réunissent les fortéresses modernes; mais en attendant un ennemi qui ne se présentera peut-être jamais, les habitants d'une cinquantaine de grandes villes sont privés, de génération en génération, de certains agréments, de certaines commodités qui rendent la vie douce et dont on jouit librement dans le plus obscur village.

Au reste, ce n'est pas de ma bouche que sortiront jamais de rudes paroles de blâme contre des préoccupations, si même préoccupations il y a, qui seraient inspirées par le plus noble des sentiments, par l'amour de l'indépendance nationale; en toutes choses cependant il faut une certaine mesure; l'économie poussée à l'extrême, n'est-ce pas la hideuse avarice? La fierté ne dégénère-t-elle point en orgueil; la politesse en afféterie; la franchise en rudesse? C'est en pesant dans une balance exacte le bien et le mal attachés à toutes les créations humaines qu'on se maintient dans la route de la vraie sagesse; c'est ainsi que malgré l'empire de l'exemple et de l'habitude, que malgré l'influence, ordinairement si puissante de l'uniforme, l'officier du génie Carnot étudia toujours les graves problèmes de fortification.

En 1788, des militaires français, enthousiastes jusqu'au dé-

lire des campagnes du grand Frédéric, proclament hautement la parfaite inutilité des places fortes. Le gouvernement paraît souscrire à cette étrange opinion; il n'ordonne pas encore la démolition de tant d'antiques et glorieuses murailles, mais il les laisse tomber d'elles-mêmes. Carnot résiste à l'entraînement général, et fait remettre à M. de Brienne, ministre de la guerre, un mémoire où la question est examinée sous toutes ses faces avec une hardiesse de pensée, avec une ardeur de patriotisme, d'autant plus dignes de remarque que les exemples en étaient alors devenus fort rares. Il montre que dans une guerre défensive, la seule qu'il conseille, la seule qu'il croie légitime, nos forteresses du Nord pouvaient tenir lieu de plus de *cent mille* hommes de troupes réglées; qu'un royaume entouré de nations rivales est toujours dans un état précaire quand il n'a que des troupes sans forteresses. Abordant enfin la question financière, Carnot affirme (ce résultat, j'en suis convaincu, étonnera mon auditoire comme il m'a étonné moi-même), Carnot affirme, à plusieurs reprises, que loin d'être un gouffre où tous les trésors de l'État allaient sans cesse s'engloutir, les nombreuses forteresses du royaume, depuis l'origine de la monarchie, depuis la fondation des plus anciennes, n'ont pas autant coûté que la seule cavalerie de l'armée française en vingt-six ans; et veuillez le remarquer, à la date du mémoire de Carnot, vingt-six ans s'étaient précisément écoulés sans que notre cavalerie eût tiré l'épée.

Eh bien! Messieurs, devenu membre de l'Assemblée législative, l'ardent avocat des places de guerre proposa, non pas, quoi qu'on en ait dit, la destruction complète des fortifications spéciales indépendantes, adossées à ces places, et qu'on

appelle des citadelles, mais seulement la démolition de ceux de leurs remparts qui jadis les isolaient. Sans doute, la certitude qu'il existe un lieu de retraite assurée doit, en temps de siége, exciter les soldats à prolonger la défense, à courir la chance hasardeuse des assauts; mais, à côté de cet avantage, les citadelles s'offraient à l'esprit comme de véritables bastilles dont les garnisons pouvaient foudroyer les villes, les rançonner, les soumettre à tous leurs caprices. Dans l'âme éminemment citoyenne de Carnot, cette considération prévalut. L'officier du génie proscrivit les citadelles, et malgré de bruyantes clameurs, son opinion consciencieuse a prévalu.

Il n'en est pas tout à fait de même des nouveaux systèmes de fortifications et de défense imaginés par notre confrère. Ils n'ont fait jusqu'ici de prosélytes que parmi les étrangers. Est-ce à tort, est-ce à bon droit que nos plus habiles officiers les repoussent? Dieu me garde de trancher une pareille question. Tout ce que je pourrai entreprendre, ce sera d'indiquer en quoi elle consiste, et même, pour être compris, je serai obligé de faire un nouvel appel à votre bienveillante attention.

Les plus anciennes fortifications, les premiers remparts, furent de simples murailles, plus ou moins épaisses, formant autour des villes des enceintes continues percées d'un petit nombre de portes pour l'entrée et pour la sortie des habitants. Afin que leur escalade devînt difficile, ces remparts étaient très-élevés du côté de la campagne; d'ailleurs, un fossé susceptible d'être inondé les en séparait ordinairement.

Les remparts même, dans leur partie la plus haute, avaient

une certaine largeur. C'était là que les populations des villes se portaient en cas d'attaque; c'était de là que, cachées en partie derrière un petit mur appelé aujourd'hui *parapet*, elles faisaient tomber une grêle de traits sur les assaillants. Les plus timides avaient même la facilité de ne viser l'ennemi qu'à travers des ouvertures étroites qui figurent encore dans les fortifications modernes sous le nom de *meurtrières* ou de *créneaux*.

L'assiégeant ne commençait à devenir vraiment redoutable qu'à partir du moment où, parvenu au pied des remparts, il pouvait à l'aide de toute sorte d'outils, d'engins ou de machines, en saper les fondations. Agir alors vivement et à volonté contre lui était donc pour l'assiégé la condition indispensable d'une bonne défense. Or, qu'on se figure un soldat placé au sommet d'un mur; évidemment, il n'en apercevra le pied qu'en se penchant en avant, qu'en mettant presque tout son corps à découvert, qu'en perdant les avantages que lui assurait le parapet à l'abri duquel il n'aurait pu sans cela lancer ses traits, qu'en s'exposant aux coups assurés de l'adversaire qui le guettera d'en bas. Ajoutons que, dans cette position gênée, l'homme n'a ni force ni adresse. Pour remédier à quelques-uns de ces inconvénients, on couronna les murailles de ce genre de construction que les architectes appellent des encorbellements, et sur lesquels les parapets furent établis en saillie. Alors les vides, les ouvertures ou, s'il faut employer l'expression technique, les *mâchicoulis* compris entre le parapet et le rempart devinrent un moyen de faire tomber des pierres, des matières enflammées, etc., sur ceux qui voulaient saper les murs ou tenter l'escalade.

Frapper sans relâche l'ennemi quand il arrive au pied du rempart d'une ville est sans doute excellent; l'empêcher d'avancer jusque-là serait encore mieux. On approcha de ce mieux, sans toutefois l'atteindre complétement, en construisant, de distance en distance, le long de la muraille de la ville, de grosses tours rondes ou polygonales formant de fortes saillies. Si l'on se transporte par la pensée derrière le parapet des plates-formes dont ces tours étaient couronnées, il sera facile de reconnaître que sans se pencher en avant, que sans avoir besoin de trop se découvrir, qu'en s'exposant beaucoup moins que les assaillants, la garnison de chaque tour pouvait apercevoir la tour voisine depuis la base jusqu'au sommet, et de plus une *certaine partie* du mur d'enceinte. De cette partie du mur, qu'on appelle aujourd'hui la *courtine*, une moitié au moins était visible jusqu'au pied par la garnison de la tour de droite, et l'autre moitié par la garnison de la tour de gauche; de sorte qu'il n'y avait plus une seule partie du mur dont l'assiégeant pût aborder le pied sans s'exposer aux coups directs de l'assiégé. C'est en cela que consiste ce qu'on a appelé le *flanquement*.

L'invention de la poudre à canon apporta des modifications profondes au système de fortifications au point de vue de l'attaque et de la défense. A l'aide de cette invention et de celle des bouches à feu qui en fut la conséquence, l'assiégeant aurait pu faire brèche au rempart à coups de canon, et de fort loin. D'un autre côté, l'assiégé aurait eu les moyens d'atteindre l'assiégeant longtemps avant qu'il ne fût parvenu, par ses cheminements, aux murs d'enceinte. On adossa alors à ces murs de vastes remblais sur lesquels l'artillerie du plus gros calibre pût se mouvoir librement.

De là, la nécessité de donner au mur destiné à supporter la poussée de toutes ces terres accumulées d'énormes et dispendieuses épaisseurs. On garantit en même temps les pieds des remparts de la vue de la campagne par des remblais artistement ménagés et se mariant avec les plis naturels du terrain. En défilant ainsi les remparts, on enlevait à l'assiégeant la possibilité de faire brèche de très-loin ; on le mettait dans l'obligation de s'approcher beaucoup du corps de place, afin que le feu de son artillerie pût s'ouvrir avec efficacité contre les revêtements chargés de l'artillerie de l'assiégé.

On raconte que Soliman II tenait conseil avec ses généraux sur la manière de faire le siége de Rhodes. L'un d'entre eux, homme d'expérience, expliquait les difficultés de l'entreprise. Le sultan, pour toute réponse, lui dit : « Avance « jusqu'à moi, mais songe bien que si tu poses seulement la « pointe du pied sur le tapis au milieu duquel tu me vois « assis, ta tête tombera. » Après quelque hésitation, le général ottoman s'avisa de soulever la redoutable draperie et de la rouler sur elle-même à mesure qu'il avançait. Il parvint ainsi, sain et sauf, jusqu'à son maître. Je n'ai plus rien à t'apprendre, s'écria ce dernier : tu connais maintenant l'art des siéges. Telle est, en effet, l'image fidèle des premiers mouvements de celui qui veut s'emparer d'une place de guerre par une attaque en règle. Le terrain est le tapis du sultan. Il y va de sa vie s'il s'y présente à découvert ; mais qu'il fouille le terrain, qu'il amoncelle ses déblais devant lui, qu'il roule sans cesse, en avançant, quelque peu du tapis ; et derrière cet abri mobile, les assiégeants, conduisant avec eux une puissante artillerie, s'approchent en force et en

très-peu de temps des remparts des places, sans être vus de l'assiégé.

Au fond, le problème de la fortification peut être considéré comme un cas particulier de la théorie géométrique des polygones étoilés. Cet ensemble, en apparence inextricable, d'angles saillants, d'angles rentrants, de bastions, de courtines, de demi-lunes, de tenailles, etc., dont se composent les places de guerre modernes, est la solution de la question si ancienne du flanquement. On peut en quelques points varier la construction, mais le but est toujours le même. Les principes abstraits de l'art sont devenus clairs et évidents. Le corps illustre d'officiers qui, aujourd'hui, est en possession de les appliquer à la défense du pays a eu le bon esprit de renoncer au mystère dont il s'entourait jadis, et qui lui a été si vivement reproché. La fortification s'enseigne comme toute autre science; ses procédés sont empruntés à la géométrie la plus élémentaire; un simple amateur peut se les rendre familiers en quelques leçons.

Remarquons maintenant que la fortification moderne a le défaut d'exiger des dépenses énormes. C'est ce défaut ruineux que Carnot voulut faire disparaître en substituant à l'emploi des feux directs celui des feux courbes. Carnot forme l'enceinte de la place d'un mur simple non revêtu, avec escarpe et contrescarpe. Le mur peut ne pas avoir une forte épaisseur, puisqu'il n'a pas à résister à la poussée des terres destinées à porter de l'artillerie. Derrière ce mur, il place des mortiers, des obusiers, des pierriers devant porter dans la campagne des feux courbes dont l'effet, suivant lui, doit être beaucoup plus meurtrier que celui des feux directs, et opposer au cheminement de l'ennemi des obsta-

eles de plus en plus efficaces à mesure qu'il se rapproche. Le mur est *défilé* contre les feux directs de l'assiégeant par la contrescarpe en terre formant une des parois du fossé. Il semble donc que, pour faire brèche, il faudra, comme dans le système actuel des fortifications, venir couronner le chemin couvert, opération qui, suivant l'auteur, serait éminemment meurtrière pour l'assaillant. Ceci suppose qu'on ne peut faire brèche contre le mur de Carnot que de très-près et par le tir de plein fouet. Les expériences faites à l'étranger démentent, dit-on, cette hypothèse : en employant des feux courbes, on serait parvenu à faire brèche d'assez loin à l'aide de projectiles d'un très-gros calibre. La question n'est donc pas résolue; la nouvelle voie ouverte par Carnot semble appeler un examen plus approfondi; mais dès ce moment on doit applaudir à la tentative faite par notre illustre confrère pour rendre les moyens de défense aussi efficaces que les moyens d'attaque dus au génie de Vauban.

Publication du Traité de la défense des places fortes.

Napoléon fut vivement irrité, en 1809, du peu de résistance que plusieurs villes de guerre avaient opposé aux attaques de l'ennemi; aussi fit-il demander à Carnot, vers la fin de la même année, de vouloir bien rédiger, sur cette branche importante de l'art militaire, une instruction spéciale dans laquelle les gouverneurs de places apprendraient à connaître l'importance de leurs fonctions et toute l'étendue de leurs devoirs. Carnot vit dans cette mission une occasion nouvelle de se rendre utile au pays, et il n'hésita point à l'accepter, quoique alors sa santé donnât de sérieuses inquiétudes. Aux

yeux de l'empereur, le *faire vite* avait peut-être le pas sur le *faire bien*. Cette fois cependant ses espérances n'allèrent point jusqu'à supposer que la composition d'un ouvrage considérable qui pouvait exiger dix à douze grandes planches et dans lequel des exemples historiques heureusement choisis devaient sans cesse marcher à côté du précepte et l'étayer, s'exécuterait en moins d'un an. Eh bien, Messieurs, moins de quatre mois s'écoulèrent entre le moment où Carnot connut le désir de Napoléon et la date de la publication du célèbre Traité de la défense des places fortes.

Carnot académicien.

De 1807 à 1814 Carnot vécut dans la retraite; il remplissait scrupuleusement ses devoirs d'académicien. Ce titre lui avait été rendu, le 5 germinal an VIII, après le décès de Le Roy. Presque tous les mémoires de mécanique soumis au jugement de la première classe de l'Institut lui étaient renvoyés. Sa rare sagacité en signalait, en caractérisait, en faisait ressortir les parties neuves et saillantes avec une clarté, avec une précision remarquables. Je pourrais citer tel auteur de machines qui n'a véritablement conçu sa propre découverte qu'après avoir eu le bonheur de passer par cette savante filière. Il avait d'ailleurs un genre de mérite qui n'est pas toujours l'auxiliaire d'une grande science : il savait douter; les résultats théoriques n'étaient pas à ses yeux infaillibles.

Événements de 1813. — *Carnot nommé au commandement d'Anvers.*

Nous voici arrivés aux événements de 1813. Carnot n'avait pas assez de fortune pour s'abonner aux journaux. Tous les jours, à la même heure, nous le voyions arriver à la bibliothèque de l'Institut, s'approcher du feu et lire avec une anxiété visible les nouvelles des progrès des ennemis. Le 24 janvier 1814, sa préoccupation nous parut plus vive encore que d'habitude; il demanda du papier, et écrivit, au courant de la plume, une lettre dont vous entendrez la lecture avec intérêt :

« Sire,

« Aussi longtemps que le succès a couronné vos entre-« prises, je me suis abstenu d'offrir à Votre Majesté des ser-« vices que je n'ai pas cru lui être agréables; aujourd'hui « que la mauvaise fortune met votre constance à une grande « épreuve, je ne balance plus à vous faire l'offre des faibles « moyens qui me restent. C'est peu, sans doute, que l'offre « d'un bras sexagénaire; mais j'ai pensé que l'exemple d'un « soldat dont les sentiments patriotiques sont connus pour-« rait rallier à vos aigles beaucoup de gens incertains sur le « parti qu'ils doivent prendre, et qui peuvent se laisser per-« suader que ce serait servir leur pays que de les aban-« donner.

« Il est encore temps pour vous, Sire, de conquérir une

« paix glorieuse, et de *faire que l'amour du grand peuple* « *vous soit rendu.*

« Je suis, etc. »

Les détails que j'ai cru devoir vous donner sur les circonstances de la rédaction de cette lettre désabuseront, j'espère, ceux qui, accoutumés à concentrer toutes leurs affections sur la personne de Napoléon, virent dans les dernières paroles de Carnot une attaque cruelle et préparée de longue main, du vieux démocrate contre celui qui avait confisqué la République à son profit. En vérité, Messieurs, il fallait être bien décidé à mettre les questions de personnes à la place de l'intérêt du pays, pour ne trouver qu'à blâmer dans l'offre de l'illustre sexagénaire d'aller défendre une forteresse, lorsque d'ailleurs, en fait de capitulations, il avait naguère résumé sa pensée dans ces belles paroles du fameux Blaise de Montluc au maréchal de Brissac : *J'aimerais mieux être mort que de voir mon nom en pareilles écritures.*

Carnot partit de Paris pour Anvers à la fin de janvier, sans même avoir vu l'empereur. Il était temps, Messieurs; le nouveau gouverneur n'atteignit la forteresse, le 2 février dans la matinée, qu'à travers les bivouacs de l'ennemi. Le bombardement de la ville, ou plutôt le bombardement de notre escadre, car il y avait des Anglais dans les assiégeants, commença dès le lendemain; il dura toute la journée du 3, toute la journée du 4 et une partie du 6. Quinze cents bombes, huit cents boulets ordinaires, beaucoup de boulets rouges et de fusées, furent lancés sur nos vaisseaux. L'ennemi se retira ensuite : il avait suffi d'une expérience de trois

jours pour lui donner la mesure du rude jouteur auquel il aurait affaire.

J'emprunte au journal du siége, tenu par M. Ransonnet, aide de camp de Carnot, quelques détails qui pourront intéresser, et qui montreront l'austérité du temps et du personnage.

Le 10 février, le nouveau gouverneur d'Anvers écrit au maire de la ville :

« Je suis très-étonné que la personne chargée de faire l'état des meubles et effets pour ma maison ne se soit pas bornée au strict nécessaire.

« Je désire aussi que les demandes de cette nature qui seront faites pour mon compte n'aient pas le caractère d'une réquisition forcée.

« Tous les effets détaillés sur la note ci-jointe sont inutiles. »

Les nécessités de la campagne de Belgique ayant suggéré à l'empereur la pensée d'emprunter quelques troupes pour l'armée active à la garnison d'Anvers, Carnot écrivit au général en chef Maison une dépêche, en date du 27 mars, d'où j'extrais les passages suivants :

« En obtempérant aux ordres de l'empereur, je suis obligé de vous déclarer, M. le général en chef, que ces ordres équivalent à celui de rendre la place d'Anvers... L'enceinte de cette place est immense, et il faudrait au moins 15,000 hommes de bonnes troupes pour la défendre. Comment Sa Majesté a-t-elle pu croire qu'avec 3,000 marins, dont la plupart n'ont jamais vu le feu, je pourrais tenir la place d'Anvers et les huit forts qui en dépendent ?...

« Il ne reste donc plus ici à faire qu'à se déshonorer ou à

mourir; je vous prie de croire que nous sommes tous décidés à ce dernier parti...

« Je crois, M. le général en chef, que si vous pouvez prendre sur vous de me laisser au moins la troupe de ligne et l'artillerie (il y avait à Anvers un détachement de la garde impériale), vous rendrez à S. M. un très-grand service; mais le tout sera prêt à partir demain, si je ne reçois de vous un contre-ordre que j'attendrai avec la plus grande impatience et la plus grande anxiété. »

Outre la dépêche au général Maison, je trouve à la même date une lettre au ministre de la guerre, le duc de Feltre; j'y remarque le passage suivant :

« Quand j'ai offert à S. M. de la servir, j'ai bien voulu lui sacrifier ma vie, mais non pas l'honneur. Vous savez, M. le duc, que je ne suis pas dans l'usage de dissimuler la vérité, parce que je ne recherche point la faveur. La vérité est que l'état où vos ordres me réduisent est cent fois pire que la mort, parce que je n'ai de chances pour sauver le poste qui m'est confié que la lâcheté des ennemis. »

Bernadotte, ayant voulu détourner Carnot de la ligne de conduite qu'il s'était tracée, en reçut la réponse suivante :

10 avril 1814.

« Prince,

« C'est au nom du gouvernement français que je commande dans la place d'Anvers. Lui seul a le droit de fixer le terme de mes fonctions : aussitôt que le gouvernement sera définitivement et incontestablement établi sur ses nouvelles

bases, je m'empresserai d'exécuter ses ordres. Cette résolution ne peut manquer d'obtenir l'approbation d'un prince né Français et qui connaît si bien les lois que l'honneur prescrit. »

Après les événements de Paris, après la constitution d'un gouvernement provisoire, le ministre de la guerre, Dupont, envoya à Anvers un de ses aides de camp. Voici la lettre que Carnot lui écrivit à cette occasion :

15 avril 1814.

« Il faut le dire, M. le comte, l'envoi que vous m'avez fait d'un aide de camp portant la cocarde blanche est une calamité : les uns ont voulu l'arborer sur-le-champ, les autres ont juré de défendre Bonaparte ; une lutte sanglante en eût été le résultat immédiat dans la place même d'Anvers, si, sur l'avis de mon conseil, je n'eusse pris le parti de différer mon adhésion et celle de toute la force armée... On veut donc la guerre civile ; on veut donc que l'ennemi se rende maître de toutes nos places ; et parce que la ville de Paris a été forcée de recevoir la loi du vainqueur, il faut donc que toute la France la reçoive! Il est évident que le gouvernement provisoire ne fait que transmettre les ordres de l'empereur de Russie. Qui nous absoudra jamais d'avoir obéi à de pareils ordres? Quoi! vous ne nous permettez pas seulement de sauver notre honneur ; vous devenez vous-même fauteur de la désertion, provocateur de la plus monstrueuse anarchie! Les leçons de 1792 et de 1793 sont perdues pour les nouveaux chefs de l'État. Ils cherchent à surprendre notre adhésion en nous affirmant que Napoléon vient d'abdiquer, et aujourd'hui ils nous disent le contraire. Après nous avoir donné

un tyran au lieu de l'anarchie, ils mettent l'anarchie à la place du tyran. Quand verrons-nous la fin de ces cruelles oscillations? Paris ne jouit que d'un calme momentané; calme perfide qui nous présage les plus horribles tempêtes. O jours d'affliction et de flétrissure, heureux sont ceux qui ne vous ont pas vus!»

Les sentiments que Carnot avait su inspirer à la population d'Anvers sont connus du monde entier. Je ne puis résister, cependant, au plaisir de citer au moins quelques mots d'une lettre qui lui fut remise le jour où il partit pour Paris, après en avoir reçu l'ordre du gouvernement des Bourbons de la branche aînée, remontée sur le trône. Les autorités et les habitants du faubourg de Borgerhout, dont la destruction avait été résolue, et qu'il crut pouvoir conserver sans nuire à la défense, lui disaient :

« Vous allez nous quitter; nous en éprouvons un chagrin « mortel; nous voudrions vous posséder encore quelques « minutes; nous sollicitons cette grâce insigne avec la plus « vive instance..... Les habitants de *Saint-Willebrord* et de « *Borgerhout* demandent, pour la personne qui sera chargée « de les administrer, la permission de s'informer, une fois « l'année, de la santé du général Carnot..... Nous ne vous « reverrons peut-être jamais. Si le général Carnot se faisait « peindre un jour, et qu'il daignât faire faire pour nous un « double du tableau..... ce précieux présent serait déposé « dans l'église de *Saint-Willebrord*. »

Je ne commettrai pas la faute, Messieurs, d'affaiblir, par un froid commentaire, des expressions si naïves, si touchantes!

Conduite de Carnot dans les Cent jours.

La conduite de Carnot dans les Cent jours me paraissait résumée tout entière et noblement dans ces paroles mémorables que Napoléon lui adressa après la bataille de Waterloo : CARNOT, JE VOUS AI CONNU TROP TARD!

Mais comme j'écris une biographie et non un panégyrique, je dirai avec franchise que Carnot, comme membre du gouvernement provisoire de cette époque, subit l'influence malfaisante et antinationale du duc d'Otrante, ce qui l'entraîna à donner son adhésion à des mesures marquées au coin de la faiblesse, à des mesures sur lesquelles tout cœur animé de sentiments patriotiques désire jeter un voile épais.

Au surplus, peut-on trop vivement reprocher à Carnot de s'être laissé fasciner par les intrigues de Fouché, lorsqu'on voit Napoléon, malgré les soupçons les plus évidents de trahison, conserver cet homme dans son conseil?

Parmi des reproches adressés ostensiblement à Carnot, sur cette période de nos annales, il en est un sur lequel je puis donner des explications personnelles. J'ai entendu blâmer vivement l'austère conventionnel d'avoir accepté certain titre de *comte de l'empire* : par bonheur, ma mémoire peut reproduire fidèlement quelques paroles de notre confrère qui éclairent ce point de sa vie, et qui me furent transmises, le jour même, par un officier qui les avait entendues.

On était à table, au ministère de l'intérieur. Une lettre arrive; le ministre brise le cachet, et s'écrie presque aussitôt : « Eh bien! Messieurs, me voilà *comte de l'empire!* Je devine

« bien, au reste, *d'où le coup part.* C'est ma démission qu'on « désire, qu'on demande. Je ne *lui* donnerai pas cette satis- « faction; je resterai, puisque je pense pouvoir être utile au « pays. Le jour viendra, j'espère, où il me sera permis de « m'expliquer nettement sur cette perfidie; à présent, je « me contenterai de dédaigner ce vain titre, de ne jamais « l'accoler à mon nom, et surtout de ne pas en prendre le « diplôme, quelques instances qu'on me fasse. De ce mo- « ment, vous pouvez tenir pour certain, Messieurs, que « Carnot ne restera pas longtemps ministre, après que les « ennemis auront été repoussés. »

J'aurais bien mal fait apprécier notre confrère, Messieurs, si ces paroles semblaient exiger plus de développements.

Carnot dans l'exil. — Sa mort.

De tous les ministres des Cent jours, Carnot fut le seul dont le nom figura sur la liste de proscription dressée le 24 juillet 1815 par la seconde restauration. Que cette rigueur exceptionnelle ait été la conséquence de l'ardeur patriotique avec laquelle notre confrère voulait disputer aux étrangers les derniers lambeaux du territoire français, ou de sa persistance, malheureusement sans résultat, à signaler à l'empereur le traître qui, sous la foi d'une ancienne réputation d'habileté, s'était introduit dans le ministère, sa gloire n'en sera pas ternie.

Déjà, dans la soirée du 24 juillet, Carnot avait reçu un passe-port de l'empereur Alexandre. Il ne s'en servit, toutefois, qu'en Allemagne. Obligé de voyager sous un nom supposé, il ne voulut, au moins, renoncer que le plus tard

possible au titre de Français; c'est donc comme Français qu'il traversa de nouveau et si tristement le grand fleuve jusqu'auquel il avait eu l'insigne honneur de porter nos frontières, et il se rendit à Varsovie.

Dans certain pays peu éloigné du nôtre, l'étranger est toujours accueilli avec cette formule sacramentelle : « Ma maison et tout ce qu'elle renferme sont à vous; » mais il n'est pas rare, je dois le dire, qu'au même moment et d'un geste que les domestiques comprennent à merveille, le propriétaire improvisé soit pour toujours consigné à la porte de l'habitation qu'on venait de lui offrir si libéralement. La réception de Carnot en Pologne ne doit pas être rangée dans cette catégorie. Nos excellents amis les braves Polonais ne se bornèrent pas, envers l'illustre proscrit, à de simples formules de politesse. — Le général Krasinski lui porta le titre d'un majorat en terres de 8,000 francs de rente qu'il tenait de Napoléon; le comte de Paç voulait lui faire accepter la jouissance de plusieurs domaines. Quoique Carnot ne fût pas franc-maçon, toutes les loges maçonniques du royaume firent une souscription qui produisit une somme considérable; enfin, et de toutes ces offres qu'il refusa, celle-ci alla le plus droit au cœur de Carnot, un Français, pauvre lui-même, établi à Varsovie depuis longues années, alla un matin lui apporter dans un sac le fruit des épargnes de toute sa vie.

L'âpreté du climat de la Pologne, le désir de se rapprocher de la France, déterminèrent notre confrère à accepter les offres bienveillantes du gouvernement prussien; il s'établit à *Magdebourg*, où il a passé ses dernières années dans l'étude, dans la méditation et en compagnie d'un de ses fils

dont il dirigeait l'éducation. C'était, Messieurs, un beau spectacle que de voir l'Europe entière, que de voir surtout les souverains absolus forcés, en quelque sorte, de rendre hommage à ce que la révolution française avait eu de grand, de noble, de saisissant, même dans la personne d'un des juges de Louis XVI, même dans la personne d'un des membres du *comité de salut public*.

Carnot mourut à Magdebourg, le 2 août 1823, à l'âge de soixante-dix ans.

Portrait de Carnot. — Anecdotes concernant sa vie politique et sa vie privée.

Si l'*iconographie* n'est aujourd'hui considérée par personne comme une science futile, si des esprits très-distingués en ont fait l'objet des plus sérieuses études, il me sera bien permis de dire ici que Carnot avait une taille élevée, des traits réguliers et mâles, un front large et serein; des yeux bleus, vifs, pénétrants; un abord poli, mais circonspect et froid; qu'à soixante ans on apercevait encore en lui, même sous le costume civil, quelque chose de la tenue militaire dont il avait pris l'habitude dans sa jeunesse.

J'ai envisagé, sous toutes ses faces, le conventionnel, le membre du comité de salut public, le membre du Directoire exécutif, le ministre de la guerre, l'ingénieur militaire, le proscrit, l'académicien. Cependant, plusieurs traits essentiels manqueraient au tableau, quelque vaste qu'il soit déjà, si je ne parlais encore de l'homme privé. Je ne m'écarterai pas, dans cette dernière partie de ma notice, de la route que je

m'étais tracée; je marcherai toujours la preuve à la main. C'est ainsi, je crois, qu'il faut louer un géomètre; je me trompe, c'est ainsi qu'il faudrait louer tout le monde : en voyant combien l'honneur, le désintéressement, le vrai patriotisme sont rares chez les vivants; combien, au contraire, d'après les oraisons funèbres, d'après les inscriptions tumulaires, ils auraient été communs parmi les morts, le public a pris le sage parti de ne plus guère y croire, ni pour les uns ni pour les autres.

J'ai lu quelque part que Carnot était un ambitieux. Je ne m'arrêterai pas à combattre cette assertion en forme; je raconterai, et vous jugerez vous-mêmes.

Le membre du comité de salut public qui, en 1793, organisait les quatorze armées de la République; qui coordonnait tous leurs mouvements; qui nommait et remplaçait les généraux; qui, au besoin, comme à Wattignies, les destituait pendant la bataille sous le canon de l'ennemi, n'était que simple capitaine du génie.

Lorsque, plus tard, le conseil des Cinq Cents et le conseil des Anciens de la République de l'an III appelaient unanimement Carnot à faire partie du Directoire exécutif; lorsque, devenu une seconde fois l'arbitre suprême des opérations de nos armées, il envoyait *Hoche* dans la Vendée, *Jourdan* sur la Meuse, *Moreau* sur le Rhin, à la place de Pichegru; lorsque, par la plus heureuse inspiration, il confiait à *Bonaparte* le commandement de l'armée d'Italie, notre confrère avait fait un pas, mais un pas seulement : il était devenu chef de bataillon *à l'ancienneté!*

Cet humble grade, Carnot l'avait encore quand le coup d'État du 18 fructidor le chassa de France.

Les idées si profondément hiérarchiques du premier consul n'auraient pas pu s'accommoder d'un ministre de la guerre chef de bataillon. Aussi, en l'an IX, n'éleva-t-il Carnot à ce poste éminent qu'après l'avoir nommé inspecteur général aux revues. C'était, au reste, tourner la difficulté plutôt que la lever. Le grade demi-militaire, demi-civil d'inspecteur aux revues, n'empêchait pas que, sous le gouvernement des consuls, le ministre de la guerre ne fût encore, dans l'arme du génie, simple chef de bataillon.

Carnot quitta le ministère le 16 vendémiaire an IX. Douze jours après, son successeur demandait qu'on plaçât le nom de l'illustre citoyen dans la liste qui allait être formée des généraux de division de l'armée française. Le rapport rappelait, en très-bons termes, et même avec une certaine vivacité, tout ce que notre confrère avait fait pour la gloire, pour l'indépendance nationales. Le ministre allait même, au nom de la *justice,* de l'*estime* et de l'*amitié*, jusqu'à invoquer la *magnanimité* des consuls : la magnanimité fit défaut ; on ne répondit pas au rapport, et le ministre démissionnaire resta dans son ancien grade.

En 1814, quand il fallut expédier les lettres de commandement du nouveau gouverneur d'Anvers, les commis de la guerre, pour écrire l'adresse, cherchèrent dans les contrôles les titres officiels de Carnot, et restèrent stupéfaits en voyant que l'empereur venait, sans s'en douter, de placer un simple chef de bataillon à la tête d'une foule de vieux généraux. Le service aurait évidemment souffert d'un pareil état de choses ; on sentit le besoin d'y remédier ; et, à l'imitation de certain personnage ecclésiastique qui, dans la même journée, reçut

les ordres mineurs, les ordres majeurs, la prêtrise et l'épiscopat, notre confrère, en quelques minutes, passa par les grades de lieutenant-colonel, de colonel, de général de brigade et de général de division.

Oui! Messieurs, Carnot avait de l'ambition; mais, comme il l'a dit lui-même, *c'était l'ambition des trois cents Spartiates allant défendre les Thermopyles!*

L'homme qui, dans sa toute-puissance, ne songea seulement pas à se faire l'égal, par le grade, de ceux dont il dirigeait les vastes opérations, avait aussi dédaigné les faveurs de la fortune. Quand il rentra dans la vie privée, son faible patrimoine était à peine intact. Comment, avec les goûts les plus simples, avec une vive antipathie pour le faste et la représentation, Carnot n'arriva-t-il pas, sans même s'en douter, sinon à la richesse, du moins à l'aisance de ceux qui, comme lui, ont longtemps occupé de brillants emplois? Quelques faits serviront de réponse.

Après le 18 brumaire, au moment de l'entrée de Carnot au ministère de la guerre, la solde des troupes, et, ce qui doit plus étonner, la solde des commis, étaient arriérées de quinze mois. Peu de semaines s'écoulent, et tout est payé; tout, hormis les appointements du ministre!

Les *épingles*, tel était jadis le nom d'une sorte de gratification destinée, en apparence, à la femme de celui avec qui un fermier, un négociant, un fournisseur venait de conclure une affaire publique ou privée. Quoique les épingles ne figurassent pas dans les conditions écrites, les contractants ne les regardaient pas moins comme obligatoires; l'habitude, cette seconde nature, avait fini par les faire trouver légales;

les consciences les plus timorées se contentaient de n'en point fixer la valeur.

Un marchand de chevaux dont Carnot avait approuvé la soumission, alla, suivant l'usage, lui porter à titre d'épingles une somme considérable : c'était, je crois, 50,000 fr. Le ministre ne comprend pas d'abord : au comité de salut public, où il avait fait son apprentissage, les fournisseurs se gardaient bien, en effet, de parler d'épingles ; tout s'explique enfin, et Carnot, loin de se fâcher, reçoit en riant les billets qu'on lui présente ; il les reçoit d'une main et les rend de l'autre comme un premier à-compte sur le prix des chevaux que le marchand s'était engagé à fournir à notre cavalerie, et en exige à l'instant le reçu.

Les factions, dans les plus violents paroxysmes de leurs fureurs, eurent la prudence de ne point attaquer dans Carnot l'homme privé ; jamais leur souffle impur n'essaya de ternir les vertus du fils, de l'époux, du père ; à l'égard du désintéressement surtout, amis et ennemis restèrent constamment d'accord. Je pourrais donc sur ce point m'en tenir aux deux traits que je viens de citer. Il en est un autre cependant qu'on doit désirer de sauver de l'oubli ; la mémoire de Carnot n'en aurait que faire, mais j'ai le faible espoir qu'en se le rappelant, certains ministres pourront être arrêtés dans leurs prodigalités, et certaines parties prenantes dans leurs exigences !

Après le 18 brumaire, les opérations projetées de l'armée de réserve exigeaient impérieusement que *Moreau* envoyât sans retard une de ses divisions à l'armée d'Italie. L'intervention directe du ministre de la guerre ne sembla pas de trop pour conduire à bon port une négociation de cette im-

portance. En exécution d'un ordre des consuls du 15 floréal an VIII, Carnot, accompagné de *six* officiers d'état-major, de *deux* courriers et d'*un* domestique, se rendit en Allemagne. Pendant la route, il inspecta les troupes échelonnées entre Dijon et Genève ; il parcourut ensuite les cantonnements du Rhin, visita les places fortes, arrêta avec le général en chef le plan de la future campagne, et revint à Paris. La trésorerie lui avait donné 24,000 francs. Au retour, il rendit 10,680 francs. Il craignait tellement que la dépense de 13,320 francs faite pour un long voyage de *dix* personnes ne parût trop forte, qu'il en fit le sujet d'un rapport détaillé, qu'il s'en excusait comme d'une prodigalité : « On voudra bien remarquer, disait-il dans sa lettre aux consuls, que vous aviez désiré que je donnasse de l'éclat à ma mission ; que dans les lieux principaux j'ai dû, suivant vos ordres, m'imposer une certaine représentation ; qu'il entrait enfin dans le caractère de générosité dont vous êtes animés, que je donnasse des gratifications à mes compagnons de voyage et de fatigue ! » Veuillez vous rappeler, Messieurs, que le voyage, la représentation, les gratifications, s'étaient élevées, au total, à 13,320 francs ; n'oubliez pas que c'était un ministre inspectant des armées qui allaient décider du sort de la patrie, qui parlait ainsi, et vous trouverez avec moi, je pense, que, si le monde se perfectionne, ce n'est certainement pas sous le rapport de l'économie.

La trésorerie ne savait comment porter en recette les 10,680 francs que lui restituait Carnot ; mais notre confrère n'en était pas à son coup d'essai : en remontant aux époques où il inspectait les armées républicaines comme représentant du peuple, les commis des finances trouvèrent dans leurs

registres le protocole qu'ils cherchaient, et cela autant de fois que Carnot avait rempli de missions.

Le nom de Carnot se présenterait à ma pensée, si, après tant d'exemples empruntés à l'histoire de tous les peuples, il restait encore à prouver qu'une âme ardente peut s'allier à des manières froides et réservées. Sans doute, personne n'eut jamais le droit de dire de lui, comme *d'Alembert* d'un des anciens secrétaires de notre Académie : *C'est un volcan couvert de neige ;* mais qu'il me soit du moins permis de montrer que les conceptions de notre confrère avaient souvent ce je ne sais quoi qui va droit au cœur, qui le touche, qui l'émeut, qui l'électrise ; qu'elles étaient enfin frappées du cachet indéfinissable que ne portent jamais les œuvres des hommes sans entrailles, des hommes chez lesquels toutes les facultés se trouvent concentrées dans l'intelligence. Deux citations, et ma thèse sera prouvée.

Latour d'Auvergne, né de la famille de Turenne, ne donne pas même un regret, quand la révolution éclate, aux avantages de position qu'il va perdre ; l'ennemi menace nos frontières ; c'est aux frontières qu'on le voit aussitôt marcher. La modestie lui fait refuser tous les grades ; l'ancien capitaine reste obstinément capitaine. Afin de ne pas priver le pays des éminents services que le *général Latour d'Auvergne* lui eût rendus, Carnot autorise les représentants du peuple à grouper ensemble toutes les compagnies de grenadiers de l'armée des Pyrénées-Occidentales, à en former un corps séparé, à n'y jamais placer aucun officier supérieur, à en écarter avec le même soin tous les capitaines plus anciens que Latour d'Auvergne ; et, par cet arrangement, le modeste officier se trouve chaque jour chargé d'un comman-

dement important. Le nom de *colonne infernale* donné par les Espagnols à ce corps de troupes sanctionne bientôt d'une manière éclatante tout ce qu'il y avait d'anomal, d'inusité, d'étrange dans la combinaison suggérée par Carnot et réalisée par les représentants.

Latour d'Auvergne, que vous connaissez maintenant, Messieurs, comme militaire, quittait pour la troisième fois sa retraite, ses chères études d'érudition, et demandait à servir sous *Moreau*, lorsque Carnot devint ministre de la guerre après le 18 brumaire. Déjà, à cette époque, le premier consul n'eût certes pas approuvé une combinaison semblable à celle que les représentants conventionnels avaient adoptée sur les Pyrénées. Carnot, cependant, souffrait de voir que le chef de la colonne infernale, que celui qui comptait tant d'actions d'éclat, que l'estimable auteur des *Origines gauloises*, faut-il le dire aussi, qu'un correspondant de l'Institut, arriverait sur le Rhin comme le plus obscur combattant. Le titre de *premier grenadier de France* frappe son imagination; Latour d'Auvergne en est revêtu par un acte officiel, et dès ce moment, sans quitter ses épaulettes de grenadier, il devint aux yeux des soldats l'égal, si ce n'est le supérieur des premiers dignitaires de l'armée.

Le premier grenadier de la République fut tué d'un coup de lance le 27 juin 1800, à la bataille de Neubourg. L'armée, la France tout entière pleurèrent amèrement cette perte. Quant à Carnot, sa douleur profonde lui inspira une pensée que l'antiquité, d'ailleurs si idolâtre de la gloire militaire, pourrait nous envier. D'après un ordre émané de lui, lorsque la 46^{e} demi-brigade était réunie, l'appel commençait toujours par le nom de Latour d'Auvergne. Le grenadier

placé en tête du premier rang s'avançait alors de deux pas, et répondait de manière à être entendu sur toute la ligne : *Mort au champ d'honneur!*

L'hommage bref, expressif, solennel, qu'un régiment rendait ainsi chaque jour à celui qui s'était illustré dans ses rangs par le courage, par le savoir, par le patriotisme, devait, ce me semble, y entretenir cette excitation qui enfante les héros. J'affirme, en tout cas, que les nobles paroles de Carnot, répétées à la chambrée, au corps de garde, sous la tente, au bivouac, avaient profondément gravé le souvenir de Latour d'Auvergne dans la mémoire de nos soldats. Où vont donc ces longues files de grenadiers, s'écriait l'état-major du maréchal Oudinot, lorsque, dans les premiers jours de vendémiaire an XIV (octobre 1805), l'avant-garde de la grande armée traversait Neubourg? Pourquoi s'écartent-ils de la route qu'on leur a tracée? Leur marche silencieuse et grave excite la curiosité; on les suit, on les observe. Les grenadiers allaient, Messieurs, près d'Oberhausen, passer avec recueillement leurs sabres sur la pierre brute qui recouvrait le corps du premier grenadier de France!

Je rends grâce, Messieurs, au vieillard vénérable (M. Savary) qui, témoin oculaire de la scène touchante d'Oberhausen, m'a permis de la tirer de l'oubli, et d'unir ainsi dans un sentiment commun l'admirable armée d'Austerlitz aux admirables armées républicaines. Je suis heureux aussi que des noms qui vous sont chers, que les noms de deux de nos anciens confrères, que les noms de Latour d'Auvergne et de Carnot soient venus occuper une si belle place dans ce patriotique souvenir!

Les grands emplois, comme les sommités élevées, donnent

ordinairement des vertiges à qui y arrive brusquement. Celui-ci s'imagine devoir faire oublier, par le faste et la prodigalité, les années qu'il a passées dans la médiocrité ou la gêne; celui-là devient dédaigneux et insolent, brutal, et se venge ainsi, sur les malheureux solliciteurs, des dédains, des arrogances, des brutalités qu'il subissait quand il était solliciteur lui-même. Des noms propres viendraient en foule se placer au bas de cette esquisse, si quelqu'un s'avisait d'en contester la fidélité. N'allez pas croire toutefois qu'en faisant si bon marché de certains parvenus, j'entende me constituer ici l'avocat du privilége; je veux prouver, au contraire, par l'exemple de Carnot, que les âmes d'une certaine trempe savent résister à la contagion.

Six mois après le coup d'État du 18 fructidor, Carnot est officiellement accusé au conseil des Cinq Cents d'avoir eu, avec Pichegru, des relations fréquentes, intimes, à une époque où ce général, membre du Corps législatif, souillait par des intrigues criminelles sa brillante réputation militaire. Carnot nie ces relations. Il prouve d'abord que des entrevues secrètes n'auraient pas pu avoir lieu chez lui. « Je sens bien, ajoute-« t-il, qu' on dira : Si ce n'est pas chez vous, c'est ailleurs. Eh « bien! je déclare que, pendant toute la durée de mes fonc-« tions directoriales, *je ne suis pas sorti douze fois*, sans « être accompagné de ma femme, de mes sœurs, de mes en-« fants! »

Il est possible, Messieurs, qu'en France, qu'ailleurs, les gouvernants aient eu souvent cette simplicité, cette austérité de mœurs; mais, je l'avouerai, le bruit n'en est pas venu jusqu'à moi.

Je viens de vous parler de l'homme; voici maintenant le ministre.

Au combat de *Messenheim* (1800), près d'*Inspruck*, *Championnet* remarque l'audace, l'intrépidité du colonel *Bisson*, et demande pour lui, aux applaudissements de toute l'armée, les épaulettes de général de brigade. Les semaines s'écoulent, et le grade n'arrive pas. *Bisson* s'impatiente, se rend à Paris, obtient un rendez-vous du ministre, et, dans sa colère, l'apostrophe d'une manière brutale. Jeune homme, lui répond Carnot avec calme, il est possible que j'aie commis une erreur; mais vos inconvenantes manières pourraient, en vérité, m'ôter l'envie de la réparer. Allez! je vais examiner attentivement vos services.—Mes services! Ah! je sais trop bien que vous les méprisez, vous, qui du fond de ce cabinet, nous envoyez froidement l'ordre de mourir. A l'abri du péril et de la rigueur des saisons, vous avez déjà oublié et vous oublierez encore que notre sang coule, et que nous couchons sur la dure. — Colonel, c'en est trop! Dans votre propre intérêt, notre entretien ne doit pas continuer sur ce ton-là. Retirez-vous. Votre adresse, s'il vous plaît? Allez! dans peu vous aurez de mes nouvelles.

Ces dernières paroles, prononcées d'un ton solennel, dessillent les yeux du colonel Bisson. Il court chercher des consolations auprès d'un ami dévoué, le général Bessières. Celui-ci, au contraire, lui fait entrevoir un conseil de guerre comme la conséquence inévitable de son étourderie. En attendant, Bisson se cache. Un serviteur fidèle va, d'heure en heure, à l'hôtel chercher l'ordre de comparution tant redouté. Le paquet ministériel arrive, enfin; Bisson, tout ému, en déchire l'enveloppe. Le paquet, Messieurs, renfer-

mait le brevet de général de brigade et des lettres de service!

A peine est-il nécessaire d'ajouter que le nouveau général vole aussitôt chez Carnot, pour lui offrir l'hommage de son admiration, de sa reconnaissance et de son vif repentir. Soin superflu, le général Bisson était consigné à la porte du ministère. Cette âme ardente à qui, malgré toute la sincérité de ses sentiments, la démarche coûtait un peu, prouva combien il avait apprécié la délicate sévérité de Carnot, et combien il en était digne, en publiant le soir même ces détails, que *Plutarque* n'eût certainement pas dédaignés.

De toutes les qualités dont les grands hommes peuvent se parer, la modestie semble être la moins obligatoire; aussi leur en tient-on le plus grand compte; aussi laisse-t-elle des souvenirs durables. Qui, par exemple, ne sait par cœur cette lettre que Turenne écrivit à sa femme, il y a cent soixante-dix-neuf ans, le jour de la célèbre bataille des Dunes : « Les « ennemis sont venus à nous; ils ont été battus; Dieu en « soit loué. J'ai un peu fatigué dans la journée; je vous donne « le bonsoir, et je vais me coucher! »

Carnot ne s'oubliait pas moins que l'illustre général de Louis XIV, non-seulement dans ses relations intimes, mais encore quand il écrivait à la Convention. Je vous ai dit la part qu'il eut à la bataille de Wattignies; eh bien! lisez le bulletin que lui inspira cet événement mémorable, décisif, et vous y chercherez en vain quelques mots qui rappellent les représentants du peuple; à moins, toutefois, qu'on ne soit décidé à les voir dans ce passage : « Les républicains « chargèrent, la baïonnette en avant, et demeurèrent victo- « rieux! »

O.

Vous tous, au reste, qui avez connu Carnot, dites, avec moi, si jamais, sans une sollicitation directe, pressante, il consentit à vous entretenir des événements européens qu'il avait tant de fois dirigés. Justement jaloux de l'estime de la France, l'ancien directeur, pendant qu'il était exilé, répondit, par écrit, aux diatribes de ses accusateurs. Sa polémique, cette fois, fut vive, poignante, incisive; on vit à chaque ligne qu'elle partait d'un cœur ulcéré. Toutefois, la plus légitime irritation, n'entraîna point notre confrère au delà du cercle que ses ennemis lui avaient tracé. Sa défense, dans quelques parties, pouvait bien ressembler à une attaque; mais au fond, en y regardant de près, c'était encore de la défense. Carnot rejeta loin de lui la pensée de se créer un piédestal avec les immortels trophées qu'il avait moissonnés durant sa carrière conventionnelle ou directoriale. La modestie est de bon aloi, Messieurs, quand elle triomphe ainsi de la colère.

En matière de sciences, la réserve de l'illustre académicien n'était pas moindre. On eût dit, en vérité, qu'il réglait sa conduite sur cette réflexion du plus ancien, du plus ingénieux de vos interprètes : « Quand un savant parle pour « instruire les autres et dans la mesure exacte de l'instruction « qu'ils veulent acquérir, il fait une grâce; s'il ne parle que « pour étaler son savoir, on fait une grâce en l'écoutant. »

La modestie, au surplus, n'est une qualité digne d'estime et de respect que chez les individus isolés. Les corps, les académies, surtout, feraient une faute et manqueraient à leur premier devoir, si elles négligeaient de se parer devant le public des titres légitimes qu'elles ont à l'estime, à la reconnaissance, à l'admiration du monde. Plus elles sont justement célèbres, plus le désir de leur appartenir est vif, et plus

les laborieux efforts qu'on fait pour atteindre le but tournent à l'avantage de la science, à la gloire de l'esprit humain. Cette pensée m'a encouragé, Messieurs, à dérouler à vos yeux, dans tous ses détails et dans son vrai jour, la vie si pleine, si variée, si orageuse de Carnot. Depuis bientôt deux siècles, l'Académie des sciences conserve religieusement le souvenir des géomètres, des physiciens, des astronomes, des naturalistes qui l'ont illustrée. Le nom du grand citoyen qui par son génie préserva la France de la domination étrangère, m'a semblé devoir être inscrit avec quelque solennité dans ce glorieux Panthéon.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

BENJAMIN DELESSERT,

ACADÉMICIEN LIBRE,

PAR M. FLOURENS,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Lu dans la séance publique du 4 mars 1850.

Dès que l'Académie put se donner, en 1816, des Associés libres, elle s'adjoignit M. Delessert, également touchée des services qu'il rendait aux sciences, de l'art heureux avec lequel il les appliquait à l'industrie, et de cette réputation de vertu qui faisait déjà de son nom, un des noms les plus vénérés de notre âge.

Benjamin Delessert naquit à Lyon le 14 février 1773.

Ses ancêtres, attachés à l'église réformée, avaient été contraints de s'expatrier, lors de la révocation de l'édit de Nantes. Un demi-siècle plus tard, laissant une de leurs branches en Suisse, ils nous revinrent pour rendre au sol natal leurs exemples et leurs bienfaits.

Étienne Delessert, père de Benjamin, après avoir longtemps dirigé, à Lyon, une importante maison de commerce, s'établit à Paris en 1777. Son nom y fut bientôt entouré du plus grand respect. A une âme forte et pleine de dévouement pour le bien public, il joignait le génie des conceptions utiles. On lui doit la première idée de la grande Caisse d'escompte, devenue depuis la Banque de France. Son coup d'œil pénétrant et juste se portait sur tout. Il introduisit des améliorations notables dans l'agriculture et dans l'industrie. Il institua des écoles gratuites pour l'enfance, dont quelques-unes subsistent encore aujourd'hui : fondations qui firent la joie de ses derniers jours.

Sa compagne, madame Delessert, née en Suisse, avait une piété sincère, une raison supérieure, un esprit orné des plus belles études et capable des plus sérieuses. Elle voulut diriger elle-même l'éducation de ses enfants, et s'étant donné cette grande tâche, elle en fit la pensée constante de sa vie entière.

Cette jeune famille se développa sous les plus douces influences. Tout, autour d'elle, tendait à faire aimer la vertu. Berquin, l'*ami des enfants*, était l'habitué de la maison. Il venait, au milieu de ce groupe de sept enfants, chercher le coloris de ses jolis tableaux. Un petit Benjamin surtout l'attirait par sa naïveté gracieuse, et Berquin se plaisait à dire qu'il trouvait en lui, pour le bon et le sincère, le plus charmant modèle.

Il fallut, plus tard, donner à cet enfant et à ses frères un précepteur, et ce fut le plus éloquent des maîtres en ce genre que l'on consulta. Jean-Jacques Rousseau, avec cette raison exquise, qui parfois se montre dans son *Émile*, con-

seilla de choisir moins un précepteur savant qu'un homme bon, vertueux, et, ce sont ses expressions, d'une *patience invincible.*

Dans cette dernière partie de sa vie, Rousseau faisait de la botanique son occupation favorite. Il voulut être, pour cette science, le maître des enfants de madame Delessert. Telle fut l'origine de ces *Lettres sur la botanique,* si connues et en effet si dignes de l'être, ouvrage où le savoir le plus réel cherche à se cacher, et y réussit presque, sous les formes les plus ingénieuses et les plus simples.

Jean-Jacques aimait, en tout, le travail délicat et la perfection. Il prépara, avec un soin infini, je dirais presque avec un talent merveilleux, un petit herbier dont toutes les plantes ont été recueillies par lui, où tous les noms, linnéens et français, sont écrits de sa main, et où quelques notes, toujours justes, viennent ajouter un intérêt de plus. Ce petit herbier fut envoyé, par lui, à ses disciples : il est devenu le noyau du plus grand herbier du monde.

Dès que le jeune Delessert put connaître les plantes, il les aima. Encore enfant, il parcourait, avec toute l'ardeur de cet âge, les environs de Passy, que sa famille habitait déjà. Il cherchait partout des plantes. Il recueillait aussi des coquilles. Poussé par un goût inné, il faisait des collections. Ces douces études l'occupaient tout entier; et si parfois il en fut distrait, c'est qu'il rencontra quelque infortune à soulager, car dès lors il se procurait aussi ces joies-là dans le secret de son cœur.

Un horizon plus vaste allait bientôt s'ouvrir devant lui. Benjamin Delessert commença, de bonne heure, cette édu-

cation virile qui ne s'acquiert que par l'expérience des hommes et des choses, et qu'il faut chercher loin de son pays, loin de sa famille.

Dès 1784, il quitta le foyer paternel sous la direction chérie d'un frère aîné, jeune homme d'une capacité rare, également né pour les affaires et pour les sciences, et qu'une mort prématurée devait ravir, dans la force de l'âge, à tant d'espérances.

Nos voyageurs se rendirent à Édimbourg.

Édimbourg était alors le centre brillant des plus nobles études. Hutton et Playfair, Dugald-Stewart, Hume et Robertson, Adam Smith, y donnaient aux sciences physiques, à la philosophie, à l'histoire, à l'économie politique, un nouvel aspect.

D'Édimbourg, Benjamin Delessert passa à Birmingham, et le moment n'était pas moins propice. Le génie de la mécanique y soumettait à l'homme l'une des forces les plus puissantes et les plus terribles de la nature. Benjamin Delessert fut témoin des essais de Watt.

Vers ce même temps, Deluc, le savant géologue, écrivait à Windsor ses fameuses *Lettres sur l'histoire de la terre et de l'homme*. Il était l'ami de la famille Delessert. Il accueillit nos deux jeunes gens avec la tendresse d'un père.

La grande éducation est celle qui se fait auprès du génie. Chacun de ces hommes célèbres, comme ces Fées bienfaisantes qu'avait rêvées l'imagination de nos pères, doua Benjamin Delessert d'un talent particulier. Deluc lui inspira le goût de la géologie; Hutton, celui des expériences: Dugald-Stewart, les principes de cette philosophie écossaise, qu'on a louée, quand on l'a nommée; Adam Smith lui apprit, par ses livres,

à raisonner clairement sur l'économie politique, et, par son exemple, à ne pas trop se fier à ces raisonnements: le partisan le plus décidé du libre échange est mort commissaire général des douanes en Écosse. Watt le doua de l'intelligence supérieure des arts mécaniques.

Mais un autre guide, le guide le plus tendre et le plus écouté, n'avait pas cessé de veiller sur lui. Pendant tout le temps que dura le voyage d'Écosse et d'Angleterre, madame Delessert fut toujours avec ses deux enfants par ses lettres et par ses conseils.

Dans ces lettres, pieusement conservées par sa famille, madame Delessert rend compte à ses fils de tout ce qui se passe à Paris. Elle observe, elle étudie, elle lit pour eux. Elle analyse pour eux les livres les plus remarquables; elle leur explique les découvertes nouvelles; elle tient sans cesse leur imagination tournée vers le beau, vers le grand; elle leur propose de grands exemples, de grands modèles.

La France a eu le bonheur, comme chacun sait, de posséder Franklin pendant quelques-unes des dernières années de sa vie. Il habitait Passy. Franklin et la famille Delessert se voyaient souvent. Au moment dont il s'agit, il était sur le point de quitter la France.

Voici en quels termes madame Delessert parle de Franklin à ses deux enfants:

« Je ne puis vous dire, leur écrit-elle, avec quelle émotion « je considère ce vénérable vieillard dont la vie a été si ho- « norablement remplie. Il est très-aimable, ayant toujours « des choses spirituelles à citer. Quelqu'un lui ayant témoi- « gné tous les regrets que nous éprouvions à la vue des pré-

« paratifs de son voyage, — « J'ai, répondit-il, passé ma soi-
« rée très-agréablement; quand vient l'heure de se coucher,
« il faut se rendre chez soi. Il m'en coûte infiniment de partir;
« souvent même je me prends à balancer; mais j'espère que
« je ferai ce qui est convenable. » — Un silence d'attendris-
« sement suivit ces paroles; enfin, quelqu'un ayant osé insis-
« ter et lui représenter que ses compatriotes ne semblaient
« pas pénétrés de toute la reconnaissance qu'ils lui devaient,
« qu'il avait même d'ardents ennemis, — « Leur injustice,
« répondit-il, ne me surprendra pas; je connais les hommes;
« je ne leur en voudrai pas, et je n'en serai pas moins sensi-
« ble au spectacle de leur bonheur. »

Madame Delessert ajoute : « Près de Franklin est un en-
« fant de seize ans, qui annonce beaucoup d'esprit, qui lui
« ressemble par la physionomie, et qui, se destinant à être
« imprimeur, travaille à cet effet. Il y a quelque chose
« d'auguste à voir le petit-fils du législateur de l'Améri-
« que rentrer ainsi dans une carrière si simple et si labo-
« rieuse. »

Quel charme dans ces paroles, et en même temps quelle science, quel art de mère! Comme l'auteur de ces lettres sait bien présenter un grand homme par ses côtés les plus gracieux, et faire doucement pénétrer dans de jeunes imaginations tous les germes purs et féconds d'une grande vie!

Le séjour en Écosse et en Angleterre a été l'événement décisif de la jeunesse de M. Delessert. C'est de là, c'est des études sévères qu'il y avait commencées et qu'il eut le courage de continuer en France, que sont nés les inclinations, les idées, les principes, et, si je puis ainsi dire, toutes les parties dominantes de cette capacité puissante et multiple.

Lorsque Benjamin Delessert revint en France, on touchait à la révolution, et bientôt à des guerres terribles et glorieuses.

Dès 1793, Benjamin Delessert entra, comme volontaire, à l'école d'artillerie de Meulan. Il en sortit l'année suivante avec le grade de capitaine. Il fit la campagne de Belgique, sous Pichegru. Il se trouva aux siéges d'Ypres, de Maubeuge, d'Anvers. Partout son courage le distingua.

Anvers pris, il fut chargé du commandement de la citadelle; et là une occasion s'offrit où parut tout ce qu'il avait de résolution calme et d'intrépidité naturelle.

Un feu violent se déclare dans un bâtiment voisin de la poudrière. Aussitôt l'épouvante se met dans la garnison. Chacun songe à son salut, et se dirige au plus vite vers la plus proche issue. Les fuyards avaient compté sans leur jeune commandant; déjà tous les ponts-levis sont levés, toutes les portes sont fermées : la retraite étant devenue impossible, les plus effrayés furent les plus braves, et l'incendie fut arrêté.

De pareils débuts annonçaient l'avenir militaire le plus brillant. Mais le père de Benjamin, ce noble vieillard, venait de perdre son fils aîné : deux années passées dans les prisons de la Terreur avaient avancé son âge, Benjamin Delessert n'hésita point; il fit le sacrifice de succès qui lui eussent été personnels; il se rendit auprès de son père, et commença dès lors cette carrière commerciale et industrielle que le génie des affaires et le secours des sciences ont entourée de tant d'éclat, et à laquelle la vertu a donné une véritable grandeur.

En 1795, M. Delessert prend la direction de la maison de son père. En 1801, il fonde à Passy une raffinerie de sucre, qui, peu de temps après, devient le théâtre de ses plus importants travaux. En 1802, il est nommé régent de la Banque de France. Il n'avait alors que vingt-neuf ans. En 1803, il est appelé dans un conseil où le Premier Consul soumet à la discussion des hommes les plus compétents une des questions qui intéressaient le plus alors l'industrie française.

Nous tirions de l'Angleterre les fils de coton pour nos tissus communs, et de l'Inde, par l'intermédiaire de l'Angleterre, tous les tissus fins. Pouvait-on affranchir la France de ce tribut? M. Delessert soutint qu'on le pouvait. Il fit plus, il établit à Passy une filature qui le prouva. On osa prohiber les fils et les tissus étrangers. Le résultat de cette mesure hardie, prise à propos, a été d'enrichir la France d'une industrie nouvelle, et qui, depuis, a été portée à un degré admirable de perfection.

Ce premier succès fut bientôt suivi d'un autre.

Nous n'avions encore de sucre que celui de nos colonies. Cet aliment si précieux nous venait uniquement d'une plante étrangère, et qui ne peut supporter la température de nos climats.

La canne à sucre est originaire de l'Inde et des parties les plus orientales de l'Asie. Vers le milieu du XII^{e} siècle, on la transporta dans l'Arabie, dans l'Égypte. Cent ans plus tard, on essaya de la cultiver en Sicile, à Madère, dans les îles Canaries, en Espagne, en Provence. En 1506, on la porta à Saint-Domingue; et c'est de là qu'elle s'est répandue dans les

autres îles de l'Amérique. Elle fait, depuis trois siècles, la principale richesse de nos colonies.

L'habitude nous fermait les yeux sur le péril de cette dépendance absolue où nous étions de nos colonies pour une substance si nécessaire, qui chaque jour le devenait davantage, dont la consommation s'accroissait dans des proportions immenses.

En 1747, Margraff, chimiste prussien, annonça et prouva qu'on pouvait tirer du sucre de plusieurs de nos plantes indigènes les plus communes. En 1797, Achard, autre chimiste prussien, reprit ce beau travail. Il porta si loin l'art d'extraire le sucre de la betterave, qu'il fut aisé de prévoir dès lors tout ce qu'aurait, un jour, d'importance cet art nouveau.

Enfin, lorsque, en 1806, la France, maîtresse du continent mais exclue des mers, n'eut plus de communication possible avec ses colonies, Napoléon demanda aux sciences ce que le Nouveau-Monde lui refusait. Il encouragea, il ordonna même de nouvelles recherches. Un membre de cette Académie, Proust, venait de découvrir le sucre de raisin. Le problème n'était pourtant pas résolu. Le sucre de raisin n'est pas le même que celui de la canne à sucre. Il fallut donc revenir à celui de la betterave. Deyeux s'en occupa d'abord, puis Chaptal. Je cite deux membres de cette Académie; je pourrais citer presque tous les chimistes de cette époque.

Durant quatre années entières, M. Delessert se livra, dans sa raffinerie de Passy, aux études les plus assidues et les mieux conduites. La difficulté était, à ce moment-là, d'obtenir en grand le sucre de betterave bien cristallisé. Il y réussit.

On ne se figure plus aujourd'hui, à cinquante ans de dis-

tance, et quand d'ailleurs toutes les circonstances ont tellement changé, l'intérêt passionné qui s'attachait alors à ces grands travaux.

Le 2 janvier de l'année 1812, M. Delessert annonce son succès à M. Chaptal. Celui-ci en parle aussitôt à l'empereur. L'empereur ravi s'écrie : « Il faut aller voir cela, partons. »

Et, en effet, il part. M. Delessert n'a que le temps de courir à Passy, et, quand il arrive, il trouve déjà la porte de sa raffinerie occupée par les chasseurs de la Garde impériale, qui lui ferment le passage. Il se fait connaître, il entre. L'empereur avait tout vu, tout admiré; il était entouré des ouvriers de la fabrique, fiers de cette grande visite; l'émotion était au comble. L'empereur s'approche de M. Delessert, et, détachant la croix d'honneur qu'il portait sur sa poitrine, il la lui remet.

Le lendemain, le *Moniteur* annonçait « qu'une grande ré-« volution dans le commerce français était consommée. » L'empereur avait raison. La science venait de créer une richesse nouvelle, et qui s'est trouvée immense. Depuis Margraff, depuis Achard jusqu'à M. Delessert, depuis M. Delessert jusqu'à nous, l'art de tirer le sucre de la betterave a fait chaque jour de nouveaux progrès; il en fait chaque jour encore; et plus on étudie cette belle découverte sous le rapport du commerce, de l'industrie, de l'agriculture, plus elle paraît grande.

Tous ces efforts, toute cette ardeur, portés dans le champ de l'invention manufacturière, n'avaient point détourné M. Delessert de l'histoire naturelle, et surtout de la botanique. Il avait le don de se multiplier. A la fois manufacturier d'une

portée d'esprit supérieure, savant toujours attentif aux besoins des sciences et passionné pour elles, philanthrope dont les institutions seront le modèle éternel de la bienfaisance éclairée et sage, le privilége de cet homme rare a été de partager sa vie entre les occupations les plus diverses, les plus sérieuses, et de suffire à toutes.

Les plantes n'avaient pas cessé d'être l'étude la plus constante, le goût le plus vif de M. Delessert. Et lorsqu'une grande fortune vint s'unir à de grandes vues, il conçut la pensée généreuse de ne plus se borner à faire une collection, un herbier qui fût à lui seul, mais d'en faire un qui fût à tous les naturalistes, et la pensée savante de prévenir, autant qu'il le pourrait, la dispersion des herbiers célèbres.

C'est ainsi qu'il acquit, d'abord, les herbiers de Lemonnier, de Burmann, de Ventenat, etc.

Lemonnier et Ventenat lui donnèrent jusqu'à trente mille plantes, rassemblées de toutes les parties du globe; Burmann lui donna les plantes de l'Inde et du Cap; Palisot de Beauvois, celles de la Guinée, etc., etc.; il tira de l'Angleterre celles de l'Archipel indien, celles de la Nouvelle-Hollande, etc., etc. Je ne cite ici un petit herbier qui est de la main de Linné, je ne cite celui de Jean-Jacques, que comme deux ornements illustres de ces collections immenses; l'herbier général, le grand herbier de M. Delessert contient aujourd'hui plus de 86,000 plantes. C'est presque tout le règne végétal connu.

Les progrès de la botanique, d'abord si lents et de nos jours si rapides, se marquent par le nombre même des plantes qu'elle a successivement connues.

Théophraste ne connaissait que 500 plantes; Pline et Dio-

scoride en connurent de 7 à 800; Tournefort en connut 10,000, mais il y mêlait les variétés; Linné connut 7,000 espèces proprement dites; l'immortel ouvrage de Laurent de Jussieu en contient 20,000; celui de M. de Candolle en contiendra plus de 100,000.

On ne sait pas assez quelle est l'utilité des herbiers, ou plutôt des collections de tout genre en histoire naturelle. Sans ces collections, la science n'existerait pas.

La science commence avec Aristote, c'est-à-dire avec le premier homme de génie qui ait eu une collection.

Nous lisons, dans un passage de Pline, qu'Alexandre, lors de son expédition d'Asie, mit à la disposition d'Aristote plusieurs milliers d'hommes pour lui recueillir de toutes parts les productions les plus importantes de la nature, et qu'il consacra plusieurs millions aux frais de ces nobles recherches.

Le résultat de ces grands efforts fut l'*Histoire des animaux* d'Aristote, monument qui subsiste encore aujourd'hui comme l'un des plus glorieux à la mémoire même d'Alexandre.

Le jardin des plantes de Paris, cette patrie des plus heureux génies, des Duverney, des Tournefort, des Vicq-d'Azyr, des Haüy, des Jussieu, des Cuvier, de Buffon, du grand Buffon, est le berceau de l'histoire naturelle moderne.

Toutes nos sciences naturelles modernes viennent de là.

C'est là qu'est née la chimie, exclue de la Faculté comme suspecte de n'avoir été connue ni d'Hippocrate, ni de Galien.

C'est là qu'est née, du moins pour la France, l'anatomie moderne. On proscrivait ailleurs la circulation, les vaisseaux

lactés, les vaisseaux lymphatiques; Dionis enseigna toutes ces choses au Jardin des Plantes.

Ai-je besoin de dire que c'est là qu'est née l'anatomie comparée moderne, entre les mains de Cuvier, la méthode naturelle entre les mains des Jussieu, la cristallographie entre les mains d'Haüy?

La plus nouvelle de nos sciences naturelles, la paléontologie, cette gloire du siècle, ce plus parfait des travaux de M. Cuvier, date encore du Jardin des Plantes. Toutes ces sciences, créées ou perfectionnées, données à la France et par la France au monde, ont été le fruit de la plus admirable collection qu'on ait jamais vue.

Ce que notre Musée est pour l'histoire naturelle entière, le Musée de M. Delessert l'est pour la botanique. En ce genre, ce que les nations les plus éclairées ont à peine pu faire jusqu'ici durant plusieurs siècles, un seul homme l'a fait durant sa vie d'homme : tant un esprit supérieur trouve de force dans un grand dessein! A côté de l'herbier est une bibliothèque, la bibliothèque botanique la plus riche que l'on connaisse. C'est dans ces galeries de livres et de plantes que M. Delessert a offert, pendant quarante ans, à tous les naturalistes d'Europe et du monde une hospitalité magnifique et simple. Ce beau Musée a toujours été public. Il a toujours suffi d'étudier les plantes, ou même de les aimer, pour y être admis. Les maîtres de la science venaient là pour y achever leurs ouvrages et pour y compléter leurs idées. Les jeunes gens y venaient, poussés à la fois par le désir de s'instruire et par l'espoir d'y voir les grands maîtres. Fontenelle nous raconte du grand ministre Colbert qu'il avait des

espions pour lui chercher et lui découvrir partout le mérite caché et naissant. M. Delessert était doué d'une ingénieuse sagacité qui lui a fait faire beaucoup de ces découvertes; et ce n'est pas de celles-là que l'Académie tient le moins compte.

Tout, dans ces galeries savantes, était disposé pour rendre l'étude aussi facile que sûre : chaque plante mise à une place marquée; chacune portant son nom, le nom du lieu qui l'a produite, souvent même le nom du botaniste qui l'a recueillie. Et si, enfin, quelque plante déplacée, quelque note perdue, quelque nom oublié, faisaient naître un moment le doute, aussitôt la mémoire prodigieuse de M. Delessert réparait tout. Sa mémoire, en cela toujours infaillible, a étonné tous ceux qui l'ont approché; il était le livre le plus complet de sa bibliothèque, et l'on n'a jamais pu dire de personne avec plus de vérité que de lui, qu'il portait le règne végétal entier dans sa tête.

Le seul regret qu'on éprouve à l'aspect de ce grand herbier, c'est de n'y pas trouver les plantes classées selon la méthode naturelle. Lorsque l'herbier commença, Linné régnait. Il fallait d'ailleurs un ouvrage qui contînt toutes les espèces, et l'on n'avait alors que celui de Sprengel, fondé, comme chacun sait, sur le système de Linné.

M. Delessert n'a jamais pu se résoudre à défaire dans son âge mûr, même sous le simple rapport matériel, ce qu'il avait fait avec tant de délice dans sa jeunesse.

Je dis *sous le simple rapport matériel,* car sous le rapport essentiel et philosophique, il n'a jamais vu la science que dans la méthode naturelle. Le magnifique ouvrage qu'il a publié sous le titre d'*Icones selectæ,* sera désormais une des bases les plus précieuses de cette méthode. C'est un choix des principaux types des familles naturelles de l'ou-

vrage de M. de Candolle, c'est-à-dire de l'ouvrage même qui remplace aujourd'hui celui de Sprengel, de l'ouvrage qui, le premier, présente, distribuées et classées selon la méthode naturelle, toutes les plantes.

A cet ouvrage des *Icones selectæ*, M. Delessert en a joint un autre, qui n'est pas moins important : c'est la *Description de la collection des coquilles* de M. de Lamarck.

On a fait de bonne heure des collections de coquilles, mais on les faisait pour les yeux plus que pour l'esprit.

Vers la fin du XVII^e^ siècle, Tournefort, ce lumineux esprit qui venait de mettre les plantes dans un si bel ordre, conçut le projet de porter la même clarté dans cette autre branche de l'histoire naturelle. La mort le surprit comme il était dans ces vues. Il avait rassemblé un grand nombre de coquilles. Il les donna à Louis XIV. « Le roi, dit un écrivain « contemporain, les accepta volontiers; et ce grand monar- « que ne regardoit pas le plaisir qu'il prenoit à les consi- « dérer comme un amusement indigne de lui. »

Lorsque M. de Lamarck fut nommé, en 1793, professeur au Jardin des Plantes, il était plus botaniste que zoologiste; mais bientôt, sa conscience aidant son génie, il fonda la science des animaux sans vertèbres. M. de Lamarck est l'auteur principal en conchyliologie, et c'est sur sa collection, sur la collection publiée par M. Delessert, que reposent, en ce genre, tous ses ouvrages.

M. Delessert avait déjà un riche cabinet de coquilles. Il y réunit cette collection savante. Il n'a cessé, pendant quarante ans, d'accroître ce vaste ensemble. Il tendait, en tout, vers

le grand. Il a fini par laisser à la conchyliologie un monument digne de celui qu'il a élevé à la botanique.

Mais, dans cette nouvelle étude, ce qui l'attachait surtout, c'étaient les coquilles fossiles.

L'étude des coquilles fossiles a cela de particulier, et, si je puis ainsi parler, d'illustre, que c'est elle qui nous a ouvert, sur l'histoire du globe que nous habitons, les premières vues. L'antiquité prenait les coquilles fossiles pour des *jeux de la nature*, erreur singulière, étrange, et qui pourtant a tenu la philosophie captive pendant vingt siècles.

« Il a fallu, dit Fontenelle, qu'un potier de terre, qui ne savait ni latin, ni grec, osât, vers la fin du XVI^e^ siècle, dire dans Paris et à la face de tous les docteurs que les coquilles fossiles étaient de véritables coquilles déposées autrefois par la mer dans les lieux où elles se trouvaient alors..... et qu'il défiât hardiment toute l'école d'Aristote d'attaquer ses preuves. »

Ce potier de terre, *qui défia toute l'école d'Aristote*, était Bernard Palissy, génie d'un ordre supérieur, le premier homme qui ait fait des leçons publiques d'histoire naturelle dans Paris, ce simple ouvrier qui, par la seule force de son esprit, s'éleva jusqu'à la belle expression de *philosophie naturelle*, consacrée depuis par Newton.

La véritable nature des coquilles fossiles une fois reconnue, tout a changé de face. On s'est demandé comment ces coquilles, ces *dépouilles* d'animaux marins, se trouvaient sur la terre, dans la terre, si loin des mers; l'idée des révolutions du globe est venue, et avec cette idée toute une philosophie nouvelle a paru.

Deluc, le maître de M. Delessert en géologie, a montré

que la dernière des révolutions du globe n'est point ancienne, que l'homme est nouveau sur la terre.

L'antiquité croyait le monde *éternel, immuable, toujours le même.* Nous savons tous aujourd'hui que cela n'est point.

Jamais la science ne nous a révélé de plus grandes choses ; et c'est bien ici que Bossuet pourrait s'écrier encore : *Qu'on voit la suite des desseins de Dieu.*

On voit le grand ouvrage du monde qui commence, qui se continue, qui s'achève. Dans *ses desseins suivis*, Dieu toujours avance : il va de la matière à la vie, de la vie à l'intelligence, de l'intelligence à l'âme, et il ne s'arrête que lorsqu'il a créé l'homme, c'est-à-dire l'être qui le connaît.

C'étaient là les grandes vues que M. Delessert cherchait dans nos sciences; et, quoiqu'il en aimât tout, il n'en admirait rien tant que cette progression sublime qu'elles nous offrent, et, si je puis ainsi dire, cette échelle de découvertes, dont la plus élevée, la dernière, nous découvre Dieu.

Nous venons de voir que M. Delessert, manufacturier, avait ouvert à son pays de nouvelles sources de richesses, et que, savant, il avait livré aux sciences les trésors les plus magnifiques. Il me reste à faire connaître sa carrière de philanthrope.

Il l'avait commencée dès 1800, en fondant à Paris un établissement qui fut un moyen nouveau d'assurer, pendant la saison rigoureuse, la subsistance du pauvre.

L'année suivante, quelques jeunes amis voulurent partager ses travaux. De cette réunion naquit une Société qui prit le nom de *philanthropique*, et qui, digne de ce beau nom

(car il n'en est point de plus beau quand il est sérieux), se donna pour champ d'études l'art de faire le bien.

Elle s'occupa d'abord de l'enfance. Ce qu'elle fit en ce genre a été le germe de toutes ces institutions utiles et touchantes, que nous voyons chaque jour se développer.

Après l'enfance vint la maladie. Nos jeunes philanthropes établirent, dans chaque quartier de Paris, une maison à laquelle ils donnèrent le nom de *Dispensaire*, et où l'on distribue en effet, où l'on *dispense*, à chaque moment du jour, et pour tous les maux, des médicaments, des secours, des conseils éclairés.

Je trouve, dès ces premiers temps, le nom de M. Delessert partout où il y a du bien à faire. Le Conseil des Hospices est créé en 1801, et M. Delessert en est aussitôt nommé l'un des membres. C'est là qu'il fut le collègue de tous ces hommes éminents dont la reconnaissance publique a consacré la mémoire : les Mathieu de Montmorency, les Daguesseau, les Pastoret, les Séguier, les Parmentier, les La Rochefoucauld-Liancourt.

La comptabilité des Hospices, aussi compliquée que vaste, demandait une organisation d'une perfection peu commune. M. Delessert en fit une comptabilité modèle.

Au Conseil, il portait les lumières du grand administrateur : dans ses visites aux Hospices, il portait l'âme de Fénelon.

Voici un trait qu'il n'a pu cacher.

Un jour qu'il avait consacré une de ces visites aux *Enfants malades* et aux *Enfants trouvés*, il revenait, s'acheminant à pied. Ce jour était un premier janvier. A peine avait-il fait quelques pas, qu'il rencontre des groupes d'enfants, joyeux comme ils le sont tous ce jour-là, et dont les petits

bras pliaient sous le poids des cadeaux dont on les avait comblés. Cette vue rappelle à l'excellent homme les enfants qu'il vient de quitter, pauvres créatures abandonnées et qui ne connaîtront jamais ces joies. M. Delessert ne peut supporter cette idée. Avant de rentrer chez lui, il avait expédié aux deux Hospices une cargaison, très-capable d'y apporter un bonheur aussi vif qu'inattendu. Depuis ce moment, les enfants *malades* et les enfants *trouvés* ont eu, chaque premier janvier, leurs cadeaux et leurs joies du jour de l'an.

On ne peut écrire la vie de M. Delessert, sans que le vers de Térence, ce beau vers où un grand poëte a voulu peindre l'idéal de l'homme de bien, ne vienne, à chaque instant, sous la plume. Son universelle bonté embrassait tout. Tous les besoins, toutes les souffrances trouvaient en lui, ou par lui, secours et protection. Mais il ne suffisait pas de soulager ces maux, il fallait tendre à les prévenir; et c'est, pour en venir là, que M. Delessert a consacré tant de soins, tant d'efforts, une persévérance si généreuse et si énergique, à fonder et à développer, parmi nous, les caisses d'épargne.

L'Angleterre a eu des caisses d'épargne dès 1816. Si l'Angleterre n'avait pas été conduite par le caractère propre de son génie philanthropique à cette institution, M. Delessert y serait arrivé de lui-même, car c'était là ce qu'il cherchait. Dès 1818, il propose à une réunion de capitalistes, dignes par leurs lumières de l'entendre et par leur cœur de le seconder, l'établissement d'une caisse d'épargne. Cette proposition fut adoptée. Paris eut une caisse d'épargne dès cette année même. Deux ans plus tard, Bordeaux, Rouen, Marseille, Metz, Nantes, le Havre, etc., avaient aussi des caisses

d'épargne. Enfin, en 1834, M. Delessert présenta à la Chambre des Députés un projet de loi. Ce projet devint la base de la loi du 5 juin 1835, loi fondamentale qui place les caisses d'épargne sous la tutelle de l'État, sous la garantie du Trésor public, qui en fait, ce que M. Delessert désirait tant, une institution nationale.

Le grand objet de la noble institution des caisses d'épargne est de développer dans le cœur de l'homme le germe d'une vertu que Dieu y a mise, de l'économie. On ne sera pas surpris de trouver dans ma bouche le langage du naturaliste. Dieu a mis dans le cœur de l'homme des vertus nécessaires, comme il a mis ailleurs des instincts. Ces vertus, ces instincts, sont le guide invisible qui conduit tout :

Un esprit vit en nous et meut tous nos ressorts (1).

La prévoyance admirable des parents pour les petits est partout.

Or, au temps dont je parle, non-seulement la législation n'avait rien fait pour développer cette vertu si essentielle, elle maintenait des institutions qu'on eût pu croire imaginées pour l'étouffer. Depuis longtemps, tout ce que la France avait de politiques élevés, de penseurs sensés, réclamait la suppression des *loteries* et des *maisons de jeux*, et la réclamait en vain. En entrant à la Chambre des Députés, M. Delessert s'imposa la mission de combattre ces deux fléaux et de les faire abolir. Ils le furent enfin, et dès lors les caisses d'épargne, libres de cet obstacle, prirent tout leur essor.

---

(1) La Fontaine.

Depuis trente ans qu'on s'occupe des caisses d'épargne, tout a été dit sur cette institution, qui donne à chacun les moyens de se faire une propriété, un capital; qui, disait M. de La Rochefoucauld, « apprend à la classe ouvrière que « l'épargne est déjà la richesse; » qui, dit aujourd'hui M. Thiers, « permet à l'ouvrier de se préparer le véritable « asile des vieux jours, une famille aisée et reconnaissante; » et qui fonde le bien-être public sur les deux grandes bases de toute société humaine : le travail et l'économie.

Je cherche le principe secret, le caractère propre de toutes ces institutions diverses dont le génie bienfaisant de M. Delessert a doté notre siècle.

Et je remarque qu'aucune de ces institutions ne contrarie ces vertus nécessaires dont je parlais tout à l'heure, ces ressorts profonds, ces vrais, ces grands instincts de l'espèce humaine. C'est ainsi que M. Delessert institue les caisses d'épargne, qui conduisent l'homme du travail à l'économie, et par l'économie au bien-être; et c'est ainsi qu'il blâme l'aumône, non comme vertu privée sans doute, mais comme institution publique, car, et c'est lui-même qui parle : « les établissements « de charité et de secours public, en encourageant la paresse, « tendent à augmenter le mal même qu'ils prétendent guérir. »

Jamais homme ne fut plus sage dans le conseil, plus persévérant dans l'action, plus conséquent dans ses vues. Je n'ai pas à le suivre ici dans sa carrière politique; et cependant puis-je ne pas rappeler cette raison supérieure, ce jugement sain, cette prudence consommée, qu'il portait dans les affaires publiques? Il semblait s'être inspiré de la

grande pensée de Montesquieu : « Que l'esprit de modération « doit être celui du législateur. »

Ses *Discours* sur le commerce, sur l'industrie, sur les finances, seront toujours médités par ceux qui, se faisant de la politique une étude sérieuse, cherchent partout, et surtout dans ces matières positives et compliquées, les résultats précieux d'un savoir pratique. On peut croire, d'ailleurs, que l'art de conduire une fortune privée jusqu'à un certain point de grandeur touche d'assez près à l'art de conduire heureusement la fortune d'un grand État. « L'État, « disait Fénelon, n'est point un fantôme; c'est l'assemblage « de toutes les familles. »

M. Delessert avait été nommé, en 1815, membre de la Chambre des Représentants.

Il a siégé à la Chambre des Députés pendant vingt-cinq ans.

Il a été pendant près d'un demi-siècle régent de la Banque de France et membre du conseil général des hospices.

Durant le cours de sa grande vie, M. Delessert a été lié avec presque tout ce que la France a eu d'esprits éminents. Sa maison était le rendez-vous naturel des hommes supérieurs, des hommes de bien. C'est là qu'on voyait, et je ne cite ici que ceux que des liens plus étroits y ramenaient sans cesse, c'est là qu'on voyait les Mathieu de Montmorency, les Dupont de Nemours, les de Gérando, les Parmentier, les Rumford, les Camille Jordan, les Casimir Périer, le général Foy, Deluc et Saussure, que Paris a souvent partagés avec Genève, M. de Humboldt, que l'Académie est fière de partager avec l'Allemagne, le vertueux duc de La Rochefoucauld, le grand botaniste de Candolle, le bon, le

spirituel, l'énergique M. Raynouard, et tant d'autres.

Les goûts de M. Delessert avaient fait de cette habitation un centre où les sciences, les arts, tout ce qui peut étendre et charmer l'esprit, se trouvait réuni. Il n'était point une invention utile ou gracieuse dont il ne voulût qu'on jouît d'abord chez lui. Il se plaisait à encourager les arts. Il s'était créé une riche galerie de tableaux, dont le choix exquis manifestait à la fois la pureté de son goût et la pureté de son âme.

Autant il aimait à recevoir chez lui, parce qu'il savait donner à ces réunions tout le charme de la vie de famille, autant il aimait peu à aller dans le monde, où il ne trouvait plus ce cher accompagnement. Il lui fallait, pour être heureux, la présence de ses frères, de leurs enfants, de ses amis, et même de ses chères plantes, qu'il comptait aussi au nombre de ses amis.

M. Delessert excellait par l'ordre. Un grand ordre abrége tout. Aussi rien ne le troublait-il, ni le nombre, ni l'importance des occupations. On le trouvait toujours libre, toujours calme, toujours maître des choses et de lui-même.

Tout, en lui, respirait la vertu. Sa bonté infinie se révélait par un regard plein de douceur. Son langage était simple, sa parole rare, toute sa nature recueillie et grave.

Nul homme n'inspirait à la fois plus de confiance et plus de réserve.

Il était profondément pieux, mais d'une piété aussi éclairée que sage. Il parlait peu de la religion, et s'en occupait sans cesse. Tous les jours, il lisait et relisait la Bible.

On sent quelle puissance d'affection la nature devait avoir mise dans ce cœur si pur. Il avait été le fils le plus tendre, il

fut le frère le plus dévoué. Devenu le chef de sa famille, ses frères et ses sœurs eurent la part la plus délicate de cette âme si belle. Il devint le père de leurs enfants, et chercha, en les aimant, à tromper le vide que lui avait laissé la perte d'une compagne, choisie dans le sein même de sa famille.

M. Delessert avait épousé une de ses cousines. Il la perdit sans qu'elle lui eût laissé d'enfants. Il conserva de cette perte des regrets qui ont accompagné toute sa vie, et dont on trouve l'expression touchante dans cette épitaphe, tirée par lui de la Bible :

Elle a choisi la bonne part, elle ne lui sera point ôtée.

La famille et les amis de M. Delessert se flattaient de voir longtemps encore sa vieillesse se prolonger; mais il était atteint d'une maladie organique du cœur. Vers la fin de 1846, cette maladie fit de rapides progrès.

Ce qui l'occupa dès lors, ce fut l'avenir des œuvres généreuses qui avaient rempli sa vie.

Il voulut conserver aux sciences ses collections; et, pour cela, il les a léguées à ses deux frères. Ai-je besoin de dire qu'elles sont restées publiques?

Dans un testament, dernier monument de sa bienfaisance, où il n'est pas une seule institution charitable qui ne soit rappelée par un don, on lit ces mots : « Je lègue aux *caisses d'épargne* cent cinquante mille francs pour être distribués entre trois mille ouvriers, qui prendront l'engagement de n'accepter ce don que comme un premier fonds qu'ils auront à augmenter. »

Quelques pages, dernier reflet de sa belle âme, furent

alors publiées par lui ; là il révèle aux autres le bonheur que l'on goûte à faire du bien, et ces mots, qu'on y trouve, laissent apercevoir quel était le calme, quelle était la douceur de ses pensées. « Après une bonne action, dit-il, on éprouve un « sentiment de bonheur qui est au-dessus de toute idée : on « dort d'un sommeil paisible, et tous les songes sont agréables. »

Il s'éteignit le 1^er^ mars 1847.

C'était la mort du sage : le terme béni d'une vie heureuse, l'heure sereine promise au juste; et, selon l'expression de notre grand poëte, *le soir d'un beau jour.*

NOTES.

Page cxix. *Dès que l'Académie put se donner, en* 1816, *des associés libres, elle s'adjoignit M. Delessert...*

Il fut élu le 8 juillet 1816.

Page cxx. *Étienne Delessert, père de Benjamin,... s'établit à Paris en* 1777. *Son nom y fut bientôt entouré du plus grand respect...*

On peut en juger par le fait suivant, que cite M. d'Argout dans son bel Éloge de M. Benjamin Delessert.

« Le malheureux Louis XVI lui donna une preuve de confiance et d'es-
« time. En 1782, une crise atteignit l'industrie des soies; les ouvriers sans
« travail menacèrent la tranquillité publique. Plusieurs millions furent
« confiés à Étienne, à charge de les distribuer en secours. Il fit mieux;
« il traita avec les fabricants, il leur fournit des fonds, il les détermina à
« rouvrir leurs ateliers, et la détresse disparut comme par enchantement.
« Au lieu de recevoir d'humiliantes et d'improductives aumônes, les ou-

« vriers gagnèrent de légitimes salaires. Le capital fut restitué au ministre « étonné, sans les intérêts, il est vrai, mais la cessation d'une crise dou- « loureuse est le plus magnifique de tous les intérêts. »

Page cxx. *Il introduisit des améliorations notables dans l'agriculture et dans l'industrie...*

Il perfectionna les méthodes d'assolement; il concourut à faire entrer en France les six mille *mérinos* que l'on tira d'Espagne en 1795; il forma la première compagnie d'assurances contre l'incendie; il contribua puissamment au développement de l'industrie des tissus de gaze; etc., etc.

Il était né à Lyon en 1735, il mourut à Paris en 1816.

Page cxx. *Sa compagne, madame Delessert...*

Née Boy de la Tour (de Neufchâtel). Elle mourut à Paris en 1816.

Page cxx. *Jean-Jacques Rousseau... conseilla de choisir moins un précepteur savant que..., et, ce sont ses expressions, d'une* patience invincible...

Je place ici la *lettre* de Jean-Jacques, que je dois à une confiance dont je suis profondément touché.

Tout est remarquable dans cette *lettre :* le bon sens y domine partout; il y inspire chaque pensée; il y dicte chaque expression. C'est une des meilleures pages de Jean-Jacques.

« A MADAME DELESSERT, NÉE BOY DE LA TOUR, A LYON.

« Je ne suis pas surpris que la nature, que vous vous appliquez à secon- « der, accélérant les progrès de vos petits bambins, vous fasse déjà sentir « la nécessité de leur donner un guide sous les yeux d'un père, qui serait « certainement le meilleur, mais qui ne peut pas tout suivre. Sur les dis-

« positions où il me paraissait être, j'aurais cru votre choix déjà fait. S'il « ne l'est pas encore, j'insiste sur l'importance de préférer un naturel « heureux à de grandes connaissances, et un homme sage à un homme « instruit. Je ne le redirai jamais assez, la bonne éducation doit être pu- « rement négative ; il s'agit moins de faire que d'empêcher ; le vrai maître « est la nature, l'autre ne fait qu'écarter les obstacles qui la contrarient ; « l'erreur même n'entre qu'avec le vice, et toute bonne judiciaire a sa « source dans un cœur sain. L'éducation de l'enfance ne consiste qu'en « bonnes habitudes à prendre. Un enfant qu'on n'a pas laissé engourdir « dans la paresse, ni contracter des passions vicieuses, parvenu sain de « cœur et de corps à douze ans, fait alors plus de vrais progrès en deux « ou trois ans dans les connaissances utiles et même agréables, qu'on n'en « peut obtenir jusqu'à cet âge par des études forcées que le goût n'anime « jamais. De ces principes, qui me paraissent confirmés par l'expérience, « je conclus que ce ne sont point du tout des talents distingués ni des qua- « lités brillantes qu'il faut chercher dans le maître de vos enfants, mais « seulement celles qui rendent un homme maître de lui-même et fidèle à « son devoir. Qu'il soit doux, attentif, et surtout d'une patience invincible. « Voilà les qualités indispensables. Du reste, ne cherchez nullement qu'il « fasse admirer sa faconde, ni qu'il soit un beau péroreur. Je vous épar- « gnerais ces redites triviales de choses que vous savez mieux que moi, si « je ne savais combien les meilleurs esprits ont peine à se garantir de la « nuisible tentation de faire briller dans leurs enfants des talents pré- « coces. »

« Paris, 23 août 1774. »

Page cxxj. *Telle fut l'origine de ces* Lettres sur la botanique...

Ce fut pour l'instruction de la sœur aînée de Benjamin Delessert (depuis madame Gautier, personne aussi distinguée par son esprit que respectable par ses vertus), que ces *Lettres* servirent d'abord. C'est elle que Jean-Jacques appelle *la petite*.

« Votre idée, dit Jean-Jacques à madame Delessert, d'amuser un peu la « vivacité de votre fille, et de l'exercer à l'attention sur des objets agréa- « bles et variés comme les plantes, me paraît excellente; mais je n'aurais « osé vous la proposer de peur de faire le monsieur Josse. Puisqu'elle vient « de vous, je l'approuve de tout mon cœur, et j'y concourrai de même, « persuadé qu'à tout âge l'étude de la nature émousse le goût des amu- « sements frivoles, prévient le tumulte des passions, et porte à l'âme une « nourriture qui lui profite en la remplissant du plus digne objet de ses « contemplations.

« Vous avez commencé par apprendre à la petite... Sans vouloir faire « de votre fille un très-grand botaniste, je crois néanmoins qu'il lui sera « toujours utile d'apprendre à bien voir ce qu'elle regarde.....» (*Première Lettre.*)

Cette dernière remarque est pleine de justesse. L'étude des *sciences d'observation* n'a point, en effet, d'utilité plus grande que d'apprendre à *bien voir.*

Page cxxij. ...*Et qu'une mort prématurée devait ravir...*

Le jeune Étienne Delessert mourut de la fièvre jaune, à New-York, en 1794.

Page cxxij. ...*Témoin des essais de Watt.*

Benjamin Delessert se lia d'une amitié étroite avec le fils de ce grand inventeur.

Page cxxij. *Deluc, le savant géologue...*

C'est Deluc qui a le mieux démontré les rapports étonnants qui lient l'histoire physique du globe à nos traditions sacrées. Son livre a mérité le beau titre de *Commentaire de la Genèse.*

PAGE CXXV. ...*L'avenir militaire le plus brillant.*

Le général Kilmaine, si bon appréciateur du mérite militaire, l'avait distingué, et se l'était attaché comme Aide de camp.

PAGE CXXVJ. ...*Une raffinerie de sucre.*

Il perfectionna, dès le début, le raffinage du sucre. Sa raffinerie devint bientôt une des plus importantes de France.

PAGE CXXVJ. ...*D'une industrie nouvelle...*

« Aujourd'hui les manufactures françaises mettent en œuvre par « année de 60 à 70 millions de kilogrammes de coton; nous vendons à l'é- « tranger des produits confectionnés avec cette matière pour près de « 100 millions de francs, depuis le calicot le plus simple jusqu'à la mous- « seline, au tulle, à la dentelle. Et les fabrications consommées par la « France même sont incomparablement plus grandes, puisque des 60 mil- « lions de kilogrammes de coton brut mis en œuvre dans nos ateliers, la « totalité de nos exportations ne prélève pas, en poids net, 2 millions de « kilogrammes. » *Voyez* le remarquable Éloge de M. Benjamin Delessert par M. Charles Dupin.

PAGE CXXVJ. *Vers le milieu du XII^e^ siècle, on la transporta (la canne à sucre) dans l'Arabie, dans l'Égypte...*

On la trouve en Syrie, dès la fin du XI^e^ siècle (Michaud, *Histoire des Croisades*, t. 1, p. 394, 5^e^ édition); et je vois, dans une Note que me remet mon savant confrère à l'Institut, M. Reinaud, de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, qu'elle était cultivée en Susiane dès la première moitié du X^e^.

PAGE CXXVIJ. *En 1797, Achard, autre chimiste prussien...*

Achard était d'origine française. Il est assez illustre pour que ce soit un devoir de le rappeler. Il avait commencé ses recherches dès 1772.

Page cxxvij. *Le sucre de raisin n'est pas le même que celui de la canne à sucre...*

Il a beaucoup moins de saveur; il faut en employer plus du double pour obtenir le même résultat; il se dissout plus difficilement dans l'eau; sa solution s'aigrit très-vite, etc.

Page cxxvij. *La difficulté était, à ce moment-là, d'obtenir en grand le sucre de betterave bien cristallisé. Il y réussit.*

Il employait surtout le procédé-*Bonmatin* (décrit dans le *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale,* année 1812, p. 147).

M. Delessert contribua à faire accorder à M. Bonmatin une *gratification à titre d'encouragement* (*Ibid.*, p. 149).

J'extrais de la correspondance de M. Delessert avec M. de Sussy, ministre des manufactures et du commerce, les détails suivants qui mettent dans son vrai jour l'influence que M. Delessert a exercée sur le développement de l'industrie qui nous occupe.

Extrait d'une lettre de M. Delessert à M. de Sussy. (Moniteur *du lundi* 13 *juillet* 1812.)

« Depuis qu'on s'occupe de ce nouveau genre d'industrie, on connaît deux méthodes principales d'extraction.

« La première est par la cristallisation lente, au moyen des étuves. La seconde est par le grenage, ou la cristallisation dans les vingt-quatre heures.

Cette dernière méthode, qui est celle qu'on emploie dans les colonies pour le sucre de canne, présente un grand avantage sur la cristallisation lente au moyen des étuves; les produits sont plus abondants, plus beaux, et il y a économie de combustible, de main-d'œuvre, de machines et de temps.

« On a donc mis beaucoup de prix à chercher la manière la plus sûre de parvenir à cette cristallisation prompte. M. Hermstaedt s'en est occupé un

des premiers, et il indique un moyen de l'opérer en n'employant que de la chaux. M. Achard en indique un autre dans ses ouvrages ; mais le peu de supériorité qu'il semble accorder à cette méthode, fait croire qu'on ne peut pas toujours réussir par ses procédés, qui consistent à employer d'abord de l'acide sulfurique, ensuite de la craie, et en dernier lieu de la chaux. Le succès de cette opération paraît dépendre de la qualité de la betterave... Ce procédé avait besoin d'être perfectionné et modifié.

« C'est ce qu'a fait M. Bonmatin : après de nombreuses expériences, il est parvenu à suivre une méthode dont le succès paraît infaillible, lorsqu'on a un peu l'habitude de ces manipulations, et qui peut réussir même avec des betteraves de qualité inférieure.

« Il a supprimé l'emploi de la craie et du lait comme inutile; il se borne à faire usage d'abord de la chaux, et ensuite de l'acide sulfurique dans des proportions convenables et qu'il n'a pu trouver qu'après une foule d'essais : c'est dans ces proportions et dans la manipulation que consiste le mérite de sa découverte.

« J'ai employé ce procédé par le grenage pendant plus d'un mois, et il m'a constamment réussi.

« Le lendemain de l'opération, le sucre est cristallisé dans de grandes formes, et on peut les percer pour laisser égoutter la mélasse; quelques jours après, on peut les terrer et ensuite en faire du sucre en pain ordinaire.

« Le procédé de M. Bonmatin, qui a déjà la sanction de l'expérience, me paraît donc réunir de grands avantages, et être le meilleur de ceux qu'on a découverts jusqu'à présent.

« Paris, 28 mai 1812. »

Extrait d'une lettre de M. de Sussy à M. Delessert.

« Paris, le 10 décembre 1813.

« Monsieur, les nouveaux renseignements que vous me donnez m'ont été d'autant plus agréables qu'ils me fournissent la preuve de votre persévérance à propager la fabrication du sucre indigène, fabrication pour la-

quelle vous continuez de préférer la méthode du sieur Bonmatin, que vous considérez comme moins coûteuse et produisant un plus beau sucre que toutes celles dont on a fait usage jusqu'à présent. Je savais qu'une grande partie des fabriques de sucre avaient adopté les râpes du sieur Thierry et les presses du sieur Lauvergniaz; mais j'ignorais que ces deux machines n'étaient parvenues au degré d'utilité qui les distingue, que d'après les nombreuses expériences auxquelles les inventeurs les ont soumises dans vos ateliers et à vos frais. C'est un important service que vous avez rendu aux entrepreneurs des sucreries. Vous donnez aussi des conseils à ceux d'entre eux qui ont recours à vos lumières : vous contribuez au succès de leurs entreprises en leur faisant part des résultats de votre expérience. Ainsi, l'art de fabriquer le sucre de betterave vous doit beaucoup... »

Le passage suivant, tiré d'une lettre de M. Delessert, fait voir avec quelle bonne foi et quel bon sens il donnait des conseils sur ce genre de fabrication.

« ...Vous m'avez fait l'honneur de m'écrire le 3 avril pour m'inviter à faire connaître à M. Bourcier de Montureux les procédés que j'emploie pour le grenage du sucre : s'il s'était plus tôt adressé à moi, comme l'ont fait d'autres fabricants de Nancy, je lui aurais donné des renseignements qui auraient pu lui être utiles. J'emploie habituellement le procédé de M. Bonmatin, que je crois avoir des avantages sur tous les autres.

« Mais on peut grener par tous les procédés connus jusqu'à présent où l'on emploie la chaux, l'acide, la craie, le sang de bœuf, le blanc d'œuf, le charbon, etc.; le succès dépend de l'ensemble des opérations, de la bonté des machines, de la promptitude des travaux, de l'habileté des ouvriers, de l'habitude que donne l'expérience; mais, avant tout, de la bonne qualité de la betterave.

« Plusieurs essais m'ont convaincu que la non-réussite de la plupart des établissements provient de ce qu'ils ont employé des betteraves blanches ou roses ou cerclées de rose, et de celles appelées betteraves de Prusse.

Disette ou abondance, les seules betteraves que j'emploie sont les jaunes; et en ayant de bonnes machines à râper, de bonnes presses, de bons fourneaux, et des ouvriers intelligents, il est difficile de ne pas réussir. »

En 1814, M. Delessert avait établi dix fabriques de sucre de betterave: à Nantes, Blois, Montargis, dans le Pas-de-Calais, dans les environs de Paris, etc., etc.

Page cxxviij. *Il avait le don de se multiplier...*

C'est ainsi qu'à l'époque même où sa carrière commerciale et industrielle l'occupait le plus, il se délassait en imitant Franklin. Il avait établi dans sa maison une petite imprimerie.

Il traduisit et imprima la *Morale des échecs* de Franklin. Il imprima le poëme sur les *Disputes* de Rulhières, etc.

Ces deux morceaux, que j'ai sous les yeux, portent au bas: An III de la République. *Imprimerie de B. Delessert.*

Page cxxix. ... *Il tira de l'Angleterre...*

La Compagnie des Indes lui fit, en 1828, un don digne d'elle et de lui. Elle avait décidé que les *doubles* de ses magnifiques herbiers seraient distribués entre les principaux Musées botaniques d'Europe. Celui de M. Delessert ne pouvait pas être oublié.

M. Delessert fit connaître en ces termes, à l'Académie, la noble résolution de la Compagnie des Indes:

« Il est difficile de se faire une idée de l'étendue et de la richesse de « ces collections; mais l'on doit s'empresser de rendre un témoignage écla- « tant à la libéralité avec laquelle la Compagnie des Indes anglaises a « voulu faire jouir les savants étrangers de ses trésors. — Cet acte de mu- « nificence et d'intérêt pour les progrès de la botanique est bien digne « d'être apprécié par tous les amis des sciences, et j'ai pensé que l'Acadé- « mie l'apprendrait avec plaisir. »

Page cxxix. *L'herbier général de M. Delessert contient aujourd'hui plus de* 86,000 *plantes.*

J'entends plus de 86,000 *espèces :* comme *échantillons*, cet herbier contient près de 300,000 plantes.

Voyez pour le détail des *espèces*, l'ouvrage de M. Lasègue, intitulé : *Musée botanique de M. Benjamin Delessert*, etc., ouvrage qui nous offre l'histoire la plus intéressante et la plus exacte de ce Musée.

Page cxxxij. .... *Fondé, comme chacun sait, sur le système de Linné.*

Ou, plus exactement, qui n'est que l'ouvrage même de Linné, complété par Sprengel.

Page cxxxij. ....Sous le titre d'*Icones selectæ*.....

Icones selectæ plantarum quas in systemate universali, ex herbariis Parisiensibus, præsertim ex Lessertiano, descripsit Aug. Pyr. De Candolle, ex archetypis speciminibus a P. J. F. Turpin delineatæ, et editæ a Benj. Delessert.

Il y en a cinq volumes. Le premier est de 1820; le dernier de 1846. Le quatrième est dédié à M. De Candolle, que la science venait de perdre.

Page cxxxij. ... *Il n'a jamais vu la science que dans la méthode naturelle...*

Il s'exprime ainsi dans la Préface des *Icones selectæ*, en parlant du *Système naturel des végétaux* de M. De Candolle :

...Et enim antevulgatis longè supereminens habebitur opus, in quo vegetabilia omnia hucusque in orbe toto detecta, juxta methodicam familiarum naturalium seriem digesta, et ideo affinitatum, nec arbitrariis systematis legibus adstricta,... noscere et dignoscere botanicis dabitur. T. 1, Page 1.

M. De Candolle lui avait dédié, en 1802, sous le nom de *Lessertia*, un genre de plantes de la famille des Légumineuses.

En 1813, M. Lamouroux lui en dédia un autre sous le nom de *Delesseria*. Ce dernier genre se compose d'un certain nombre d'espèces, détachées du genre *fucus* de Linné.

Page cxxxiij. *...C'est la Description de la collection des coquilles de M. de Lamarck.*

Plus exactement, des coquilles *inédites*. Voici le titre de l'ouvrage : *Recueil de coquilles inédites, décrites par Lamarck dans son Histoire naturelle des animaux sans vertèbres, et non encore figurées*. 1841.

Page cxxxiij. *M. Delessert avait déjà un riche cabinet de coquilles...*

Il avait acheté, en 1833, la collection de coquilles faite par Dufresne; en 1840, il acheta celle de Lamarck; en 1842, celle de M. Teissier, colonel du génie et directeur des fortifications des colonies; en 1845, celle de M. Kéraudren, inspecteur général du service de santé de la marine, etc. Aujourd'hui la collection de M. Delessert se compose d'au moins 150,000 coquilles, représentant 25,000 espèces. *Voyez* l'intéressante Notice de M. Chenu sur le *Musée conchyliologique de M. Delessert.*

Page cxxxv. *Il l'avait commencée (sa carrière philanthropique) dès* 1800, *en fondant à Paris un établissement...*

L'établissement des *soupes économiques*. Ce fut surtout pendant les années de disette que l'utilité de cet établissement se fit sentir. On y distribua, par année, jusqu'à quatre millions de *soupes*. Le Premier Consul s'empressa de s'inscrire pour mille souscriptions.

Page cxxxv. *L'annee suivante, quelques jeunes amis...*

Ces jeunes amis étaient ses deux frères, son cousin M. Delaroche, son ami M. De Candolle, etc.

T.

Page cxxxvj. *Nos jeunes philanthropes établirent... une maison à laquelle ils donnèrent le nom de Dispensaire...*

Ces *Dispensaires* furent établis sur un rapport très-intéressant de M. Delessert lui-même.

Il aurait voulu qu'on les multipliât beaucoup plus. Les entrées dans les Hôpitaux en eussent été diminuées d'autant. Il voyait avec peine les malades privés des soins de leurs familles. Il voyait avec peine les familles se déshabituer de ces soins pieux. Un de ses grands principes de charité était (je l'ai dit p. cxxxix) de fortifier en tout les vertus *naturelles, nécessaires;* et il n'en est point de plus nécessaires que celles de famille.

Page cxxxvj. *C'est là qu'il fut le collègue de tous ces hommes éminents...*

Aux noms que je cite dans le texte, il faut ajouter ici les noms, non moins respectables, des Bigot de Préameneu, des Duquesnoy, des Frochot, des Barbé-Marbois, etc.

Page cxxxvij. *Dès* 1818, *il propose à une réunion de capitalistes dignes, par leurs lumières, de l'entendre...*

Cette réunion était celle des administrateurs de la Compagnie royale d'assurances : MM. Barillon de l'Ile-de-France, Boucherot, Caccia, Callaghan, Cottier, Jean-Charles Davillers, Delapanouze, Flory, Goupy père, Guérin de Foncin, Guiton, Heutsch, Hottinguer, Jacques Laffitte, Laîné, Jacques Lefebvre, Scipion Périer, Pillet-Will et Vital Roux.

Page cxl. *Il a été pendant près d'un demi-siècle..... membre du conseil général des hospices.....*

Il avait été nommé, de très-bonne heure, juge au Tribunal de Commerce; il fut ensuite membre de la Chambre de Commerce de Paris, et membre du Conseil général du commerce.

Il a été l'un des premiers fondateurs de la *Société d'Encouragement pour l'industrie nationale :*

« C'est en 1802 que furent jetés les fondements d'une institution vrai-

« ment patriotique et nationale, qui fera un éternel honneur au nom « Delessert, parce qu'elle est née dans votre maison, la *Société d'encoura-* « *gement pour l'industrie nationale*..... Qui peut dire que cette Société se « serait formée, si votre frère n'avait pris l'initiative?... » (Extrait d'une Notice inédite sur M. Delessert par M. Jomard, Notice où revivent en foule des souvenirs précieux, et qui est adressée à M. François Delessert.)

C'est chez M. Delessert que se réunirent d'abord les fondateurs de cette institution qui a rendu de si grands services à notre industrie.

Voici leurs noms : Montgolfier, Parmentier, Cadet de Vaux, Tessier, Chaptal, Costaz, Darcet, de Gérando, Lasteyrie, Huzard, etc., etc.

En 1819, M. Delessert fut adjoint à M. de La Rochefoucauld pour le travail important de la réforme des prisons. Ces deux hommes de bien, dans leur généreuse émulation, consacrèrent de longues études à cette question qui touche aux intérêts les plus essentiels de la société, et qui occupe, aujourd'hui encore, les meilleurs esprits.

M. Delessert a été, pendant vingt ans, Président de la Caisse d'épargne.

Il était membre de la Société d'Agriculture de Paris, des Sociétés Linnéennes de Paris, Londres, Stockholm, Copenhague, de l'Académie des *Curieux de la nature* d'Allemagne, de la Société Wernérienne d'Édimbourg, du Musée académique de Genève, de la Société helvétique des sciences naturelles de Soleure, de la Société de Botanique de Ratisbonne, de la Société des Arts et des Sciences de Batavia, de la Société royale de Hollande, de l'Académie royale d'Agriculture de Turin, etc., etc.

Il avait été créé Baron en 1812. Il fut promu, en 1837, au grade de Grand Officier de la Légion d'honneur.

Page cxl. *Le grand botaniste De Candolle....*

Dans une *Notice* pleine d'intérêt, M. Alphonse De Candolle cite un passage tiré des Mémoires inédits de son illustre père, où celui-ci peint, avec une rare délicatesse, le sentiment profond qui l'attachait à M. Delessert.

« J'avais senti très-vite pour lui un sentiment mêlé d'affection et de

« déférence, soit par l'effet de son caractère, soit parce qu'il avait quel-
« ques années de plus que moi, et à l'âge où j'étais alors, cette différence
« est sensible. Un jour madame Gautier me dit, en parlant de je ne sais quoi :
« *Vous qui êtes le meilleur ami de mon frère Benjamin*, etc. Ce mot me
« frappa comme une révélation ; j'eus peine à retenir des larmes de joie.
« Je ne pus fermer l'œil de la nuit, la passant tout entière à repasser
« dans mon souvenir les circonstances qui pouvaient me faire admettre
« ce mot comme une réalité ; j'y parvins, j'en suis resté persuadé..... »

Page cxlij. *M. Delessert avait épousé une de ses cousines...*

Laure Delessert. Elle était née en Suisse en 1772. Elle mourut à Paris en 1823.

Tant qu'elle vécut, M. Delessert allait, presque chaque année, visiter la Suisse, où il retrouvait une branche de sa famille pour laquelle il avait conservé une affection profonde.

Page cxlij. *Quelques pages, dernier reflet de sa belle âme....*

Ces *pages* portent le titre de *Fondations qu'il serait utile de faire.*

Elles semblent être le résultat de l'expérience acquise dans une vie passée tout entière à faire du bien.

On peut en juger par les deux phrases que voici :

« Le plus grand plaisir que l'on puisse goûter, et le seul qui soit sans
« mélange, est celui que l'on éprouve dans l'accomplissement d'une bonne
« action.

« Depuis le verre d'eau apporté au malade jusqu'aux plus magnifiques
« donations, tout devient une source de jouissances. »

Il avait publié, en 1840, un recueil de maximes intitulé : *Le Guide du bonheur.* Ces maximes, tirées de nos moralistes, s'adressent à la jeunesse. « Il sera, dit-il, amplement récompensé, si une seule personne
« peut devenir meilleure en lisant ce recueil. » Quelques pensées y sont de lui, celles-ci, par exemple :

« Les bonnes actions rendent la vie heureuse.

« La prière est la parole de la conscience.

« Le plus grand plaisir que donne la fortune, c'est de faire du bien. »

A cette bonté touchante, M. Delessert unissait des sentiments de nationalité et de gloire qui, plus d'une fois, l'inspirèrent heureusement.

Après la victoire de Marengo, il fut le premier qui proposa d'élever un monument au brave Desaix, à ce général français que les Arabes avaient surnommé *Sultan-le-Juste.*

La souscription, annoncée dans le *Moniteur*, fut aussitôt remplie. Toute l'armée d'Égypte y prit part.

Ce monument est celui que l'on voit encore aujourd'hui sur la place Dauphine.

Lorsque, en 1822, l'Académie française, qui avait proposé pour sujet d'un prix extraordinaire de poésie : *Le dévouement des médecins français et des sœurs de Sainte-Camille dans la peste de Barcelone*, décerna un prix et deux *accessit*, il sollicita comme une faveur de pouvoir ajouter une médaille d'or à chaque *accessit.*

Il voulut, en 1835, qu'une série de gravures, aussi simples qu'expressives, représentât, pour l'instruction des jeunes gens de la classe laborieuse, les suites du Vice et celles de la Vertu. Le crayon de M. Jules David sut répondre à cette sage pensée.

M. Jules David obtint le prix de 2,000 francs, qui avait été proposé par M. Delessert.

J'ai cité les éloges de M. Delessert par MM. d'Argout et Charles Dupin, et la Notice de M. Alphonse De Candolle. Je dois citer encore un Éloge par M. Cap. Cet éloge, où règne une grande délicatesse de sentiments, a

remporté, au jugement de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon, un prix proposé par M. Bonafous pour honorer la mémoire de M. Delessert.

M. Bonnardet, président de l'Académie de Lyon, a fait, sur le concours relatif à ce prix, un rapport très-étendu et fort remarquable.

LISTE DES PRINCIPAUX ÉCRITS DE M. DELESSERT.

I.

DISCOURS A LA CHAMBRE DES DÉPUTÉS.

1818.

5 janvier. — Sur la proposition d'une Caisse hypothécaire.

25 mars. — Sur la fixité dans les droits de douanes.

2 avril. — Sur la loi de finances de 1818.

1819.

4 janvier. — Proposition pour décerner au duc de Richelieu une récompense nationale.

12 mai. — Sur le projet relatif à la fixation définitive des Budgets de 1815, 1816, 1817 et 1818.

26 mai. — Sur le projet relatif à la fixation des Dépenses de 1819.

7 juin. — Sur les Dépenses de la guerre.

10 juin. — Sur le Budget du ministère des finances.

18 juin. — Sur la Légion d'honneur : pour demander un supplément de 3,400,000 francs pour payer les traitements de 250 francs aux légionnaires militaires.

19 juin. — Sur les Donataires des 4^{e}, 5^{e} et 6^{e} classes.

3 juillet. — Sur le Dégrèvement de la Contribution foncière.

1820.

18 avril. — Sur le second projet de loi relatif aux comptes arriérés.

26 mai. — Sur le projet de loi relatif aux Élections.

24 mars. — Sur les dépenses relatives aux subsistances de la ville de Paris.

26 avril. — Sur un amendement au projet de loi relatif aux Grains.

5 juin. — Sur le Budget de 1821.

6 juin. — Pour demander la création de petites Inscriptions de rentes.

14 juin. — Sur un amendement relatif aux Cultes non catholiques.

12 juillet. — Pour demander l'abolition de la Loterie.

1822.

16 juillet. — Sur la liquidation de l'arriéré.

1828.

1er août. — Contre la Loterie.

2 août. — Sur les Caisses d'épargne.

1829.

15 juillet. — Article additionnel à la loi de finances, relatif au fonds spécial des Caisses d'épargne.

1830.

6 septembre. — Sur le projet de loi municipale.

8 octobre. — Sur les prêts à faire au commerce.

1831.

10 février. — Sur les adjonctions proposées dans la loi municipale.

16 février. — Sur l'organisation de la Municipalité de Paris.

2 novembre. — Amendement sur les Enfants trouvés.

1832.

17 février. — Sur le Budget des cultes protestants.

1er mars. — Sur les monuments publics.

8 décembre. — Sur la prime des sucres.

1833.

21 mars. — Rapport sur la loi relative à l'organisation départementale et municipale de Paris.

1834.

18 janvier. — Sur les Caisses d'épargne.

14 mars. — Rapport sur la loi relative à la Banque.

13 décembre. — Proposition sur les Caisses d'épargne, avec M. Charles Dupin.

1836.

4 février. — Sur la conversion des rentes.

27 mai. — Sur les Enfants trouvés.

1837.

15 février. — Rapport sur la loi des Caisses d'épargne.

21 et 22 février. — Résumé et discussion sur cette loi.

1838.

5 mai. — Amendement avec M. Roul pour excepter de la conversion les petites rentes.

28 mai. — Sur les Enfants trouvés.

II.

RAPPORTS SUR LES CAISSES D'ÉPARGNE DE 1827 A 1846.

Il n'est pas un de ces *Rapports* qui ne contienne quelque fait important ou quelque vue utile : leur ensemble est l'histoire la plus complète et la plus instructive de cette grande institution.

III.

Compte des recettes et dépenses de l'exercice de 1841. — Administration des Hôpitaux, Hospices civils et Secours de la ville de Paris.

IV.

Le Guide du bonheur, ou Recueil de pensées, maximes et prières. — 1840.

Fondations qu'il serait utile de faire. — 1846.

V.

Icones selectæ, etc. — (Voyez ci-devant page cliv.)

Description de la collection des coquilles, etc. — (Voyez ci-devant page clv.)

Note sur l'*Ouvirandra fenestralis*, plante de la famille des *Saururées*.

Etc., etc., etc.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

T. XXII.

MÉMOIRE

SUR

LA RECTIFICATION DES COURBES

ET LA QUADRATURE

DES SURFACES COURBES,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Présenté le 22 octobre 1832.

Les formules que j'ai récemment obtenues pour la résolution directe des équations de tous les degrés, et qui sont mentionnées dans la *Gazette piémontaise* du 22 septembre, fournissent les moyens, non-seulement de développer dans tous les cas en séries convergentes les racines réelles ou imaginaires d'une équation donnée, mais encore de fixer les limites des erreurs commises quand on arrête les séries convergentes après un certain nombre de termes. Or, la fixation de ces limites est fondée en partie sur quelques théorèmes relatifs à la rectification des courbes, et dont la connaissance peut être fort utile dans un grand nombre de

questions diverses, ainsi que dans la géométrie pratique. Je vais énoncer, en peu de mots, ceux qui me paraissent les plus dignes d'être remarqués.

Premier théorème. p désignant l'angle polaire que forme une droite OO′, tracée à volonté dans un plan OO′O″, avec un axe fixe, S le système d'une ou de plusieurs longueurs mesurées sur une ou plusieurs lignes droites ou courbes, fermées ou non fermées, A la somme des projections absolues des divers éléments de S sur la droite OO′, et π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$S = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp. \qquad (1)$$

Démonstration. On démontre ce théorème en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une longueur rectiligne s, et par la projection a de cette longueur sur la droite O′O′, puis en décomposant, dans le cas contraire, les longueurs S, A en éléments infiniment petits et correspondants.

Corollaire. Lorsque S représente une longueur rectiligne, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette longueur sur la droite OO′. Lorsque S représente une courbe fermée et convexe, en sorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette courbe sur OO′.

Exemples. Si S représente la circonférence d'un cercle décrit avec le rayon R, A sera évidemment le double du diamètre. On aura donc $A = 4R$, et la formule (1) donnera

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} R\,dp = 2\pi R.$$

Si S représente le périmètre de l'ellipse dont les demi-

axes a, b sont le premier parallèle, le second perpendiculaire à l'axe fixe, on aura

$$A = 4\sqrt{a^2 \cos^2 p + b^2 \sin^2 p},$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 p + b^2 \sin^2 p}\, dp\ ;$$

etc.

Deuxième théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, soient menées par un point du plan OO'O'' n droites qui comprennent entre elles des angles égaux, et nommons M la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A correspondantes à ces n droites. On aura sensiblement, pour de grandes valeurs de n,

$$S = \tfrac{1}{2}\pi M; \tag{2}$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant le produit $\frac{1}{2}\pi M$ pour valeur de S sera inférieure au rapport qui existe entre ce produit et le carré de n, c'est-à-dire, à

$$\tfrac{1}{2}\frac{\pi M}{n^2}, \tag{3}$$

pourvu que le nombre entier n surpasse 2.

Démonstration. Ce théorème se déduirait sans peine du précédent, et peut encore se démontrer de la manière suivante :

Soit s une longueur rectiligne, a sa projection absolue sur la droite OO', et μ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux n droites mentionnées dans le deuxième théorème. $2n\mu$ sera la somme des projections absolues de s sur les $2n$ côtés d'un polygone régulier, parallèles deux à deux à ces mêmes droites ; ou, ce

qui revient au même, $n\mu$ sera la projection sur un de ces côtés d'un polygone régulier semblable au premier, mais qui aurait pour côté la longueur s. Or, si l'on nomme R le rayon du cercle circonscrit à ce dernier polygone, son apothème sera

$$R\cos\frac{\pi}{2n},$$

et son côté

$$s = 2R\sin\frac{\pi}{2n},$$

tandis que sa projection sur une droite quelconque sera comprise entre le diamètre du cercle circonscrit et le diamètre du cercle inscrit, c'est-à-dire, entre les limites

$$2R = \frac{s}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \qquad 2R\cos\frac{\pi}{2n} = \frac{s}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc $n\mu$ sera compris entre ces limites, et s entre les suivantes

$$(4) \qquad n\mu\sin\frac{\pi}{2n}, \qquad n\mu\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n},$$

qui, pour de grandes valeurs de n, se réduisent sensiblement à

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\pi\mu.$$

Ajoutons que si l'on prend l'expression (5) pour valeur approchée de s, l'erreur commise sera inférieure au produit de cette expression par la plus grande des différences

$$1 - \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \qquad \frac{\operatorname{tng}\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} - 1,$$

et que ces deux différences, pour $n =$ ou > 3, deviennent l'une et l'autre inférieures à $\frac{1}{n^2}$. Effectivement, si l'on nomme θ un nombre compris entre les limites 0, 1, on aura, en vertu de formules connues,

$$\sin x = x - x^3 \frac{\cos \theta x}{6}, \qquad -\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = \frac{\cos \theta x}{6},$$

puis on en conclura, en posant $x = \frac{\pi}{n}$,

$$n^2\left[1 - \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right] = \frac{\pi^2}{2n} \cos \theta x < \frac{\pi^2}{24} < 1.$$

D'autre part, le développement de tang x suivant les puissances ascendantes de x, ne renfermant que des termes positifs pour $x > 0$, et subsistant pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{\pi}{2}$, la fonction

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\text{tang } x}{x} - 1\right)$$

croîtra avec x depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{\pi}{2}$, et par suite le produit

$$n^2\left[\frac{\text{tang } \frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)} - 1\right]$$

décroîtra pour des valeurs croissantes de n. Or, pour $n = 3$, ce produit devient

$$\frac{9}{\pi}(2\sqrt{3} - \pi) < 3(2\sqrt{3} - \pi) = \sqrt{108} - 3\pi < 1.$$

Le théorème 2 étant ainsi démontré pour le cas particulier

où la quantité S se réduit à une longueur rectiligne s, il suffira, pour le démontrer dans le cas contraire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire premier. La valeur approchée de S étant calculée à l'aide de la formule (2), l'erreur commise ne dépassera pas la neuvième partie de cette valeur, si l'on prend $n = 3$, la vingt-cinquième partie, si l'on prend $n = 5$, et la centième partie si l'on prend $n = 10$. Dans le premier et le second cas, M sera la moyenne arithmétique entre les sommes des projections des éléments de S sur trois ou cinq droites respectivement parallèles aux côtés d'un hexagone ou d'un décagone régulier.

Exemple. Si la longueur S est égale et parallèle à l'un des côtés d'un hexagone régulier, on trouvera $M = \frac{2}{3} S$, et par suite

$$\frac{\pi}{2} M = \frac{\pi}{3} S = 1{,}047\, S.$$

Or, la différence entre le nombre 1,047... et l'unité est effectivement inférieure à $\frac{1}{9}$.

Corollaire II. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$M = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} A\,dp}{\int_{-\pi}^{\pi} dp} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A\,dp, \tag{6}$$

et la formule (2) se réduira, comme on devait s'y attendre, à la formule (1).

On déduit immédiatement du théorème 2 un troisième théorème, qu'on peut énoncer comme il suit :

Troisième théorème. Si, dans l'intérieur d'un cercle décrit avec le rayon R, on trace une ou plusieurs courbes fermées, et si le système de ces courbes ne peut être traversé par une même droite en plus de $2m$ points, la somme des contours ou périmètres de ces courbes ne dépassera pas le produit de la circonférence $2\pi R$ par le nombre m.

Démonstration. En effet, dans l'hypothèse admise, on aura évidemment, quel que soit p,

$$\mathcal{A} < 2m.2R,$$

et par suite la formule (2) donnera

$$S < m.2\pi R. \tag{7}$$

Corollaire. Si S se réduit au périmètre d'une courbe convexe, on aura, $m = 1$,

$$S < 2\pi R. \tag{8}$$

Des théorèmes, analogues à ceux qui précèdent, peuvent être appliqués à la quadrature des surfaces courbes et démontrés de la même manière. Nous nous contenterons d'énoncer ici l'un d'entre eux, duquel tous les autres se déduisent facilement.

Quatrième théorème. p désignant l'angle formé par une droite quelconque OO′ avec un axe fixe OP, q l'angle formé par le plan des droites OP, OO′ avec un plan fixe qui renferme la première, S le système d'une ou de plusieurs surfaces planes ou courbes, et $\mathcal{A}$ la somme des projections absolues des divers éléments de S sur un plan HIK perpendiculaire à la droite OO′, on aura

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathcal{A} \sin p\,dp\,dq. \tag{9}$$

Corollaire. Lorsque S représente une surface plane, la quantité A se réduit à la projection absolue de cette surface sur le plan HIK. Lorsque S représente une surface fermée et convexe, en sorte qu'elle ne puisse être coupée par une droite en plus de deux points, A se réduit au double de la projection de cette surface sur le plan HIK.

Exemple. Si S représente la surface de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{10}$$

A sera la section transversale du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde et dont les arêtes sont parallèles à la droite OO'. Soient R le rayon de l'ellipsoïde parallèle à la droite OO', et α, β, γ, les angles formés par cette droite avec les deux axes des coordonnées positives. On aura

$$\cos\alpha=\cos p, \quad \cos\beta=\sin p\cos q, \quad \cos\gamma=\sin p\sin q, \tag{11}$$

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}; \tag{12}$$

et l'équation du cylindre ci-dessus mentionné deviendra

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2=1. \tag{13}$$

Or, la section faite dans le cylindre par le plan des x, y étant l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}\right)^2=1,$$

la surface de cette section sera

$$\frac{\pi abc}{R\cos\gamma},$$

et par conséquent l'aire de la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes sera

$$\frac{\pi abc}{R}.$$

On aura donc

$$(14) \qquad A = \frac{2\pi abc}{R}, \qquad S = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin p\,dp\,dq}{R}.$$

Dans le cas particulier où l'ellipsoïde se réduit à une sphère, on a

$$R = a = b = c,$$

et par suite, comme on devait s'y attendre,

$$S = R^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin p\,dp\,dq = 4\pi R^2.$$

Ajoutons que si, dans la seconde des formules (14), on substitue la valeur de R tirée des formules (11) et (12), on pourra effectuer dans tous les cas l'intégration relative à p, et réduire ainsi la valeur de S à une intégrale simple. L'intégration s'effectuera complétement, si l'ellipsoïde est de révolution

Post-scriptum. On pourrait donner du théorème 4 une démonstration analogue à celle du théorème 1^er^, en considérant d'abord le cas où l'on remplacerait les quantités S, A par une surface plane s et par la projection a de cette surface sur le plan HIK ; puis, en décomposant, dans le cas contraire, les surfaces S, A en éléments infiniment petits et correspondants. On peut aussi déduire le théorème 4 d'une proposition analogue au théorème 2, et dont voici l'énoncé :

Cinquième théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 4, construisons un polyèdre convexe, dont les faces équivalentes entre elles soient comprises entre deux sphères concentriques décrites avec les rayons

$$r, \qquad r(1+\varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive, et nommons M la moyenne arithmétique entre les n valeurs de A, correspondantes aux plans de ces mêmes faces. On aura sensiblement, pour de petites valeurs de ε,

$$S = 2M, \tag{15}$$

et l'erreur que l'on commettra en prenant $2M$ pour valeur approchée de S, sera inférieure au produit de $2M$ par la différence

$$(1+\varepsilon)^2 - 1. \tag{16}$$

Démonstration. Soient s une surface plane renfermée dans un plan quelconque, a la projection absolue de s sur le plan d'une face du polyèdre, et μ la moyenne arithmétique entre les n valeurs de a qui correspondent aux plans des différentes faces. Si la surface s est équivalente à l'aire ς de chaque face du polyèdre, a représentera non-seulement la projection absolue de s sur le plan d'une face, mais aussi la projection de cette face sur le plan de s, et par suite $n\mu$ sera le double de la projection absolue du polyèdre sur le plan de s. Cela posé, soient

$$\mathrm{B}, \quad \mathrm{C},$$

la plus petite et la plus grande des valeurs que puisse acquérir la projection du polyèdre sur un plan quelconque. On aura, dans l'hypothèse admise,

$$n\mu > 2\mathrm{B}, \qquad n\mu < 2\mathrm{C},$$

et, si s cesse d'être équivalent à ς, $n\mu$ se trouvera compris entre les limites

$$\frac{2s\mathrm{B}}{\varsigma}, \qquad \frac{2s\mathrm{C}}{\varsigma}. \tag{17}$$

Donc s sera compris entre les limites

$$(18) \qquad \mu\frac{n\varsigma}{2B}, \qquad \mu\frac{n\varsigma}{2C}.$$

D'ailleurs, le polyèdre ci-dessus mentionné étant convexe et renfermé entre les sphères décrites avec les rayons

$$r, \qquad r(1+\varepsilon),$$

la surface $n\varsigma$ du polyèdre sera comprise entre les limites

$$4\pi r^2, \qquad 4\pi r^2(1+\varepsilon)^2,$$

et ses projections B, C seront renfermées entre les surfaces des grands cercles

$$\pi r^2, \qquad \pi r^2(1+\varepsilon)^2.$$

Donc les expressions (18) seront comprises entre les limites

$$\mu\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2(1+\varepsilon)^2}, \qquad \mu\frac{4\pi r^2(1+\varepsilon)^2}{2\pi r^2},$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$\frac{2\mu}{(1+\varepsilon)^2}, \qquad 2\mu(1+\varepsilon)^2,$$

qui, l'une et l'autre, diffèrent très-peu de 2μ, quand ε est très-petit ; et, si l'on prend 2μ pour valeur approchée de s, l'erreur commise ne dépassera pas le produit de 2μ par la plus grande des différences

$$1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}, \qquad (1+\varepsilon)^2-1,$$

c'est-à-dire, par l'expression (16). Le théorème 5 étant ainsi démontré pour le cas où la quantité S se réduit à une surface plane s, il suffira, pour le démontrer dans le cas con-

traire, de décomposer S en éléments infiniment petits.

Corollaire I. Si le polyèdre mentionné dans le théorème 5 se réduit à l'un des cinq polyèdres réguliers, et si l'on nomme

$$1 - \varepsilon', \quad 1 + \varepsilon'',$$

les quotients qu'on obtient en divisant la surface de ce polyèdre régulier par le quadruple de la projection maximum ou minimum de ce polyèdre; l'erreur que l'on commettra en prenant $2M$ pour valeur de S sera inférieure au produit de $2M$ par le plus grand des nombres $\varepsilon', \varepsilon''$. Au reste, cette proposition subsisterait encore si le polyèdre cessait d'être régulier.

Corollaire II. Si le nombre n devient infini, on aura évidemment

$$(20) \qquad M = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p\,dp\,dq}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin p\,dp\,dq} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} A \sin p\,dp\,dq,$$

attendu que

$$\sin p\,dp\,dq$$

représente l'élément différentiel de la surface de la sphère décrite avec le rayon 1. Or, des équations (15) et (20) on déduit immédiatement la formule (9).

Corollaire III. Si S représente un système de surfaces qui soit renfermé dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, et qui ne puisse être traversé par une droite en plus de $2m$ points, on aura évidemment

$$A < 2m \cdot \pi R^2,$$

et par suite

$$S < m.4\pi R^2.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Sixième théorème. Si, dans l'intérieur d'une sphère décrite avec le rayon R, on trace un système de surfaces qui ne puisse être coupé par une droite en plus de $2m$ points, la somme des aires de ces surfaces ne dépassera pas le produit de la surface de la sphère par le nombre $2m$.

MÉMOIRE

SUR LES CONDITIONS RELATIVES

AUX LIMITES DES CORPS,

ET EN PARTICULIER

SUR CELLES QUI CONDUISENT AUX LOIS DE LA RÉFLEXION

ET DE LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY,

Présenté à l'Académie, le 24 juillet 1848.

Comme j'en ai fait ailleurs la remarque, la solution des questions les plus importantes de la physique mathématique dépend surtout des équations relatives aux limites des corps considérés comme des systèmes de molécules. La recherche de ces conditions est indispensable, par exemple, quand on se propose d'appliquer l'analyse aux phénomènes que présentent les vibrations des plaques élastiques, la transmission du son d'un milieu dans un autre, ou bien encore la réflexion et la réfraction de la lumière. D'ailleurs, dans ces divers phénomènes, les lois recherchées par les physiciens sont ordi-

nairement celles qui se rapportent à des mouvements infiniment petits, représentés par des équations linéaires aux différences partielles ou même aux différences mêlées, et à coefficients constants. Enfin, tout mouvement vibratoire de cette nature, propagé dans un milieu homogène, ou se réduit à l'un de ceux que j'ai nommés *mouvements simples,* ou du moins peut être censé résulter de la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples. Donc, ce qu'il importe surtout d'étudier, ce sont les lois suivant lesquelles un mouvement simple se modifie en passant d'un milieu dans un autre.

Or, dans tout mouvement simple, les déplacements symboliques de chaque point matériel, c'est-à-dire les variables imaginaires, dont les parties réelles représentent les déplacements effectifs de ce point, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, sont les produits de certains coefficients relatifs à ces axes par une exponentielle généralement imaginaire, dont l'exposant est une fonction linéaire des coordonnées et du temps.

Cela posé, considérons deux milieux, séparés l'un de l'autre par une surface plane, que nous supposerons perpendiculaire à l'axe des x, et que nous prendrons pour le plan des y, z, chaque milieu étant d'ailleurs homogène, et pouvant contenir un ou plusieurs systèmes de points matériels. Parmi les mouvements simples qui pourront se propager, soit dans le premier, soit dans le second milieu, on devra surtout distinguer ceux qui ne différeront les uns des autres qu'en raison du coefficient par lequel l'abscisse x, c'est-à-dire, la distance d'un point matériel à la surface de séparation des deux milieux, se trouvera multipliée dans

l'exposant de l'exponentielle ci-dessus mentionnée. Ces mouvements, que nous avons nommés *correspondants,* ont entre eux, comme nous l'avons vu, des relations dignes de remarque. En effet, deux mouvements simples correspondants sont toujours deux mouvements isochrones, c'est-à-dire, deux mouvements où les vibrations moléculaires s'effectuent dans le même temps. De plus, ils propagent des ondes planes dont les traces sur la surface de séparation sont parallèles à une même droite. Enfin les longueurs d'ondulation dans ces deux mouvements sont proportionnelles aux sinus des angles formés par les plans des ondes avec la même surface. Or, une première loi de réflexion et de réfraction peut être facilement saisie d'après les considérations précédentes. Suivant cette première loi, que j'ai démontrée dans mes *Exercices d'analyse et de physique mathématique,* si un mouvement simple, propagé dans le premier milieu, pénètre la surface de séparation, et donne ainsi naissance à des mouvements réfléchis et réfractés, tous ces mouvements incidents, réfléchis, réfractés, seront des mouvements correspondants.

Dans l'application de cette première loi, il y a une remarque importante à faire. Lorsqu'un mouvement simple, qui se propage sans s'affaiblir, est du nombre de ceux que comporte un milieu donné, la propagation peut avoir lieu dans deux sens différents, opposés l'un à l'autre; mais s'il s'agit d'un mouvement réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux, la propagation devra s'effectuer dans un sens tel, que les ondes réfléchies ou réfractées s'éloignent de plus en plus de la surface réfléchissante. Cette loi indiquée par l'expérience, et que l'on pourrait en quelque sorte considérer comme évidente par elle-même, se

trouve aussi indiquée par le calcul. Si un mouvement réfléchi ou réfracté, au lieu de se propager sans s'affaiblir, était du nombre de ceux qui s'éteignent en se propageant, les vibrations devraient, non pas croître, mais diminuer pour des valeurs croissantes de la distance à la surface. Cette dernière condition est nécessaire pour que les vibrations réfléchies ou réfractées deviennent très-petites à de grandes distances, et que le mouvement ne cesse pas d'être, suivant l'hypothèse admise, infiniment petit.

La loi générale que je viens de rappeler suffit pour déterminer les directions des ondes planes, liquides, sonores, lumineuses qui peuvent être réfléchies ou réfractées par la surface de séparation de deux milieux isotropes ou non isotropes. Elle détermine en conséquence les directions des rayons lumineux réfléchis ou réfractés, soit par les surfaces extérieures des corps transparents ou opaques, soit par la surface intérieure d'un corps transparent.

On conclut de cette loi que, dans les milieux isotropes ou isophanes, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, et qu'alors aussi, pour une longueur d'ondulation donnée, le sinus de réfraction est au sinus d'incidence, suivant la règle trouvée par Descartes, dans un rapport constant. Enfin la même loi fournit immédiatement les règles établies par Malus et par M. Biot pour la détermination des rayons réfléchis par la seconde surface des cristaux à un ou à deux axes optiques, et montre comment ces règles doivent être modifiées dans le cas où les milieux donnés sont doués l'un et l'autre de la double réfraction.

Parlons maintenant des lois qui déterminent, non plus les directions des ondes planes réfléchies et réfractées, mais la

direction et les amplitudes des vibrations moléculaires dans ces mêmes ondes, par conséquent le mode de polarisation et l'intensité de la lumière réfléchie ou réfractée par la surface d'un corps transparent ou opaque. La recherche de ces lois sera plus ou moins compliquée, suivant les données du problème; et, pour ce motif, il convient de traiter l'un après l'autre les deux cas bien distincts qui peuvent se présenter, savoir : le cas où chacun des milieux que l'on considère renferme un seul système de points matériels, et le cas où plusieurs systèmes de points matériels se trouvent contenus dans chaque milieu.

Considérons d'abord le cas où deux milieux de nature différente, mais dont chacun renferme un seul système de points matériels, se trouvent séparés l'un de l'autre par le plan des y, z. Concevons d'ailleurs que de part et d'autre de ce plan on mène deux plans parallèles à des distances très-petites, mais cependant supérieures au rayon de la sphère d'activité sensible de deux molécules; et construisons un cylindre droit dont les bases soient comprises dans ces mêmes plans. Si les dimensions de chaque base, en demeurant très-petites en elles-mêmes, sont néanmoins très-considérables par rapport à la hauteur du cylindre, les pressions totales supportées par les deux bases du cylindre seront sensiblement égales, et l'on pourra en dire autant des variations que ces pressions totales subiront dans un mouvement infiniment petit. Par suite, si chacun des milieux donnés est homogène, et si des mouvements simples propagés dans ces milieux offrent des longueurs d'ondulations notablement supérieures au rayon de la sphère d'activité sensible de deux molécules, les pressions, non plus totales, mais partielles,

supportées par les deux bases du cylindre en deux points correspondants situés sur une droite perpendiculaire au plan des y, z, seront deux forces sensiblement égales, dirigées suivant des droites parallèles, mais en sens contraires, et l'on pourra en dire autant des pressions que subira sur ses deux faces le plan des y, z, c'est-à-dire la surface de séparation des deux milieux, ces dernières pressions et leurs variations étant calculées comme si la constitution de chaque milieu n'éprouvait aucune modification dans le voisinage de cette surface. Le principe qui consiste à *égaler ainsi entre elles, mais sous la condition ci-dessus rappelée, les pressions intérieure et extérieure supportées par la surface de séparation de deux milieux,* se trouvait déjà exposé dans un mémoire que j'ai présenté à l'Académie en 1843. (Voir les *Comptes rendus,* tome XVI, page 151.) Ce principe fournit immédiatement trois conditions relatives à la surface de séparation des deux milieux que l'on considère. Ces trois conditions sont effectivement celles que l'on emploie dans la théorie des corps élastiques, où l'on suppose que chaque milieu renferme un seul système de points matériels. Elles deviendront insuffisantes, si chaque milieu renferme un ou plusieurs systèmes de points matériels, comme il arrive dans la théorie de la lumière, ou dans des cas semblables dont nous allons maintenant nous occuper.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux milieux séparés l'un de l'autre par le plan des y, z, soient deux corps solides ou fluides dont chacun renferme deux systèmes de molécules, savoir, ses molécules propres et les molécules de l'éther ou du fluide lumineux. Supposons encore, pour simplifier les calculs, que l'on réduise chaque molécule à

un point matériel. Les équations des mouvements infiniment petits propagés dans chaque corps renfermeront six inconnues, qui représenteront les déplacements infiniment petits des molécules de ce corps et des molécules de l'éther, mesurés parallèlement aux axes coordonnés. De plus, les pressions supportées en un point donné de chaque corps par un plan quelconque, ou plutôt leurs composantes parallèles aux axes coordonnés, s'exprimeront en fonction de ces déplacements et de leurs dérivées partielles; et si l'on néglige dans le calcul les actions exercées ou subies par les molécules éthérées, le principe de l'égalité entre les pressions intérieure et extérieure supportées par le plan des y, z, fournira, pour les points situés dans ce plan, entre les déplacements correspondants des molécules des deux corps, des équations de condition qui conduiront à des résultats confirmés par l'expérience. Mais ces équations de condition, considérées isolément, ne sauraient en aucune manière fournir une idée des modifications qu'éprouveront, en vertu de la réflexion et de la réfraction, les directions et les amplitudes des vibrations lumineuses, par conséquent une idée du mode de polarisation ou de l'intensité des rayons réfléchis ou réfractés : car les valeurs approchées de termes, que l'on négligeait dans une première approximation, ne pourront se déduire des équations mêmes dans lesquelles on les omettait d'abord. Mais, pour retrouver les conditions auxquelles devront satisfaire, sur la surface de séparation des deux corps, les trois déplacements d'une molécule d'éther, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, il suffira de considérer les molécules d'éther comprises dans les deux corps comme formant un système unique de molécules, et

d'admettre que, dans le mouvement de ce système, les déplacements moléculaires, et leurs dérivées prises par rapport à l'abscisse x, ou du moins celles de ces dérivées que ne déterminent pas les équations différentielles des mouvements infiniment petits, varient par degrés insensibles avec cette même abscisse. Ce dernier principe, qu'on peut appeler le *principe de la continuité du mouvement* dans le fluide éthéré, étant joint non-seulement au principe de l'*égalité des pressions intérieure et extérieure* supportées en un point quelconque par la surface de séparation des deux corps, et à la condition sous laquelle celui-ci était admis, mais encore à la loi qui détermine la direction et la vitesse de propagation des ondes planes réfléchies et réfractées, permettra effectivement d'établir les diverses formules qui feront connaître, après la réflexion et la réfraction du mouvement simple, la nature et les propriétés des divers mouvements réfléchis ou réfractés. Disons maintenant quelques mots de l'analyse à l'aide de laquelle on pourra construire ces mêmes formules.

Après avoir établi, pour l'un des corps donnés, les équations qui représentent les mouvements infiniment petits des molécules de ce corps et des molécules de l'éther, éliminons de ces équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule. On obtiendra ainsi l'équation caractéristique à laquelle devra satisfaire chacune des inconnues, et l'on pourra, dans cette équation caractéristique, remplacer les symboles de dérivation relatifs au temps t et aux coordonnées x, y, z, par les quatre coefficients qui affectent ces quatre variables dans l'exponentielle imaginaire qui caractérise un mouvement simple. Alors l'équation caractéristique exprimera la relation qui,

pour tout mouvement simple, propagé dans le corps dont il s'agit, subsiste entre ces quatre coefficients. Si le corps donné est isotrope, l'équation caractéristique renfermera seulement, avec le coefficient relatif au temps, la somme des carrés des coefficients relatifs aux coordonnées, ou, ce qui revient au même, le carré d'un nouveau coefficient. Elle pourra donc être considérée comme établissant une relation entre les deux coefficients qui caractérisent un mouvement simple isotrope. Si d'ailleurs le mouvement simple et isotrope est du nombre de ceux qui se propagent sans s'affaiblir, les deux coefficients en question seront réciproquement proportionnels à la durée des vibrations lumineuses et à l'épaisseur des ondes planes, ou, ce qui revient au même, à ce qu'on nomme la longueur des ondulations.

Observons maintenant que les mouvements simples propagés dans l'un ou l'autre corps, et caractérisés comme on vient de le dire, seront de deux espèces. Parmi ces mouvements, les uns disparaîtraient avec les molécules des deux corps, les autres avec les molécules de l'éther. Or, pour obtenir, du moins avec une certaine approximation, d'une part, les lois des mouvements simples propagés dans les deux corps, d'autre part, les lois des mouvements simples propagés dans l'éther, il suffira évidemment de réduire ces mouvements, dans le premier cas, à des mouvements de première espèce, c'est-à-dire à des mouvements qui continueraient de subsister si l'éther venait à disparaître; dans le second cas, à des mouvements de seconde espèce, c'est-à-dire à des mouvements qui continueraient de subsister si les corps venaient à disparaître; et de tirer les conditions relatives à la surface de séparation des deux corps, dans le premier cas, du prin-

cipe de l'égalité des pressions intérieure et extérieure supportées par cette surface, dans le second cas, du principe de la continuité du mouvement dans l'éther. Ajoutons que les lois de la réflexion et de la réfraction des mouvements simples étant une fois trouvées, avec les équations de condition relatives à ces mouvements et aux points situés sur la surface de séparation des deux milieux, on pourra, eu égard aux notations que nous avons adoptées, étendre facilement ces équations de condition au cas où l'on considérerait des mouvements infiniment petits quelconques. Pour y parvenir, il suffira ordinairement de remplacer, par des symboles de dérivation relatifs au temps et aux coordonnées, les coefficients par lesquels ces quatre variables se trouvent multipliées dans l'exponentielle imaginaire qui caractérise chaque mouvement simple.

L'expérience confirme l'exactitude des conclusions ci-dessus énoncées, et semble même démontrer que l'approximation à laquelle on arrive en opérant comme nous venons de le dire est très-considérable. Car la plupart des lois remarquables découvertes par le calcul, et vérifiées par l'observation dans la physique mathématique, peuvent s'établir de cette manière, ainsi que je l'expliquerai plus en détail dans une série de mémoires qui suivront celui-ci.

Pour montrer une application de la méthode que je viens d'exposer à un exemple utile, concevons que l'on cherche les lois suivant lesquelles un rayon lumineux et simple est réfléchi et réfracté par la surface de séparation de deux corps isophanes dont les molécules sont réduites, avec celles de l'éther, à des points matériels. Alors, dans chaque mouvement simple, les vibrations moléculaires seront ou trans-

versales, c'est-à-dire, comprises dans les plans des ondes, ou non-transversales (*). Alors aussi l'équation caractéristique établira une relation entre les carrés des coefficients k, s qui caractérisent un mouvement simple isotrope, et qui, dans le cas où le mouvement se propage sans s'affaiblir, sont réciproquement proportionnels, d'une part, à l'épaisseur des ondes planes, d'autre part, à la durée des vibrations moléculaires. Ajoutons que cette équation caractéristique du 8^e degré, par rapport à s, se décomposera immédiatement en deux équations du 4^e degré, qui répondront, la première, à des mouvements simples à vibrations transversales, la seconde, à des mouvements simples à vibrations non-transversales. Remarquons, enfin, que chaque mouvement simple pourra se propager en deux sens opposés auxquels correspondront deux valeurs de s qui ne différeront que par le signe. Cela posé, aux quatre valeurs de s^2 que fourniront les deux équations du 4^e degré, correspondront quatre mouvements simples, dont deux seulement subsisteront si les molécules des deux corps viennent à disparaître. D'ailleurs ces deux derniers mouvements, qui offriront, l'un des vibrations transversales, l'autre des vibrations non-transversales, seront précisément ceux dont il faudra tenir compte pour déduire du principe de la continuité des mouvements dans l'éther les équations de condition relatives à la surface de séparation des deux corps.

Lorsque, dans les équations de condition ainsi obtenues,

(*) Pour plus d'exactitude, nous substituons ici les mots *non-transversales* aux mots *longitudinales, c'est-à-dire perpendiculaires à ces plans*, qui se trouvaient dans le manuscrit.

on néglige les termes qui proviennent des actions exercées par les molécules des deux corps, ces équations reprennent, ainsi qu'on devait s'y attendre, la forme sous laquelle elles se sont présentées dans mes précédents mémoires.

J'observerai, en finissant, que M. Laurent, auquel j'ai parlé de mes nouvelles recherches, m'a dit avoir de son côté obtenu, par des procédés que j'ignore, des équations de condition relatives aux surfaces des corps, et spécialement applicables à la théorie de la chaleur. Il m'a dit encore que sa méthode fournissait un nombre d'équations égal au nombre des miennes. J'ai dû faire ces observations, non-seulement dans l'intérêt de M. Laurent, mais aussi dans l'intérêt de la science, qui gagne toujours à ce que les questions délicates soient éclairées par des discussions approfondies ; et il est à désirer que cet habile géomètre, dont plusieurs fois l'Académie a eu déjà l'occasion d'apprécier tout le mérite, fasse bientôt connaître les résultats des recherches nouvelles qu'il a entreprises sur les divers points de la physique mathématique.

MÉMOIRE

SUR LES

RAYONS LUMINEUX SIMPLES,

ET SUR

LES RAYONS ÉVANESCENTS,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY,

Lu dans la séance publique du 8 janvier 1849.

Étant donné un système de molécules supposées réduites à des points matériels, j'ai appelé *mouvement simple* du système, tout mouvement infiniment petit, dans lequel les déplacements d'une molécule, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires, sont les parties réelles de trois variables imaginaires, respectivement égales aux produits de trois constantes imaginaires par une même exponentielle, dont l'exposant imaginaire est une fonction linéaire des coordonnées et du temps. J'ai de plus nommé *déplacements sym-*

boliques les trois variables imaginaires, dont les déplacements effectifs sont les parties réelles. Enfin, j'ai observé que l'exponentielle variable à laquelle les déplacements symboliques sont proportionnels, est le produit d'un facteur réel par une exponentielle trigonométrique; et ce facteur réel, et l'argument de l'exponentielle trigonométrique, sont ce que j'ai appelé le *module* et l'*argument* du mouvement simple. Cela posé, il est facile de reconnaître que tout mouvement simple d'un système de molécules est un mouvement par ondes planes, les diverses molécules se mouvant dans des plans qui sont parallèles entre eux, sans être nécessairement parallèles aux plans des ondes. Un mouvement simple est *durable et persistant,* lorsque son module est indépendant du temps, et alors chaque molécule décrit une ellipse qui peut se réduire à un cercle ou à une portion de droite. Un tel mouvement se propagera sans s'éteindre, et les ellipses décrites seront toutes parallèles les unes aux autres, si le module se réduit constamment à l'unité. Mais, si le module ne se réduit à l'unité que pour les points situés dans un certain plan, alors l'amplitude d'une vibration moléculaire, c'est-à-dire, le grand axe de l'ellipse décrite par une molécule, décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance de la molécule au plan dont il s'agit croîtra en progression arithmétique.

Dans la théorie de la lumière, à un mouvement simple, durable et persistant du fluide éthéré, correspond ce qu'on nomme un *rayon lumineux simple.* La *direction* du rayon est celle dans laquelle le mouvement se transmet à travers une très-petite ouverture faite dans un écran. Le rayon lui-même est représenté à chaque instant par la courbe que

dessinent, en vertu de leurs déplacements, les molécules primitivement situées sur sa direction. Si les molécules décrivent des cercles ou des ellipses, le rayon sera *polarisé circulairement* ou *elliptiquement,* et représenté par une espèce d'hélice ou de spirale à double courbure. Cette hélice se changera en une courbe plane, si les vibrations moléculaires sont rectilignes, et dans ce cas le rayon *polarisé rectilignement* deviendra ce que nous appelons un *rayon plan.*

Le *module* et l'*argument* d'un rayon lumineux simple ne sont autre chose que le module et l'argument du mouvement simple qui lui correspond. Si le module se réduit constamment à l'unité, le rayon se propagera sans s'affaiblir. Si le module diffère généralement de l'unité, l'amplitude des vibrations lumineuses décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance à un plan fixe croîtra en progression arithmétique, et alors le rayon de lumière deviendra ce que nous appellerons un rayon *évanescent.* La lumière que renferme un rayon évanescent peut être, dans un grand nombre de cas, perçue par l'œil. Telle est, en particulier, la lumière verte transmise par voie de réfraction à travers une feuille d'or très-mince. Telle est encore la lumière transmise à travers les faces latérales d'un prisme de verre qui a pour bases deux triangles rectangles, et fournie par un rayon émergent qui rase la face de sortie, dans le cas où le rayon réfracté forme, avec la normale à cette dernière face, un angle supérieur à l'angle de réflexion totale. Alors, comme je l'ai dit en 1836 (tome II, page 349), le rayon émergent s'éteint graduellement, tandis que le rayon incident forme un angle de plus en plus petit avec la face d'entrée.

Les coefficients des trois coordonnées dans l'exponentielle qui caractérise un rayon simple, c'est-à-dire, dans l'exponentielle à laquelle les déplacements symboliques des molécules d'éther sont proportionnels, mérite une attention particulière.

Quand le milieu que l'on considère est un milieu isophane ordinaire, qui ne produit pas la polarisation chromatique, les rayons simples qui peuvent s'y propager sont de deux espèces. Pour certains rayons, les trois déplacements symboliques de chaque molécule sont proportionnels aux trois coefficients dont il s'agit. Pour d'autres rayons, si l'on multiplie respectivement les trois coefficients par les trois déplacements symboliques, la somme des produits obtenus devra se réduire à zéro. D'ailleurs, dans les milieux isophanes, les directions des rayons lumineux seront généralement perpendiculaires aux plans des ondes. Cela posé, on peut affirmer que, dans ces milieux, les vibrations des molécules d'éther seront ordinairement *longitudinales*, c'est-à-dire, perpendiculaires aux plans des ondes, pour les rayons simples d'une espèce, et transversales, c'est-à-dire, comprises dans les plans des ondes, pour les rayons de l'autre espèce, quand ces rayons se propageront sans s'affaiblir, ou, ce qui revient au même, quand leurs modules se réduiront constamment à l'unité. Mais, quand les modules seront généralement distincts de l'unité, les rayons simples propagés par les milieux isotropes cesseront d'offrir des vibrations longitudinales ou transversales, en devenant ce que nous appelons des rayons évanescents. Alors aussi *le rayon évanescent, qui tiendra la place d'un rayon à vibrations longitudinales, sera un rayon simple, composé de molécules*

dont les vibrations s'exécuteront dans des plans perpendiculaires aux traces des plans des ondes sur le plan fixe correspondant au module 1.

Le troisième rayon de lumière réfléchi ou réfracté par la surface de séparation de deux milieux, est précisément l'un de ceux que nous appelons évanescents ; et pour expliquer les phénomènes de la réflexion et de la réfraction lumineuse, il est nécessaire de tenir compte de ce troisième rayon. C'est ce qu'avait vu M. Georges Green, dès l'année 1837. Mais, en partant de cette idée, il avait cherché à déduire les lois de la réflexion des équations auxquelles on parvient appliquant à la détermination des mouvements de l'éther seul la méthode donnée par Lagrange dans la *Mécanique analytique*, ou, ce qui revient au même, en faisant coïncider les équations de condition relatives, à la surface de séparation des deux milieux, avec celles qu'on obtient quand on égale entre elles les pressions exercées par les deux milieux sur la même surface. Comme je l'ai déjà dit, au principe de l'*égalité entre ces pressions*, on doit, dans la théorie de la lumière, substituer le principe de *la continuité du mouvement dans l'éther*, et alors, en opérant comme je l'ai fait dans la dernière séance, on arrive directement et promptement à résoudre le problème, dont la solution est donnée par des formules générales qui comprennent, comme cas particulier, celles de Fresnel. En vertu de ces formules générales, le troisième rayon est un rayon évanescent, dirigé de manière à raser la surface réfléchissante ou réfringente, et composé de molécules qui décrivent des ellipses comprises dans le plan d'incidence, les plans des ondes étant à la fois perpendiculaires au plan d'incidence et à la surface réflé-

chissante. Si d'ailleurs on reçoit sur une membrane placée tout près de la surface réfléchissante ou réfringente l'image de ce troisième rayon, cette image n'offrira une lumière représentée par une fraction sensible de la lumière incidente que dans une très-petite épaisseur qui, vue à une distance d'un décimètre, sous-tendra un angle inférieur à un dixième de seconde sexagésimale. Cette très-petite épaisseur ne sera peut-être pas une raison suffisante pour que l'on doive désespérer de rendre le troisième rayon sensible à l'œil, surtout si l'on réfléchit à l'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes, qui, très-probablement, doit être, pour un grand nombre d'entre elles, inférieur à $\frac{1}{10}$ de seconde.

ANALYSE.

Le théorème relatif aux rayons qui se propagent dans les milieux isotropes peut être démontré de la manière suivante :

Soient, dans un mouvement simple de l'éther,

ξ, η, ζ les déplacements d'un atome, mesurés parallèlement à trois axes rectangulaires des x, y, z, et

$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ les déplacements symboliques dont les déplacements effectifs ξ, η, ζ sont les parties réelles. On aura au bout du temps t :

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{\xi} = Ae^{ux+vy+wz-st}, \quad \bar{\eta} = Be^{ux+vy+wz-st}, \\ \bar{\zeta} = Ce^{ux+vy+wz-st}, \end{cases}$$

A, B, C, u, v, w, s désignant des constantes, dont chacune pourra être en partie réelle, en partie imaginaire. En conséquence, on pourra supposer

$$(2)\quad \begin{cases} A = \mathfrak{a} + \mathrm{a}i, & B = \mathfrak{b} + \mathrm{b}i, & C = \mathfrak{c} + \mathrm{c}i, \\ u = \mathfrak{u} + \mathrm{u}i, & v = \mathfrak{v} + \mathrm{v}i, & w = \mathfrak{w} + \mathrm{w}i, \\ & s = \mathfrak{s} + \mathrm{s}i, \end{cases}$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{s}$; $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{s}$ étant des quantités réelles, et i une racine carrée de -1. Soient maintenant $\alpha, \mathcal{E}, \gamma$ des constantes réelles, choisies de manière à vérifier simultanément les deux conditions

$$(3)\quad \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\mathcal{E} + \mathfrak{c}\gamma = 0, \qquad \mathrm{a}\alpha + \mathrm{b}\mathcal{E} + \mathrm{c}\gamma = 0;$$

on aura encore

$$(4)\quad A\alpha + B\mathcal{E} + C\gamma = 0.$$

Or, de cette deuxième formule, jointe aux équations (1), on tirera

$$(5)\quad \alpha\bar{\xi} + \mathcal{E}\bar{\eta} + \gamma\bar{\zeta} = 0,$$

par conséquent

$$(6)\quad \alpha\xi + \mathcal{E}\eta + \gamma\zeta = 0,$$

et l'on conclura de la formule (5) que chaque molécule d'éther décrit une courbe plane, dont le plan est perpendiculaire à la droite, représentée par l'équation

$$(7)\quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\mathcal{E}} = \frac{z}{\gamma}.$$

D'autre part, l'exponentielle $e^{ux+vy+wz-st}$, qui caractérise le mouvement simple, représenté symboliquement par les équations (1), se décompose, en vertu des formules (3), en deux facteurs, dont l'un $e^{ux+vy+wz-st}$ est le *module* du mouvement simple, tandis que l'autre, $e^{(ux+vy+wz-st)i}$, se

réduit à une exponentielle trigonométrique, dont l'argument $ux + vy + wz - st$ est ce que nous appelons l'*argument* du mouvement simple. En égalant cet argument à zéro, pour une valeur nulle de t, on obtient l'équation

$$ux + vy + wz = 0, \tag{8}$$

qui représente le plan invariable, auquel les *plans des ondes* sont parallèles. Si d'ailleurs le mouvement simple est durable et persistant, on aura $s = 0$; et si de plus le mouvement se propage sans s'affaiblir, on aura encore $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Si au contraire le mouvement s'affaiblit en se propageant, l'une au moins des constantes u, v, w cessera de se réduire à zéro; et l'on obtiendra un rayon évanescent, dans lequel l'intensité de la lumière décroîtra en progression géométrique, tandis que la distance d'une molécule au plan invariable représenté par l'équation

$$ux + vy + wz = 0 \tag{9}$$

croîtra en progression arithmétique.

Supposons maintenant que le mouvement infiniment petit, représenté par les équations (1), soit un mouvement simple de l'éther, dans un milieu isophane qui ne produise pas la polarisation chromatique. Alors les déplacements symboliques vérifieront l'une des deux formules

$$\frac{\bar{\xi}}{u} = \frac{\bar{\eta}}{v} = \frac{\bar{\zeta}}{w}, \tag{10}$$

$$u\bar{\xi} + v\bar{\eta} + w\bar{\zeta} = 0. \tag{11}$$

Cela posé, si le module $e^{ux+vy+wz-st}$ se réduit à l'unité, ou, en d'autres termes, si les constantes u, v, w, s s'évanouissent, on aura

$$u = ui, \qquad v = vi, \qquad w = wi, \qquad s = si,$$

et l'on tirera de la formule (10)

$$(12)\qquad \frac{\overline{\xi}}{u}=\frac{\overline{\eta}}{v}=\frac{\overline{\zeta}}{w},\qquad \text{par conséquent}\qquad \frac{\xi}{u}=\frac{\eta}{v}=\frac{\zeta}{w},$$

puis de la formule (11)

$$(13)\quad u\overline{\xi}+v\overline{\eta}+w\overline{\zeta}=0\quad \text{par conséquent}\quad u\xi+v\eta+w\zeta=0.$$

Donc les vibrations des molécules d'éther seront dans le premier cas perpendiculaires, dans le second cas parallèles aux plans des ondes. Mais si, s étant nul, u, v, w cessent de s'évanouir, il suffira d'assujettir les coefficients α, ϵ, γ à vérifier simultanément les deux conditions

$$(14)\qquad u\alpha+v\epsilon+w\gamma=0,\qquad u\alpha+v\epsilon+w\gamma=0,$$

pour que l'on ait aussi

$$(15)\qquad u\alpha+v\epsilon+w\gamma=0,$$

et alors la formule (10) entraînera les équations

$$(16)\qquad \alpha\overline{\xi}+\epsilon\overline{\eta}+\gamma\overline{\zeta}=0,\qquad \alpha\xi+\epsilon\eta+\gamma\zeta=0.$$

D'ailleurs, de la seconde des équations (16), jointe aux formules (14), on conclura que les vibrations moléculaires s'exécutent dans des plans perpendiculaires à la commune intersection des plans (8) et (9).

MÉMOIRE

SUR

LE CALCUL INTÉGRAL,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY,

Présenté à l'Académie des sciences, le 27 décembre 1824 (*).

§ 1. *Calcul des fonctions génératrices.*

$y = f(x)$ désignant une fonction de x, M. Laplace appelle fonction génératrice de $f(x)$ la suite infinie

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 \ldots + y_z t^z + \text{etc.} = u \tag{1}$$

ou

$$f(0) + tf(1) + t^2 f(2) + \ldots + t^z f(x) + \text{etc.} \tag{2}$$

(*) Je livre ce mémoire à l'impression tel que je le retrouve dans le manuscrit qui le renferme. La signature de M. Georges Cuvier, apposée sur le premier et sur le dernier feuillet du mémoire, indique, comme date de présentation, le 27 décembre 1824.

La fonction génératrice étant donnée, la fonction $f(x)$ s'en déduit, mais seulement pour des valeurs entières de x. La connaissance de la fonction génératrice ne suffit pas pour déterminer $f'(x)$, $f''(x)$, etc...

A la vérité, en partant de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta^2 y + \frac{1}{3}\Delta^3 y \dots \tag{3}$$

dans laquelle $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, et observant que $\Delta^x y$ a pour fonction génératrice $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^x$, on trouverait

$$u\,l\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right) = u\,l(t), \tag{4}$$

pour fonction génératrice de $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Mais la formule (3), qui est exacte pour des fonctions entières, cesse de l'être pour des fonctions quelconques. Le second membre ne varie pas quand on y fait croître y d'une fonction périodique de x, tandis que le premier membre change alors de valeur. Si l'on fait par exemple

$$y = \sin(2\pi x),$$

cette équation donnera

$$\cos(2\pi x) = 0,$$

quel que soit x, ce qui est absurde. On ne voit pas, d'ailleurs, comment le développement de $u\,l(t)$ suivant les puissances ascendantes de t pourrait s'effectuer.

Une autre difficulté que présente le calcul des fonctions génératrices, consiste en ce que l'on regarde

$$\frac{u}{t} = \frac{y_0}{t} + y_1 + y_2 t + \dots + y_{x+1} t^x + \dots \tag{5}$$

comme fonction génératrice de y_{x+1}, tandis qu'en remplaçant dans la série (1)

y_0 par y_1, y_1 par y_2... et généralement y_x par y_{x+1},

on trouverait simplement

$$y_1 + y_2 t + \ldots + y_{x+1} t^x \tag{6}$$

pour fonction génératrice de y_{x+1}. On ne peut lever cette difficulté qu'en admettant, pour chaque valeur de $f(x)$, une infinité de fonctions génératrices, telles que

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x \ldots$$

$$\frac{y_{-1}}{t} + y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x \ldots$$

$$\frac{y_{-2}}{t^2} + \frac{y_{-1}}{t} + y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \text{etc.}\ldots$$

ou même, en prenant pour fonction génératrice, ainsi qu'on l'a proposé, la somme de la série

$$y_{-\infty} t^{-\infty} + \ldots + y_{-1} t^{-1} + y_0 t^0 + y_1 t^1 + y_2 t^2 \ldots + y_\infty t^\infty \ldots \tag{7}$$

Cette dernière série devra nécessairement être employée si l'on veut que la fonction génératrice de y_{-x} soit représentée par ut^x. Or, il arrive malheureusement que la série (7) est généralement divergente et n'a pas de somme.

Quant aux résultats déduits du calcul des fonctions génératrices, à l'égard des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, on peut les établir directement, comme nous le ferons dans les paragraphes qui suivent.

§ 2. *Formules de M. Fourier, et autres de même genre* (*).

On a, en vertu du théorème de M. Fourier,

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\iint e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu)d\alpha d\mu \quad \begin{cases}\alpha=-\infty\,, & \alpha=+\infty\,,\\ \mu=\mu'\,, & \mu=\mu''\,,\end{cases}$$

x étant renfermé entre les limites μ' et μ''. On peut encore écrire

$$(2)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\iint e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}f(\mu)d\alpha d\mu \quad \begin{cases}\alpha=-\infty\,, & \alpha=+\infty\,,\\ \mu=\mu'\,, & \mu=\mu''\,,\end{cases}$$

a étant une constante arbitraire. On trouvera de même

$$(3)\qquad f(x,y,z\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\iint\ldots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu\ldots)d\alpha d\mu d\beta d\nu\ldots$$

et

$$(4)\qquad f(x,y,z\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\iint\ldots e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}e^{(b+\beta i)(y-\nu)}\ldots f(\mu,\nu\ldots)d\alpha d\mu d\beta d\nu\ldots$$

$$\begin{cases}\alpha=-\infty\,, & \mu=\mu'\,, & \beta=-\infty\,, & \nu=\nu'\ldots,\\ \alpha=+\infty\,, & \mu=\mu''\,, & \beta=+\infty\,, & \nu=\nu''\ldots.\end{cases}$$

n étant le nombre des variables $x, y, z\ldots$ et $a, b\ldots$ des constantes arbitraires.

On a encore, x, μ', μ'' étant des nombres entiers,

$$(5)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+1}e^{\nu(x-\mu)i}f(\mu)d\nu,$$

$\sum_{\mu'}^{\mu''}$ désignant une somme de la forme

(*) Dans l'impression de ce paragraphe et des suivants, j'ai cru devoir, pour la commodité du lecteur, me conformer à l'usage maintenant adopté par les géomètres, en substituant partout la lettre i au signe algébrique $\sqrt{-1}$, employé dans le manuscrit.

$$(6)\qquad \sum_{\mu'}^{\mu''}\varphi(\mu)=\varphi(\mu')+\varphi(\mu'+1)+\ldots+\varphi(\mu''-1),$$

et x étant renfermé entre les limites μ', μ''. On pourrait écrire encore

$$(7)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+1}e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}f(\mu)d\alpha.$$

Si l'on supposait x, μ', μ'' multiples de h, et de plus

$$(8)\qquad \sum_{\mu'}^{\mu''}\varphi(\mu)=\varphi(\mu')+\varphi(\mu'+h)+\ldots+\varphi(\mu''-h),$$

on trouverait

$$(9)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+h}e^{\nu\left(\frac{x-\mu}{h}\right)i}f(\mu)d\nu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h}e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu).hd\alpha,$$

puis, en posant $h=0$,

$$(11)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mu'}^{\mu''}e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu)d\mu d\alpha,$$

ce qui s'accorde avec la formule (1). On aurait encore, dans la même hypothèse,

$$(12)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{\mu'}^{\mu''+h}r^{\frac{x-\mu}{h}}e^{\nu\left(\frac{x-\mu}{h}\right)i}f(\mu)d\nu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(13)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h}r^{\frac{x-\mu}{h}}e^{\alpha(x-\mu)i}f(\mu).hd\alpha,$$

ou

$$(14)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}}\sum_{\mu'}^{\mu''+h}e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}f(\mu)hd\alpha,$$

x étant renfermé entre les limites μ', μ'', et $r^{\frac{1}{h}}=e^{a}$ désignant une constante arbitraire.

Pour démontrer toutes les formules qui précèdent, il suffit de développer les sommes indiquées par le signe $\sum$, et d'observer que l'on a toujours (m étant un nombre entier)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-m\alpha i}\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m\alpha) d\alpha = 0, \tag{15}$$

excepté dans le cas où l'on suppose $m = 0$, et pour lequel on trouve

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{0} d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha = 2\pi. \tag{16}$$

On établirait généralement de la même manière la formule

$$f(x,y..) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint\!\!\cdots \sum_{\mu'}^{\mu''+h} \sum_{\nu'}^{\nu''+k} .. e^{(\alpha+\alpha i)(x-\mu)} e^{(\beta+\beta i)(y-\nu)} .. f(\mu,\nu..)\, hk..\, d\alpha d\beta .., \tag{17}$$

$$\begin{matrix} \alpha = -\frac{\pi}{h}, & \beta = -\frac{\pi}{k} \\ \alpha = +\frac{\pi}{h}, & \beta = +\frac{\pi}{k} \end{matrix},$$

$\frac{x}{h}$ étant un nombre entier, compris entre les deux nombres entiers $\frac{\mu'}{h}, \frac{\mu''}{h}$; $\frac{y}{k}$ étant un autre entier compris entre les nombres entiers $\frac{\nu'}{k}, \frac{\nu''}{k}$...; et a, b... désignant des constantes arbitraires; puis on en conclurait : 1° en réduisant a, b,... à zéro

$$f(x,y...) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint\!\!\cdots \sum_{\mu'}^{\mu''+h} \sum_{\nu'}^{\nu''+k} ... e^{\alpha i(x-\mu)} e^{\beta i(y-\nu)} ... f(\mu,\nu...)\, hk..\, d\alpha d\beta ... \tag{18}$$

$$\begin{matrix} \alpha = -\frac{\pi}{h}, & \beta = -\frac{\pi}{k}, \cdots \\ \alpha = +\frac{\pi}{h}, & \beta = +\frac{\pi}{k}, \cdots \end{matrix},$$

2° en réduisant h, k,... à l'unité

$$(19)\quad f(x,y..)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}..\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}..e^{(a+\alpha i)(x-\mu)}e^{(b+\beta i)(y-\nu)}..f(\mu,\nu..)d\alpha d\beta..,$$

$$(20)\quad f(x,y..)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}..\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}..e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}..f(\mu,\nu..)d\alpha d\beta...$$

Lorsque, dans les équations (17) et (18), on pose $h=0$, $k=0$,... on retrouve les formules (4) et (3).

Il est encore essentiel de rappeler les formules que nous allons écrire. On a d'abord

$$(21)\quad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}re^{\nu i}\frac{f(re^{\nu i})}{F(re^{\nu i})}d\nu.$$

Cette formule suppose que la fonction $f(ue^{\nu i})$ ne varie jamais d'une manière brusque, et ne devient pas infinie entre les limites $\nu=-\pi$, $\nu=+\pi$, $u=0$, $u=r$. De plus,

$$x_0,\qquad x_1,\ldots\qquad x_{m-1},$$

représentent celles des racines de l'équation

$$(22)\qquad F(x)=0,$$

dont les modules, ou les valeurs numériques, sont inférieurs à r.

On a encore

$$(23)\quad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{f(u''+\nu i)}{F(u''+\nu i)}-\frac{f(u'+\nu i)}{F(u'+\nu i)}\right]d\nu,$$

lorsque $f(u+\nu i)$ ne devient pas infini et ne varie pas d'une manière brusque entre les limites $u=u'$, $u=u''$, $\nu=-\infty$, $\nu=+\infty$, et s'évanouit pour $\nu=\pm\infty$, quel que soit u. Dans la formule (23), x_0, x_1,... x_{m-1} représentent les racines de l'équation (22), dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites u', u''.

Lorsque la fonction $f(u+\nu i)$ s'évanouit non-seulement pour $\nu=\pm\infty$, quel que soit u, mais encore pour

$u = -\infty$, quel que soit v, alors, en prenant $u' = -\infty$, $u'' = \mathrm{U}$, on réduit la formule (23) à

$$(24) \qquad \frac{f(x_0)}{F'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathrm{U}+vi)}{F(\mathrm{U}+vi)}\,dv.$$

Le premier membre de celle-ci renfermera toutes les racines de $F(x) = 0$, si U surpasse les parties réelles de toutes ces racines, et à plus forte raison si U surpasse leurs modules.

Lorsque la fonction $f(u+vi)$ s'évanouit, non-seulement pour $v = \pm\infty$, quel que soit u, mais encore pour $u = \infty$, quel que soit v, alors, en prenant $u' = -\mathrm{U}$, $u'' = \infty$, on trouve

$$(25) \qquad \frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{f(x_{m-1})}{F'(x_{m-1})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-\mathrm{U}+vi)}{F(-\mathrm{U}+vi)}\,dv.$$

Le premier membre de l'équation (25) renfermera toutes les racines de $F(x) = 0$, si $-\mathrm{U}$ est inférieur aux parties réelles de toutes les racines, ce qui aura nécessairement lieu si U surpasse tous les modules.

§ 3. *Analogies des puissances et des différences.*

Supposons que les caractéristiques

$$\alpha = \frac{d}{dx}, \qquad 6 = \frac{d}{dy}, \qquad \gamma = \frac{d}{dz} \ldots$$

placées devant les fonctions

$$f(x), \qquad f(x, y, z \ldots),$$

indiquent les dérivées de ces fonctions par rapport à $x, y, z \ldots$ et que les puissances des mêmes caractéristiques indiquent les dérivées des divers ordres, en sorte qu'on ait

$$\alpha f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x),$$

$$\alpha^2 f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x),$$

etc.

$$\alpha^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

$$\alpha\mathcal{E} f(x,y) = \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy},$$

etc...

Si l'on désigne par

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathcal{E}, \gamma...)$$

une fonction entière de α, $\mathcal{E}$, γ..., la notation

$$\mathrm{F}(\alpha, \mathcal{E}, \gamma...) f(x, y, z...) \tag{1}$$

représentera une fonction linéaire de $f(x, y, z...)$ et de ses dérivées des divers ordres. De plus, on aura évidemment, en vertu du théorème de Taylor,

$$\begin{aligned} e^{h\alpha} f(x) &= f(x + h) = f(x + \Delta x) \\ &= f(x) + \Delta f(x) \\ &= (1 + \Delta) f(x), \end{aligned} \tag{2}$$

h étant la différence finie de x; et l'on trouvera par suite, en appelant $k = \Delta y$, $l = \Delta z$... les différences finies de y, z...

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{F}(e^{h\alpha}, e^{k\mathcal{E}}, e^{l\gamma}...) f(x, y, z...) \\ &= \mathrm{F}(1 + \Delta_x, 1 + \Delta_y, 1 + \Delta_z ...) f(x, y, z...). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ajoutons que l'on aura généralement

$$(1 + \Delta_x)^n f(x) = f(x + nh). \tag{4}$$

Remarquons à présent que si, dans l'expression (1), on substitue pour $f(x, y, z...)$ sa valeur, tirée de la formule (3) du deuxième paragraphe, on trouvera

$$(5)\quad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\iint\ldots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu\ldots)F(\alpha i,\beta i\ldots)d\alpha d\mu d\beta d\nu\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\alpha=-\infty, & \mu=\mu', & \beta=-\infty, & \nu=\nu',\ldots\\ \alpha=+\infty, & \mu=\mu'', & \beta=+\infty, & \nu=\nu'',\ldots\end{array}\right\}.$$

Si, par analogie, l'on étend cette dernière formule au cas où la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)$ devient quelconque, il en résultera que l'intégrale

$$(6)\quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\iint\ldots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu\ldots)F(\alpha i,\beta i\ldots)d\alpha d\mu d\beta d\nu\ldots$$

sera représentée, dans tous les cas possibles, par la notation

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots).$$

Cette convention étant admise, il est facile de voir :

1° que si l'on a généralement

$$(7)\quad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)+\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma\ldots)+\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma\ldots)+\ldots$$

le second membre de l'équation (7) étant composé d'un nombre fini de termes, on aura aussi

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)\\ =\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)+\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)+\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)+\text{etc.}\end{array}\right.$$

2° que l'équation (7) entraînera encore l'équation (8), si la série

$$(9)\qquad \varphi_0(\alpha i,\ \beta i,\ \gamma i\ldots),\ \varphi_1(\alpha i,\ \beta i,\ \gamma i\ldots),\ \text{etc.},$$

est convergente pour toutes les valeurs de $\alpha,\beta,\gamma\ldots$

3° que l'on vérifiera toujours l'équation

$$(10)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots),$$

en posant

$$(11)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma\ldots).$$

4° que si $F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)$ est une fonction entière, l'on vérifiera

encore l'équation

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)\,u=\Phi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots), \tag{12}$$

en posant

$$u=\frac{\Phi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)}. \tag{13}$$

On arriverait aux mêmes conclusions si, en attribuant à $x,y,z\ldots$ des valeurs entières, et partant de la formule

$$f(x,y,z\ldots)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}\ldots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu\ldots)d\alpha d\beta\ldots \tag{14}$$

on regardait la notation

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)$$

comme généralement définie par l'équation

$$\left.\begin{array}{l}F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)=\\ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\sum_{\mu'}^{\mu''+1}\sum_{\nu'}^{\nu''+1}\ldots e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}\ldots f(\mu,\nu\ldots).F(\alpha i,\beta i\ldots)d\alpha d\beta.\end{array}\right\} \tag{15}$$

Concevons maintenant que, dans la formule (5), on pose $\mu'=-\infty$, $\mu''=+\infty$, $\nu'=-\infty$, $\nu''=+\infty$... en sorte que, $F(\alpha,\beta,\ldots)$ désignant une fonction quelconque, l'expression

$$F(\alpha,\beta\ldots)f(x,y\ldots)$$

soit définie par la formule

$$F(\alpha,\beta..)f(x,y..)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..e^{\alpha(x-\mu)i}e^{\beta(y-\nu)i}..f(\mu,\nu..).F(\alpha i,\beta i..)d\alpha d\mu\ldots, \tag{16}$$

et posons en outre

$$\varpi(x,y\ldots)=F(\alpha,\beta\ldots)f(x,y\ldots), \tag{17}$$

on aura, en désignant par $\varphi(\alpha,\beta\ldots)$ une fonction quelconque de $\alpha,\beta\ldots$,

$$\varphi(\alpha,\beta..)\varpi(x,y..)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..e^{a(x-m)i}e^{b(y-n)i}..\varphi(ai,bi..)\varpi(m,n,..)dadmdbdn\ldots, \tag{18}$$

$$\varpi(m,n..)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..e^{\alpha(m-\mu)i}e^{\beta(n-\nu)i}..F(\alpha i,\beta i..)f(\mu,\nu..)d\alpha d\mu d\beta d\nu\ldots, \tag{19}$$

et par suite

$$(20)\qquad \varphi(\alpha,\beta..)\varpi(x,y..)=$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}..e^{m(\alpha-a)i}e^{n(\beta-b)i}..e^{axi}e^{byi}..e^{-\alpha\mu i}e^{-\beta\nu i}..\mathrm{F}(\alpha i,\beta i..)\varphi(ai,bi..)f(\mu,\nu..)da\,d\mu\,da\,d..$$

Mais on a encore

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...e^{\pm m(\alpha-a)i}e^{\pm n(\beta-b)i}...e^{-\alpha\mu i}e^{-\beta\nu i}...\mathrm{F}(\alpha i,\beta i...)da\,dm...\\ \qquad =e^{-a\mu i}e^{-b\nu i}...\mathrm{F}(ai,bi...).\end{array}\right.$$

Donc, par suite, l'équation (20) donnera

$$(22)\qquad \varphi(\alpha,\beta...)\,\varpi(x,y...)=$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...e^{a(x-\mu)i}e^{b(y-\nu)i}...\varphi(ai,bi...)\mathrm{F}(ai,bi...)f(\mu,\nu...)da\,d\mu\,db\,d\nu...$$
$$=\varphi(\alpha,\beta...)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta...)f(x,y...).$$

Par conséquent, $\mathrm{F}(\alpha,\beta...)$, $\varphi(\alpha,\beta...)$, désignant deux fonctions quelconques de $\alpha,\beta...$, l'équation (17), savoir

$$(17)\qquad \varpi(x,y...)=\mathrm{F}(\alpha,\beta...)f(x,y...),$$

entraînera toujours la suivante

$$(18)\qquad \varphi(\alpha,\beta...)\,\varpi(x,y...)=[\varphi(\alpha,\beta...)\,\mathrm{F}(\alpha,\beta...)]f(x,y...),$$

la fonction $\mathrm{F}(\alpha,\beta...)f(x,y,z...)$ étant supposée définie par la formule (16).

§ 4. *Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.*

On a généralement

$$(1)\qquad \int\Phi(\Theta+\theta i)e^{(\Theta+\theta i)t}d\theta$$
$$=\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{ti}\Phi(\Theta+\theta i)-\frac{1}{t}\int e^{(\Theta+\theta i)t}\Phi'(\Theta+\theta i)d\theta$$
$$=\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{i}\left[\frac{\Phi(\Theta+\theta i)}{t}-\frac{\Phi'(\Theta+\theta i)}{t^{2}}+\frac{\Phi''(\Theta+\theta i)}{t^{3}}...\right].$$

Cela posé, si l'on désigne par a un nombre fini, par ε un nombre infiniment petit, et si l'on pose

$$(2)\qquad \begin{cases} \Phi(\Theta+\frac{a}{\varepsilon}\mathrm{i})=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\mathrm{i}, \\ \Phi'(\Theta+\frac{a}{\varepsilon}\mathrm{i})=\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'\mathrm{i}, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

on trouvera, en prenant pour $\Phi(x)$ une fonction entière de x,

$$(3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \Phi(\Theta+\theta\mathrm{i})e^{(\Theta+\theta\mathrm{i})t}d\theta \\ \displaystyle=\frac{e^{\Theta t}}{t}\left(\frac{\cos\frac{at}{\varepsilon}+\mathrm{i}\sin\frac{at}{\varepsilon}}{\mathrm{i}}\right)\left[\left(\mathrm{P}+\frac{\mathrm{P}'}{t}+\frac{\mathrm{P}''}{t^2}+..\right)+\left(\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{Q}'}{t}+\frac{\mathrm{Q}''}{t^2}..\right)\mathrm{i}\right] \\ \displaystyle+\frac{e^{\Theta t}}{t}\left(\frac{\cos\frac{at}{\varepsilon}-\mathrm{i}\sin\frac{at}{\varepsilon}}{-\mathrm{i}}\right)\left[\left(\mathrm{P}+\frac{\mathrm{P}'}{t}+\frac{\mathrm{P}''}{t^2}+..\right)-\left(\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{Q}'}{t}+\frac{\mathrm{Q}''}{t^2}..\right)\mathrm{i}\right], \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad \int_{-\frac{a}{\varepsilon}}^{\frac{a}{\varepsilon}} \Phi(\Theta+\theta\mathrm{i})e^{(\Theta+\theta\mathrm{i})t}d\theta =$$

$$\frac{2e^{\Theta t}}{t}\left[\left(\mathrm{P}+\frac{\mathrm{P}'}{t}+\frac{\mathrm{P}''}{t^2}+\ldots\right)\sin\frac{at}{\varepsilon}+\left(\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{Q}'}{t}+\frac{\mathrm{Q}''}{t^2}\ldots\right)\cos\frac{at}{\varepsilon}\right].$$

Or, quand ε devient infiniment petit, le second membre de l'équation (4) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et reçoit effectivement une valeur indéterminée. On peut même, quel que soit t, disposer de ε de manière à le faire évanouir, puisqu'il suffit de prendre

$$(5)\qquad \left(\mathrm{P}+\frac{\mathrm{P}'}{t}+\frac{\mathrm{P}''}{t^2}\cdots\right)\sin\frac{at}{\varepsilon}+\left(\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{Q}'}{t}+\frac{\mathrm{Q}''}{t^2}\cdots\right)\cos\frac{at}{\varepsilon}=0,$$

ou

$$\text{(6)}\qquad \operatorname{tang}\frac{at}{\varepsilon} = -\frac{Q+\frac{Q'}{t}+\frac{Q''}{t^2}\cdots}{P+\frac{P'}{t}+\frac{P''}{t^2}\cdots},$$

et que l'on satisfait à l'équation (6) par une infinité de valeurs infiniment petites de ε (*). Généralement on tirera de l'équation (4), en supposant que la lettre caractéristique Φ désigne une fonction entière,

$$\text{(7)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\Theta+\theta\,\mathrm{i})e^{(\Theta+\theta\mathrm{i})t}d\theta = \frac{0}{0}.$$

Si l'on considérait l'intégrale (7) comme la limite de la suivante

$$\text{(8)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}\Phi(\Theta-\theta\,\mathrm{i})e^{(\Theta-\theta\mathrm{i})t}d\theta$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta}\,\frac{\Phi(\Theta+\theta\mathrm{i})e^{(\Theta+\theta\mathrm{i})t}+\Phi(\Theta-\theta\,\mathrm{i})e^{(\Theta-\theta\mathrm{i})t}}{2}\,d\theta,$$

on trouverait une valeur nulle, au lieu d'une valeur indéterminée. Car on a généralement

$$\text{(9)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}e^{(\Theta+\theta\mathrm{i})t}dt = e^{\Theta t}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}$$
$$= e^{\Theta t}\left(\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{i}-t}+\frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{i}+t}\right)\mathrm{i}$$
$$= e^{\Theta t}\mathrm{i}\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}+\frac{1}{t-\varepsilon\,\mathrm{i}}\right),$$

(*) Nous avons supprimé ici une transformée des équations (5), (6), et dans les formules (3), (4), (5), (6), nous avons restitué à l'arc $\frac{at}{\varepsilon}$ le facteur t omis par erreur dans le manuscrit.

et par suite l'intégrale

$$(10)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}(\Theta+\theta\,\mathrm{i})^n e^{(\Theta+\theta\,\mathrm{i})t}\,d\theta$$

$$=\mathrm{i}\,\frac{d^n\left[e^{\Theta t}\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}-\frac{1}{t-\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)\right]}{dt^n}$$

$$=\mathrm{i}\,.\,e^{\Theta t}\left\{\begin{array}{l}\Theta^n\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}-\frac{1}{t-\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)-n\Theta^{n-1}\left[\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)^2-\left(\frac{1}{t-\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)^2\right]\\ +\,n(n-2)\Theta^{n-2}\left[\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)^3-\left(\frac{1}{t+\varepsilon\,\mathrm{i}}\right)^3\right]-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

sera composée de termes qui s'évanouiront tous pour $\varepsilon=0$.

On obtiendrait encore une valeur nulle pour l'intégrale (7), si on la considérait comme limite de l'une des suivantes :

$$(11)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta^2}\Phi(\Theta+\theta\,\mathrm{i})\,e^{(\Theta+\theta\,\mathrm{i})t}\,d\theta,$$

ou

$$(12)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\Theta+\theta\,\mathrm{i})\,e^{(\Theta+\theta\,\mathrm{i})t}\,d\theta}{1+\varepsilon^2\theta^2}.$$

Enfin, si l'on désigne par $\varphi(\theta)$ une fonction entière de θ, l'intégrale

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\theta).e^{t\theta\,\mathrm{i}}\,d\theta,$$

considérée comme limite de l'une des suivantes

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}\varphi(\theta)\,e^{\theta t\,\mathrm{i}}\,d\theta,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\theta^2}\varphi(\theta)e^{\theta t\,\mathrm{i}}\,d\theta,\\ \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\theta).e^{\theta t\,\mathrm{i}}\frac{d\theta}{1+\varepsilon^2\theta^2}\,d\theta,\end{array}\right.$$

aura toujours une valeur nulle, et par suite il en sera de même de

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l}e^{\Theta t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\theta)e^{t\theta\,\mathrm{i}}\,d\theta,\\ =\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\theta)e^{(\Theta+\theta\,\mathrm{i})t}\,d\theta.\end{array}\right.$$

Concevons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer l'équation différentielle

$$A_0 u + A_1 \frac{du}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n u}{dt^n} = 0, \tag{16}$$

de mànière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$u = u_0, \qquad \frac{du}{dt} = u_1, \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = u_2, \ldots \qquad \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} = u_{n-1}, \tag{17}$$

on fera

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} v e^{(\Theta + \theta i)t} d\theta, \tag{18}$$

v étant une fonction inconnue de θ, et Θ une constante arbitraire. En substituant la valeur précédente de u dans l'équation (16), et posant

$$F(\theta) = A_0 + A_1 \theta + A_2 \theta^2 + \ldots + A_n \theta^n, \tag{19}$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} v F(\Theta + \theta i) e^{(\Theta + \theta i)t} d\theta = 0. \tag{20}$$

Or, en vertu des principes ci-dessus établis, on vérifiera l'équation (20), si l'on prend

$$v F(\Theta + \theta i) = \varphi(\Theta + \theta i), \tag{21}$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction entière quelconque de x. Par suite, la formule (18) deviendra

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\Theta + \theta i)}{F(\Theta + \theta i)} e^{(\Theta + \theta i)t} d\theta. \tag{22}$$

Si, dans cette dernière, on suppose la fonction $\varphi(x)$ du degré $n - 1$, et si l'on désigne par

$$\theta_0, \quad \theta_1, \ldots \quad \theta_{n-1}, \tag{23}$$

les racines de l'équation $F(\theta) = 0$, on aura, en prenant pour Θ une limite supérieure aux parties réelles de toutes

ces racines, et en vertu de l'équation (24) [§ 2],

$$(24)\qquad \frac{u}{2\pi}=\frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)}e^{\theta_0 t}+\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}e^{\theta_1 t}+\ldots+\frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})}e^{\theta_{n-1}t},$$

la variable t étant considérée comme positive. La fonction φ étant arbitraire et du degré $n-1$, il est clair que les fractions

$$(25)\qquad \frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)},\quad \frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)},\ldots\quad \frac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})},$$

représentent n constantes arbitraires. Donc l'équation (24) fournit la valeur générale de u. Il reste à substituer aux quantités (25) les constantes arbitraires $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$. Or, les formules (17) donneront

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)}+\dfrac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\ldots+\dfrac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})}=\dfrac{u_0}{2\pi},\\ \theta_0\dfrac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\theta_1\dfrac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\ldots+\theta_{n-1}\dfrac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})}=\dfrac{u_1}{2\pi},\\ \text{etc...}\\ \theta_0^{n-1}\dfrac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\theta_1^{n-1}\dfrac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\ldots+\theta_{n-1}^{n-1}\dfrac{\varphi(\theta_{n-1})}{F'(\theta_{n-1})}=\dfrac{u_{n-1}}{2\pi}. \end{array}\right.$$

On aura d'ailleurs, d'après la formule de Lagrange,

$$(27)\qquad \begin{aligned}\varphi(\theta)&=\frac{(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2)\ldots(\theta-\theta_{n-1})}{(\theta_0-\theta_1)(\theta_0-\theta_2)\ldots(\theta_0-\theta_{n-1})}\varphi(\theta_0)+\text{etc...}\\ &=\frac{F(\theta)-F(\theta_0)}{(\theta-\theta_0)F'(\theta_0)}\varphi(\theta_0)+\frac{F(\theta)-F(\theta_1)}{(\theta-\theta_1)F'(\theta_1)}\varphi(\theta_1)+\text{etc...}\\ &=\frac{F(\theta)-F(\theta_0)}{\theta-\theta_0}\frac{\varphi(\theta_0)}{F'(\theta_0)}+\frac{F(\theta)-F(\theta_1)}{\theta-\theta_1}\frac{\varphi(\theta_1)}{F'(\theta_1)}+\text{etc...}\end{aligned}$$

En développant le second membre de l'équation (27) suivant les puissances de θ, on obtiendra précisément le même développement qui résulterait de la fraction

$$(28)\qquad \frac{1}{2\pi}\frac{F(\theta)-F(U)}{\theta-U},$$

si l'on remplaçait ensuite les puissances successives de U, savoir

$$U^0, \quad U^1, \quad U^2, \ldots \quad U^{n-1},$$

par les quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots \quad u_{n-1},$$

déterminées à l'aide des équations (26). On aura donc sous cette condition

$$\varphi(\theta) = \frac{F(\theta) - F(U)}{\theta - U} \times \frac{1}{2\pi}, \tag{29}$$

en sorte que la formule (22) donnera

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{F(\Theta + \theta i) - F(U)}{(\Theta + \theta i) - U} \frac{e^{(\Theta + \theta i)t}\, d\theta}{F(\Theta + \theta i)}. \tag{30}$$

En développant cette dernière formule suivant les puissances entières de U, on trouverait

$$u = u_0 T_0 + u_1 T_1 + u_2 T_2 \ldots + u_{n-1} T_{n-1}, \tag{31}$$

$T_0, T_1 \ldots T_{n-1}$ désignant des fonctions connues de t, représentées par des intégrales définies, savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1 + A_2(\Theta + \theta i) \ldots + A_n(\Theta + \theta i)^{n-1}}{F(\Theta + \theta i)} e^{(\Theta + \theta i)t} \frac{d\theta}{2\pi}, \\ T_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2 + A_3(\Theta + \theta i) + \ldots + A_n(\Theta + \theta i)^{n-2}}{F(\Theta + \theta i)} e^{(\Theta + \theta i)t} \frac{d\theta}{2\pi}, \\ \text{etc...} \\ T_{n-1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{F(\Theta + \theta i)} e^{(\Theta + \theta i)t} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{array} \right. \tag{32}$$

Concevons à présent que l'on désigne par

$$\nabla_0 u, \quad \nabla_1 u \ldots \quad \nabla_{n-1} u$$

des fonctions linéaires de la fonction u et de ses dérivées des divers ordres $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}$, etc..., en sorte que, $\alpha = \frac{d}{dt}$ étant

la caractéristique d'une différentiation relative à t, on ait, en adoptant les conventions du paragraphe 3e,

$$(33)\quad \nabla_0 u = f_0(\alpha).u,\quad \nabla_1 u = f_1(\alpha).u \ldots \quad \nabla_{n-1} u = f_{n-1}(\alpha).u.$$

On tirera des équations (32)

$$(34)\quad \begin{cases} \nabla_0 T_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1 + \ldots + A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)} f_0(\Theta+\theta i).e^{(\Theta+\theta i)t}\frac{d\theta}{2\pi}, \\ \nabla_0 T_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2 \ldots + A_n(\Theta+\theta i)^{n-1}}{F(\Theta+\theta i)} f_0(\Theta+\theta i).e^{(\Theta+\theta i)t}\frac{d\theta}{2\pi}, \\ \text{etc...} \\ \nabla_0 T_{n-1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{F(\Theta+\theta i)} f_0(\Theta+\theta i).e^{(\Theta+\theta i)t}\frac{d\theta}{2\pi}, \end{cases}$$

etc...

et de l'équation (31)

$$(35)\quad \begin{cases} \nabla_0 u = u_0.\nabla_0 T_0 + u_1.\nabla_0 T_1 + \ldots + u_{n-1}.\nabla_0 T_{n-1}, \\ \nabla_1 u = u_0.\nabla_1 T_0 + u_1.\nabla_1 T_1 + \ldots + u_{n-1}.\nabla_1 T_{n-1}, \\ \text{etc...} \\ \nabla_{n-1} u = u_0.\nabla_{n-1} T_0 + u_1.\nabla_{n-1} T_1 + \ldots + u_{n-1}\nabla_{n-1} T_{n-1}. \end{cases}$$

Cela posé, il deviendra facile de fixer la valeur de u, si l'on donne, au lieu des quantités

$$u_0,\quad u_1 \ldots\quad u_{n-1},$$

la valeur de. . . $\nabla_0 u$ correspondante à $t = t_0$,

$\nabla_1 u$ . . . . . $t = t_1$,

etc... etc...

$\nabla_{n-1} u$ . . . . . $t = t_{n-1}$.

En effet, il suffira, dans ce cas, de substituer, dans la formule (31), à la place de $u_0, u_1 \ldots u_{n-1}$, leurs valeurs déduites des équations (35), dont les premiers membres se réduiront à des quantités constantes, et les seconds membres à des fonctions linéaires des inconnues $u_0, u_1 \ldots u_{n-1}$, les coefficients

étant représentés par des intégrales définies semblables à celles que fournissent les formules (34), quand on y pose $t = t_0$.

Nous avons, dans ce qui précède, supposé la variable t positive. Si elle devenait négative, il faudrait, pour retrouver la valeur générale de u, remplacer dans l'équation (22) la constante arbitraire Θ par une limite inférieure aux parties réelles des racines $\theta_0, \theta_1 \dots \theta_{n-1}$, puis dans les formules (24) et (26), les quantités

$$u, \quad u_0, \quad u_1, \dots \quad u_{n-1},$$

par

$$-u, \quad -u_0, \quad -u_1, \dots \quad -u_{n-1}.$$

En conséquence, les équations (30), (32), etc..., conserveraient la même forme. Seulement Θ y aurait changé de valeur.

Il est bon de remarquer que, en vertu des conventions admises dans le paragraphe 3e, l'équation (16) peut être présentée sous la forme

$$\mathrm{F}(\alpha)\, u = 0. \tag{36}$$

Si l'on avait à résoudre l'équation

$$\mathrm{F}(\alpha)\, u = f(t), \tag{37}$$

ou

$$\mathrm{A}_0 u + \mathrm{A}_1 \frac{du}{dt} + \dots + \mathrm{A}_n \frac{d^n u}{dt^n} = f(t), \tag{38}$$

il est clair qu'une valeur particulière de u serait

$$u = \frac{f(t)}{\mathrm{F}(\alpha)}, \tag{39}$$

ou, ce qui revient au même,

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau'}^{\tau''} e^{\alpha i (t-\tau)} f(\tau) \frac{d\tau\, d\alpha}{\mathrm{F}(\alpha i)}; \tag{40}$$

ou bien encore, en remplaçant αi par $a + \alpha i$, puis écri-

vant Θ au lieu de a et θ au lieu de α, on trouverait

$$(41) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau'}^{\tau''} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)}\frac{f(\tau)d\tau d\theta}{F(\Theta+\theta i)},$$

t étant renfermée entre les limites τ', τ''. Telle serait une valeur particulière de u. Il suffirait ensuite de poser

$$(42) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau'}^{\tau''} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)}\frac{f(\tau)}{F(\Theta+\theta i)}d\tau d\theta + v,$$

pour obtenir en v une équation entièrement semblable à l'équation (16).

Il est facile de s'assurer que la formule (41) résout l'équation (37), dans le cas même où l'on pose $\tau' = 0$, $\tau'' = t$. Soit en effet

$$(43) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)}\frac{f(\tau)d\tau d\theta}{F(\Theta+\theta i)};$$

on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)}\frac{(\Theta+\theta i)f(\tau)d\tau d\theta}{F(\Theta+\theta i)} + \frac{f(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{F(\Theta+\theta i)},$$

etc...,

et par suite

$$(44) \qquad F(\alpha)u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{t} e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)}f(\tau)d\tau d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi}[A_1 f(t) + A_2 f'(t) \ldots + A_n f^{(n-1)}(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{F(\Theta+\theta i)}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}[A_2 f(t) + \ldots + A_n f^{(n-2)}(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Theta+\theta i)d\theta}{F(\Theta+\theta i)}$$
$$+ \text{etc...}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}[A_n f(t)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Theta+\theta i)^{n-1}d\theta}{F(\Theta+\theta i)}.$$

Or, il est clair que, dans le second membre de l'équation (44),

les coefficients de

$$f'(t), \qquad f''(t), \ldots \qquad f^{(n-1)}(t)$$

sont ce que deviennent les intégrales

$$T_1, \qquad T_2, \ldots \qquad T_{n-1},$$

pour $t = 0$, c'est-à-dire, égaux aux nombres

$$0, \qquad 0, \ldots \qquad 0.$$

Quant au coefficient de $f(t)$, c'est-à-dire, à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1 + A_2(\Theta + \theta i) + \ldots + A_n(\Theta + \theta i)^n}{F(\Theta + \theta i)}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\Theta + \theta i) - F(0)}{F(\Theta + \theta i)}\, \frac{d\theta}{\Theta + \theta i},$$

il est facile de s'assurer que sa valeur sera indépendante de la quantité Θ; et, comme pour de très-grandes valeurs de Θ on a sensiblement

$$\frac{F(\Theta + \theta i) - F(0)}{F(\Theta + \theta i)} = 1,$$

cette même intégrale se réduira sensiblement à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\Theta + \theta i} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta d\theta}{\Theta^2 + \theta^2} = \frac{1}{2},$$

pourvu que l'on se borne à calculer sa valeur principale, qui est effectivement la limite de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\theta^2}}\, \frac{d\theta}{\Theta + \theta i}.$$

De plus, comme on a généralement

$$(45) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau'}^{t} e^{(\Theta + \theta i)(t-\tau)} f(\tau) d\tau d\theta = \frac{1}{2} f(t),$$

l'équation (44) donnera évidemment

$$F(\alpha) u = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) = f(t).$$

Ainsi la valeur de u, déterminée par l'équation (43), satisfait à l'équation (37). Si d'ailleurs on observe que cette valeur de u s'évanouit pour $t=0$, on arrivera aux conclusions suivantes.

Pour obtenir une valeur de u qui soit propre à vérifier l'équation (37), quelle que soit la valeur de t, et les conditions (17) lorsqu'on pose $t=0$, il suffit de prendre

$$u = u_0 T_0 + u_1 T_1 + \ldots + u_{n-1} T_{n-1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\,d\theta}{F(\Theta+\theta i)}, \tag{46}$$

ou, ce qui revient au même,

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i)-F(U)}{\Theta+\theta i-U}\,\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}}{F(\Theta+\theta i)} + \int_0^t \frac{e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau}{F(\Theta+\theta i)}\right] d\theta, \tag{47}$$

les puissances de U devant être remplacées par $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$, et Θ devant être supérieur ou inférieur aux parties réelles de toutes les racines, suivant que la variable t est considérée comme positive ou comme négative. On peut encore présenter l'équation (47) sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i)-F(U)}{\Theta+\theta i-U}\,e^{(\Theta+\theta i)t} + \int_0^t e^{(\Theta+\theta i)(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau\right]\frac{d\theta}{F(\Theta+\theta i)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{F(\Theta+\theta i)-F(U)}{\Theta+\theta i-U} + \int_0^t \frac{f(\tau)\,d\tau}{e^{(\Theta+\theta i)\tau}}\right]\frac{e^{(\Theta+\theta i)t}\,d\theta}{F(\Theta+\theta i)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Il est important de remarquer que, dans l'intégrale double que renferme le second membre de l'équation (41), la fonction

$$\frac{1}{F(\Theta+\theta i)}$$

ne devient infinie pour aucune valeur réelle de θ, lorsque Θ est une limite supérieure ou inférieure aux parties réelles de toutes les racines. Il n'en serait plus de même si Θ devenait précisément égale à l'une des parties réelles dont il s'agit.

Alors l'intégrale en question deviendrait indéterminée, et la différence entre sa valeur générale et sa valeur principale serait un terme de la forme

$$ce^{\theta_m t},$$

c désignant une constante arbitraire, et θ_m une racine de l'équation $F(\theta) = 0$. Si les parties réelles de toutes les racines étaient égales entre elles et à Θ, alors

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau'}^{\tau''} \frac{e^{(\Theta+\theta i)(\tau-t)}}{F(\Theta+\theta i)}\, f(\tau)\, d\tau\, d\theta, \tag{41}$$

représenterait l'intégrale générale de l'équation

$$F(\alpha)\, u = f(t). \tag{37}$$

En se servant uniquement de la notation de M. Brisson, on peut trouver, de la manière suivante, l'intégrale générale de l'équation (37) sous la forme donnée par ce géomètre.

Supposons l'expression

$$F(\alpha, 6, \gamma\ldots)\, f(x, y, z\ldots),$$

définie par l'équation (16) du paragraphe 3e, et soient toujours

$$\theta_0, \qquad \theta_1, \ldots \qquad \theta_{n-1},$$

les racines de l'équation

$$F(\theta) = 0, \tag{49}$$

on aura identiquement

$$F(\alpha) = A_n(\alpha - \theta_0)(\alpha - \theta_1)\ldots(\alpha - \theta_{n-1}); \tag{50}$$

et par suite, u désignant une fonction quelconque de x, on aura, en vertu des principes établis dans le paragraphe 3e,

$$F(\alpha)\, u = [A_n(\alpha - \theta_1)(\alpha - \theta_2)\ldots(\alpha - \theta_{n-1})](\alpha - \theta_0)\, u; \tag{51}$$

ou si l'on pose

$$(52) \qquad (\alpha - \theta_0)u = v,$$

on aura

$$(53) \qquad F(\alpha)u = A_n(\alpha - \theta_1)(\alpha - \theta_2)\ldots(\alpha - \theta_{n-1})v.$$

Par suite, on vérifiera l'équation

$$(54) \qquad F(\alpha)u = 0,$$

en prenant $v = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$(55) \qquad (\alpha - \theta_0)u = 0.$$

On prouvera également que l'équation (54) est vérifiée par toutes les valeurs de u propres à vérifier les suivantes

$$(56) \qquad (\alpha - \theta_0)u = 0, \quad (\alpha - \theta_1)u = 0, \ldots \quad (\alpha - \theta_{n-1})u = 0.$$

Donc, on la vérifiera encore si l'on prend pour u la somme des intégrales générales des équations (56), c'est-à-dire,

$$(57) \qquad u = c_0 e^{\theta_0 t} + c_1 e^{\theta_1 t} + \ldots + c_{n-1} e^{\theta_{n-1} t},$$

$c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ désignant n constantes arbitraires.

Si l'on propose de résoudre, à la place de l'équation (54), la suivante

$$(58) \qquad F(\alpha)u = f(t),$$

il suffira de connaître une valeur particulière de u, telle que

$$(59) \qquad u = \frac{f(t)}{F(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\theta(t-\tau)i}f(\tau)d\tau d\theta}{F(\theta i)}.$$

En ajoutant à cette valeur particulière de u le second membre de la formule (57), on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (56).

Observons maintenant que

$$(60) \qquad \frac{1}{F(\alpha)} = \frac{1}{F'(\theta_0)}\frac{1}{\alpha - \theta_0} + \frac{1}{F'(\theta_1)}\frac{1}{\alpha - \theta_1} + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})}\frac{1}{\alpha - \theta_{n-1}}.$$

Donc

$$(61)\qquad \frac{f(t)}{F'(\alpha)} = \frac{1}{F'(\theta_0)}\frac{f(t)}{\alpha-\theta_0} + \frac{1}{F'(\theta_1)}\frac{f(t)}{\alpha-\theta_1} + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})}\frac{f(t)}{\alpha-\theta_{n-1}}.$$

De plus

$$(62)\qquad \begin{aligned}\frac{f(t)}{\alpha-\theta_0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta(t-\tau)i}\frac{f(\tau)d\tau d\theta}{\theta i-\theta_0}\\ &= \frac{1}{2\pi}e^{\theta_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta i-\theta_0)t}e^{-\theta\tau i}\frac{f(\tau)d\tau d\theta}{\theta i-\theta_0}\\ &= e^{\theta_0 t}\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta i-\theta_0)t}e^{-\theta\tau i}f(\tau)d\tau d\theta dt\\ &= e^{\theta_0 t}\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta_0 t}e^{\theta(t-\tau)i}f(\tau)d\tau d\theta dt\\ &= e^{\theta_0 t}\int e^{-\theta_0 t}f(t)dt,\end{aligned}$$

l'intégration relative à t étant effectuée à partir de la limite qui fait évanouir l'exponentielle $e^{-\theta_0 t}$, c'est-à-dire, à partir de $t=-\infty$ si la partie réelle de θ_0 est positive, et à partir de $t=+\infty$ dans le cas contraire. On aura, par suite, en vertu des équations (59) et (61),

$$(63)\qquad u = \frac{1}{F'(\theta_0)}e^{\theta_0 t}\int e^{-\theta_0 t}f(t)dt + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})}e^{\theta_{n-1}t}\int e^{-\theta_{n-1}t}f(t)dt.$$

Si à cette valeur de u, dans laquelle chaque intégrale est prise à partir de la limite $-\infty$ ou $+\infty$, on ajoute le second membre de l'équation (57), on obtiendra une valeur de même forme, mais dans laquelle chaque signe $\int$ indiquera une intégration indéfinie. Cette nouvelle valeur sera l'intégrale générale de la formule (58).

Si, en supposant toujours la notation

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots)$$

définie par l'équation (16) du paragraphe 3^e, on indique par

les caractéristiques

$$(64) \qquad D_x = \frac{d}{dx}, \quad D_y = \frac{d}{dy}, \ldots$$

les dérivées d'une fonction de $x, y, z\ldots$ relatives à $x, y, z\ldots$, et par

$$(65) \qquad u = \frac{f(x,y,z\ldots)}{F(D_x, D_y\ldots)}$$

l'intégrale générale de l'équation

$$F(D_x, D_y\ldots)u = f(x,y,z\ldots),$$

dans le cas où $F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)$ est une fonction entière de $\alpha,\beta,\gamma\ldots$, on aura généralement dans le même cas

$$(66) \quad F(D_x, D_y, D_z\ldots)f(x,y,z\ldots) = F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)f(x,y,z\ldots).$$

Mais l'expression

$$(67) \qquad \frac{f(x,y,z\ldots)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)},$$

ne sera qu'une valeur particulière de

$$(68) \qquad \frac{f(x,y,z\ldots)}{F(D_x, D_y, D_z,\ldots)}.$$

Ces conventions étant admises, l'équation (58) pourra être présentée sous la forme

$$(69) \qquad F(D_t)u = f(t),$$

et l'on en conclura facilement

$$(70) \qquad u = \frac{f(t)}{F(D_t)} = \frac{1}{F'(\theta_0)}\frac{f(t)}{D_t - \theta_0} + \ldots + \frac{1}{F'(\theta_{n-1})}\frac{f(t)}{D_t - \theta_{n-1}}.$$

Cette dernière équation ramène l'expression

$$\frac{f(t)}{F(D_t)}$$

aux suivantes

$$\frac{f(t)}{D_t-\theta_0},\quad \frac{f(t)}{D_t-\theta_1},\ldots\quad \frac{f(t)}{D_t-\theta_{n-1}},$$

c'est-à-dire qu'elle ramène l'intégrale générale de l'équation (69) à celles des équations

$$(71)\qquad (D_t-\theta_0)u=f(t),\ldots(D_t-\theta_{n-1})u=f(t),$$

ou, en d'autres termes, à celles des équations

$$(72)\qquad \frac{du}{dt}-\theta_0 u=f(t),\ldots\frac{du}{dt}-\theta^{n-1}u=f(t).$$

Or, ces intégrales générales étant respectivement

$$(73)\quad\begin{cases} u=e^{\theta_0 t}\left[c_0+\int_0^t e^{-\theta_0 t}f(t)dt\right], \text{ etc...}\\ \ldots\ldots\ldots\quad u=e^{\theta_{n-1}t}\left[c_{n-1}+\int_0^t e^{-\theta_{n-1}t}f(t)dt\right], \end{cases}$$

l'équation (70) deviendra

$$(74)\qquad u=\frac{e^{\theta_0 t}}{F'(\theta_0)}\left[c_0+\int_0^t e^{-\theta_0 t}f(t)dt\right]+\ldots+\frac{e^{\theta_{n-1}t}}{F'(\theta_{n-1})}\left[c_{n-1}+\int_0^t e^{-\theta_{n-1}t}f(t)dt\right].$$

Telle est la méthode la plus simple pour former l'intégrale générale de l'équation (38).

§ 5. *Intégration des équations linéaires aux différences partielles, et à coefficients constants.*

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$(1)\qquad F(D_x, D_y, D_z\ldots D_t)u=f(x, y, z\ldots t),$$

de manière que, pour $t=0$,

$$(2)\qquad u,\ \frac{du}{dt},\ldots\quad \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}},$$

se réduisent à

$$(3)\quad f_0(x, y, z\ldots), f_1(x, y, z\ldots),\ldots\qquad f_{m-1}(x, y, z\ldots),$$

m étant l'ordre de l'équation par rapport à t, c'est-à-dire le plus haut exposant de D_t dans $F(D_x, D_y, D_z \dots D_t)$; on posera

$$(4) \qquad u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mu'}^{\mu''} \dots e^{\alpha(x-\mu)i} e^{6(y-\nu)i} \dots v\, d\alpha\, d\mu\, d6\, d\nu \dots,$$

et il suffira évidemment d'intégrer l'équation différentielle

$$(5) \qquad F(\alpha i, 6i \dots D_t)v = f(\mu, \nu \dots t),$$

dans laquelle l'inconnue v représente une fonction de t, de manière que l'on ait, pour $t = 0$,

$$(6) \qquad v = f_0(\mu,\nu\dots),\ \frac{dv}{dt} = f_1(\mu,\nu\dots),\ \dots \qquad \frac{d^{m-1}v}{dt^{m-1}} = f_{m-1}(\mu,\nu\dots).$$

Ce dernier problème se résout très-facilement par le paragraphe 4.

Supposons encore que l'on doive avoir

$$(7) \quad \begin{cases} \text{pour} \quad t = t_0, & F_0(D_x, D_y \dots D_t)u = f_0(x, y, z\dots) \\ \text{pour} \quad t = t_1, & F_1(D_x, D_y \dots D_t)u = f_1(x, y, z\dots) \\ \text{etc...} \\ \text{pour} \quad t = t_{m-1}, & F_{m-1}(D_x, D_y, \dots D_t)u = f_{m-1}(x, y, z\dots). \end{cases}$$

Dans ce cas il suffira d'intégrer l'équation (5), de manière que l'on ait

$$(8) \quad \begin{cases} \text{pour} \quad t = t_0, & F_0(\alpha i, 6i \dots D_t)v = f_0(\mu, \nu\dots), \\ \text{pour} \quad t = t_1, & F_1(\alpha i, 6i \dots D_t)v = f_1(\mu, \nu\dots), \\ \text{etc...} \\ \text{pour} \quad t = t_{m-1}, & F_{m-1}(\alpha i, 6i \dots D_t)v = f_{m-1}(\mu, \nu\dots). \end{cases}$$

Ce problème se résout encore très-simplement par le paragraphe 4ᵉ.

Soient maintenant

$$(9) \qquad \varphi_0(\alpha,6\dots),\ \varphi_1(\alpha,6\dots),\ \dots \qquad \varphi_{m-1}(\alpha,6\dots),$$

les valeurs de θ tirées de l'équation

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta)=0; \tag{10}$$

on vérifiera l'équation

$$F(\alpha i,\ \beta i\ldots D_t)v=0, \tag{11}$$

en posant

$$v=e^{t\varphi_0(\alpha i,\beta i\ldots)}\psi_0(\mu,\nu\ldots)+\ldots+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha i,\beta i\ldots)}\psi_{m-1}(\mu,\nu\ldots); \tag{12}$$

et, en substituant cette valeur de v dans la formule (4), puis adoptant les notations du paragraphe 3e, on trouvera, pour l'intégrale générale de l'équation

$$F(D_x,\ D_y\ldots D_t).u=0, \tag{13}$$

la formule

$$u=e^{t\varphi(\alpha,\beta\ldots)}\psi_0(x,y\ldots)+\ldots+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)}\psi_{m-1}(x,y\ldots). \tag{14}$$

Si l'on ajoute au second membre de cette dernière une valeur particulière de u propre à vérifier l'équation (1), telle que

$$u=\frac{f(x,y,x\ldots t)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta)}, \tag{15}$$

on trouvera, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$u=e^{t\varphi(\alpha,\beta\ldots)}\psi_0(x,y\ldots)+\ldots+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)}\psi_{m-1}(x,y\ldots)+\frac{f(x,y,z\ldots t)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta)}. \tag{16}$$

La valeur correspondante de v serait

$$v=e^{t\varphi_0(\alpha i,\beta i\ldots)}\psi_0(\mu,\nu\ldots)+\ldots+e^{t\varphi_{m-1}(\alpha i,\beta i\ldots)}\psi_{m-1}(\mu,\nu\ldots)+\frac{f(\mu,\nu\ldots t)}{F(\alpha i,\beta i\ldots\theta i)}, \tag{17}$$

le dernier terme représentant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta(t-\tau)i}\frac{f(\mu,\nu\ldots\tau)}{F(\alpha i,\beta i\ldots\theta i)}\,d\tau d\theta. \tag{18}$$

Cela posé, il est facile de voir que les équations (7) donneront

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} f_0(x,y,z\ldots) = \\ \quad e^{t_0\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha,\beta\ldots\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)]\,\psi_0(x,y\ldots) + \ldots\ldots \\ + e^{t_0\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha,\beta\ldots\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)]\,\psi_{m-1}(x,y\ldots) \\ + \dfrac{\mathrm{F}_0(\alpha,\beta\ldots\theta)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta\ldots\theta)} f(x,y,z\ldots t_0), \\ f_1(x,y,z\ldots) = \\ \quad e^{t_0\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)}\mathrm{F}_1[\alpha,\beta\ldots\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)]\,\psi_0(x,y\ldots) + \ldots\ldots \\ + e^{t_1\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)}\mathrm{F}_1[\alpha,\beta\ldots\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)]\,\psi_{m-1}(x,y\ldots) \\ + \dfrac{\mathrm{F}_1(\alpha,\beta\ldots\theta)}{\mathrm{F}(\alpha,\beta\ldots\theta)} f(x,y,z\ldots t_1), \\ \text{etc...,} \end{array}\right.$$

tandis que les équations (8) donneront

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} f_0(\mu,\nu\ldots) = \\ \quad e^{t_0\varphi_0(\alpha i,\beta i\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha i,\beta i\ldots\varphi_0(\alpha i,\beta i\ldots)]\,\psi_0(\mu,\nu\ldots) + \ldots\ldots \\ + e^{t_0\varphi_{m-1}(\alpha i,\beta i\ldots)}\mathrm{F}_0[\alpha i,\beta i\ldots\varphi_{m-1}(\alpha i,\beta i\ldots)]\,\psi_{m-1}(\mu,\nu\ldots) \\ + \dfrac{\mathrm{F}_0(\alpha i,\beta i\ldots\theta)}{\mathrm{F}(\alpha i,\beta i\ldots\theta)} f(\mu,\nu\ldots t_0), \\ \text{etc...} \end{array}\right.$$

Les équations (19), dans lesquelles $\alpha,\beta\ldots$ représentent des caractéristiques, serviront, en vertu des principes établis dans le paragraphe 3^e, à déterminer les fonctions inconnues

$$\psi_0(x,y\ldots),\qquad \psi_1(x,y\ldots),\ \ldots\qquad \psi_{m-1}(x,y\ldots).$$

Les équations (20), dans lesquelles $\alpha,\beta\ldots\mu,\nu\ldots$ (θ excepté) représentent de véritables quantités, serviront à déterminer, de la même manière, les fonctions inconnues

$$\psi_0(\mu,\nu\ldots),\qquad \psi_1(\mu,\nu\ldots),\ \ldots\qquad \psi_{m-1}(\mu,\nu\ldots),$$

qui renfermeront de plus $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ Le calcul sera le même dans les deux cas, et on retrouvera les mêmes résultats, soit que l'on substitue les valeurs de $\psi_0(\mu,\nu\ldots)$, $\psi_1(\mu,\nu\ldots)\ldots$ dans

les formules (4) et (17), soit que l'on substitue les valeurs de $\psi_0(x, y...)$, $\psi_1(x, y...)$... dans la formule (16), pourvu toutefois que l'on se borne aux valeurs particulières de $\psi_0(x, y...)$, $\psi_1(x, y...)$, etc..., déduites par l'élimination des équations (19).

Si, conformément aux conventions établies dans le paragraphe 4^e^, on regarde la notation

$$\frac{f(x,y,z...t)}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y...\mathrm{D}_t)} \tag{21}$$

comme exprimant l'intégrale de

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y...\mathrm{D}_t)u = f(x, y, z...t), \tag{22}$$

alors, en supposant

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y...\mathrm{D}_t)} &= \frac{\mathrm{A}}{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + ... + k\mathrm{D}_t + l} \\ &+ \frac{\mathrm{A}'}{a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y + ... + k'\mathrm{D}_t + l'}, \\ &+ \text{etc...}\end{aligned} \tag{23}$$

on aura

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y,z...t)}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y...\mathrm{D}_t)} &= \mathrm{A}\,\frac{f(x,y,z...t)}{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + ... + k\mathrm{D}_t + l} \\ &+ \mathrm{A}'\,\frac{f(x,y,z...t)}{a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y + ... + k'\mathrm{D}_t + l'} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned} \tag{24}$$

Cette dernière formule ramène l'intégration de l'équation (22) à celles des équations de la forme

$$(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y ... + k\mathrm{D}_t + l)u = f(x, y, z...t). \tag{25}$$

Supposons, par exemple, que $\mathrm{F}(\alpha, \epsilon)$ soit une fonction homogène de α et ϵ du degré m, en sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\alpha,\epsilon) &= \epsilon^m \mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{\epsilon}, 1\right) \\ &= \mathrm{A}_m \epsilon^m \left(\frac{\alpha}{\epsilon} - \theta_0\right)\left(\frac{\alpha}{\epsilon} - \theta_1\right)...\left(\frac{\alpha}{\epsilon} - \theta_{m-1}\right) \\ &= \mathrm{A}_m\,(\alpha - \theta_0\epsilon)\,(\alpha - \theta_0\epsilon)...(\alpha - \theta_{m-1}\epsilon);\end{aligned}$$

on trouvera, en posant $\mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{\zeta}, 1\right) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\zeta}\right)$,

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\alpha,\zeta)} = \frac{1}{\Phi'(\theta_0)}\frac{1}{\alpha-\theta_0\zeta} + \ldots + \frac{1}{\Phi'(\theta_{m-1})}\frac{1}{\alpha-\theta_{m-1}\zeta},$$

et, par suite, l'intégrale de l'équation

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)\, u = f(x,y), \tag{26}$$

sera

$$u = \frac{f(x,y)}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)} \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\Phi'(\theta_0)}\frac{f(x,y)}{\mathrm{D}_x-\theta_0\mathrm{D}_y} + \frac{1}{\Phi'(\theta_1)}\frac{f(x,y)}{\mathrm{D}_x-\theta_1\mathrm{D}_y} + \ldots + \frac{1}{\Phi'(\theta_{m-1})}\frac{f(x,y)}{\mathrm{D}_x-\theta_{m-1}\mathrm{D}_y}.$$

En général, si $\mathrm{F}(\alpha,\zeta,\gamma,\ldots\theta)$ se décompose en plusieurs facteurs du premier degré, ou de la forme

$$a\alpha + b\zeta + c\gamma + \ldots + k\theta + l,$$

alors, en posant

$$\frac{d\mathrm{F}(\alpha,\zeta,\gamma\ldots\theta)}{d\alpha} = \varphi(\alpha,\zeta,\gamma\ldots\theta), \tag{28}$$

on trouvera

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\alpha,\zeta,\gamma\ldots\theta)} = \frac{1}{\varphi\left(-\frac{b\zeta+c\gamma\ldots+k\theta+l}{a}, \zeta,\gamma\ldots\theta\right)}\frac{1}{a\alpha+b\zeta\ldots+k\theta+l} \tag{29}$$

$$+ \text{ etc...},$$

et, par suite, l'intégrale générale de l'équation

$$\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z \ldots \mathrm{D}_t)\, u = f(x, y, z \ldots t) \tag{30}$$

sera

$$u = \frac{f(x,y,z\ldots t)}{\mathrm{F}(\mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y \ldots \mathrm{D}_t)} \tag{31}$$

$$= \frac{f(x,y,z\ldots t)}{\left(a\mathrm{D}_x+b\mathrm{D}_y\ldots+k\mathrm{D}_t+l\right)\varphi\left[-\left(\frac{b}{a}\mathrm{D}_y+\frac{c}{a}\mathrm{D}_y\ldots+\frac{k}{a}\mathrm{D}_t+\frac{l}{a}\right), \mathrm{D}_y, \mathrm{D}_z \ldots \mathrm{D}_t\right]}$$

$$+ \text{ etc...},$$

et se trouvera ramenée à celle des équations de la forme

$$(32)\quad \left(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y \ldots + k\mathrm{D}_t + l\right)\varphi\left[-\left(\frac{b}{a}\mathrm{D}_y + \ldots + \frac{k}{a}\mathrm{D}_t + l\right), \mathrm{D}_y \ldots \mathrm{D}_t\right].u = f(x,y\ldots t).$$

On peut aussi, dans cette hypothèse, présenter l'équation (30) sous la forme

$$(33)\quad \mathrm{A}_m(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y \ldots + k\mathrm{D}_t + l)\,(a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y \ldots + k'\mathrm{D}_t + l')\ldots u = f(x,y\ldots t),$$

et l'on en conclut

$$\mathrm{A}_m\,a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y \ldots + k'\mathrm{D}_t + l)\,(a''\mathrm{D}_x + \ldots + k''\mathrm{D}_t + l'')\ldots u = \frac{f(x,y\ldots t)}{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y \ldots + l}.$$

Par suite, si l'on fait

$$(34)\quad \frac{f(x,y,z\ldots t)}{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y \ldots + k\mathrm{D}_t + l} = v,$$

c'est-à-dire, si l'on intègre une équation aux différences partielles du premier ordre, on n'aura plus qu'à résoudre l'équation

$$(35)\quad \mathrm{A}_m(a'\mathrm{D}_x + \ldots + k'\mathrm{D}_t + l)\,(a''\mathrm{D}_x + \ldots + k''\mathrm{D}_t + l'')\ldots u = v,$$

dont le second membre est censé connu, et qui se trouve réduite à l'ordre $m-1$. Or, on tirera de celle-ci, en posant

$$(36)\quad \frac{v}{a'\mathrm{D}_x + b'\mathrm{D}_y \ldots + c'\mathrm{D}_t + l'} = w,$$

la nouvelle équation

$$(37)\quad \mathrm{A}_m(a''\mathrm{D}_x + b''\mathrm{D}_y \ldots + k''\mathrm{D}_t + l'')\ldots u = w,$$

qui est de l'ordre $m-2$ seulement;... et si tous les facteurs sont du premier degré, comme on l'a supposé, on finira par intégrer complètement l'équation (33).

Si l'on supposait

$$(38)\quad \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma\ldots) = \varphi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)\,\chi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)\ldots,$$

on ferait dépendre l'intégration de l'équation

$$F(D_x, D_y, D_z\ldots).u = f(x,y,z\ldots), \tag{39}$$

de celle d'une suite d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(D_x, D_y, D_z\ldots)v = f(x,y,z\ldots), \\ \chi(D_x, D_y, D_z\ldots)w = v, \\ \text{etc...} \end{array}\right. \tag{40}$$

Lorsque $F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)$ désigne, non plus une fonction entière, mais une fonction quelconque de $\alpha,\beta,\gamma\ldots$, on peut toujours satisfaire à l'équation linéaire

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)u = f(x,y,z\ldots), \tag{41}$$

en posant

$$u = \frac{f(x,y,z\ldots)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)}. \tag{42}$$

Mais ce n'est là qu'une valeur particulière de u. Pour obtenir la valeur générale de u, il faut ajouter, au second membre de l'équation (42), l'intégrale générale de

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)u = 0. \tag{43}$$

Or, soit

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots) = \varphi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)\,\chi(\alpha,\beta,\gamma\ldots), \tag{44}$$

et posons

$$\chi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)u = v : \tag{45}$$

on aura, en vertu des principes établis à la fin du paragraphe 3e,

$$F(\alpha,\beta,\gamma\ldots)u = \varphi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)v, \tag{46}$$

et, par suite, on satisfera à l'équation (43), non-seulement en posant $u = 0$, mais encore en posant $v = 0$ ou

$$\chi(\alpha,\beta,\gamma\ldots)u = 0. \tag{47}$$

Ainsi, $\chi(\alpha,\beta,\gamma...)$ étant un facteur quelconque de $F(\alpha,\beta,\gamma...)$, la valeur la plus générale de u, qui vérifiera la formule (47), vérifiera aussi l'équation (43). Donc, par suite, on pourra prendre pour u, dans l'équation (43), la somme des intégrales générales qu'on déduit de l'équation (47), en substituant successivement à $\chi(\alpha,\beta,\gamma...)$ tous les facteurs possibles de $F(\alpha,\beta,\gamma...)$.

Si l'équation

$$F(\alpha,\beta,\gamma...\theta) = 0, \tag{48}$$

étant résolue par rapport à θ, donne les valeurs

$$\theta = \varphi_0(\alpha,\beta...),\ \theta = \varphi_1(\alpha,\beta...),\ \ldots\ \theta_{m-1} = \varphi_{m-1}(\alpha,\beta...), \tag{49}$$

on vérifiera l'équation (43) en prenant pour u la somme des intégrales générales des équations

$$\left\{\begin{array}{l} [\theta - \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma...)]u = 0, \\ [\theta - \varphi_1(\alpha,\beta,\gamma...)]u = 0, \\ \text{etc...} \\ [\theta - \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma...)]u = 0. \end{array}\right. \tag{50}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma...)\,u, \\ \text{etc...} \\ \dfrac{du}{dt} = \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma...)\,u. \end{array}\right. \tag{51}$$

Or, si l'on pose

$$u = e^{t\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma...)}\psi_0(x,y...),$$

on aura évidemment

$$\frac{du}{dt} = \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma...)\,e^{t\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma...)}\psi(x,y...) = \varphi_0(\alpha,\beta...)\,u.$$

Donc, la première des équations (51) sera vérifiée. En rai-

sonnant de même pour les suivantes, puis, réunissant les diverses valeurs de u, on retrouvera

$$(52)\quad u = e^{t\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)}\psi_0(x,y\ldots) + \ldots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)}\psi_{m-1}(x,y\ldots),$$

c'est-à-dire, la formule (14). Du reste, il paraît difficile de démontrer en toute rigueur que la valeur de u, donnée par l'équation (52), est l'intégrale générale de la formule (43).

Revenons maintenant aux équations (19), et faisons, pour abréger

$$(53)\quad \begin{cases} f_0(x,y,z\ldots) - \dfrac{F_0(\alpha,\beta\ldots\theta)}{F(\alpha,\beta\ldots\theta)} f(x,y,z\ldots t_0) = f_0(x,y,z\ldots), \\ f_1(x,y,z\ldots) - \dfrac{F_1(\alpha,\beta\ldots\theta)}{F(\alpha,\beta\ldots\theta)} f(x,y,z\ldots t_1) = f_1(x,y,z\ldots), \\ \text{etc.}. \end{cases}$$

puis, écrivons simplement φ_0, $\varphi_1\ldots$, au lieu de $\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)$, $\varphi_1(\alpha,\beta\ldots)$, etc...; les équations (19) deviendront

$$(54)\quad \begin{cases} e^{t_0\varphi_0}F_0(\alpha,\beta..\varphi_0)\cdot\psi_0(x,y..) + \ldots + e^{t_0\varphi_{m-1}}F_0(\alpha,\beta..\varphi_{m-1})\cdot\psi_{m-1}(x,y..) \\ \qquad = f_0(x,y\ldots), \\ e^{t_1\varphi_0}F_1(\alpha,\beta..\varphi_0)\cdot\psi_0(x,y..) + \ldots + e^{t_1\varphi_{m-1}}F_1(\alpha,\beta..\varphi_{m-1})\cdot\psi_{m-1}(x,y..) \\ \qquad = f_1(x,y\ldots), \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Pour obtenir les valeurs générales de

$$\psi_0(x,y\ldots), \psi_1(x,y\ldots), \ldots \quad \psi_{m-1}(x,y\ldots),$$

propres à vérifier ces dernières, il suffit de calculer leurs valeurs particulières, en opérant comme si, dans les équations (54), toutes les lettres représentaient des quantités véritables, puis de joindre à ces valeurs particulières les valeurs générales propres à résoudre les équations

$$(55)\quad \begin{cases} e^{t_0\varphi_0}\mathrm{F}_0(\alpha,\beta..\varphi_0)\psi_0(x,y..)+..+e^{t_0\varphi_{m-1}}\mathrm{F}_0(\alpha,\beta..\varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x,y..)=0, \\ e^{t_1\varphi_0}\mathrm{F}_1(\alpha,\beta..\varphi_0)\psi_0(x,y..)+..+e^{t_1\varphi_{m-1}}\mathrm{F}_1(\alpha,\beta..\varphi_{m-1})\psi_{m-1}(x,y..)=0, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Si l'on élimine entre ces dernières $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{m-1}$, on obtiendra une nouvelle équation de la forme

$$(56)\qquad \varpi(\alpha,\beta,\gamma...)\psi_0(x,y,z...)=0.$$

$\varpi(\alpha,\beta,\gamma...)$ désignant le dénominateur commun des valeurs particulières de $\psi_0(x,y,z...)$, $\psi_1(x,y,z...)$, etc..., $\psi_{m-1}(x,y,z...)$, déduites par l'élimination des équations (54). Cela posé, on cherchera la valeur générale de $\psi_0(x,y,z...)$, propre à résoudre l'équation (56), à l'aide de la méthode indiquée pour la solution de l'équation (43), puis on la combinera avec des valeurs de $\psi_1(x,y,z...)$, $\psi_2(x,y,z...)$, etc..., $\psi_{m-1}(x,y,z...)$, déduites des équations

$$(57)\quad \begin{cases} \varpi(\alpha,\beta,\gamma...)\psi_1(x,y,z...)=0, \\ \text{etc...}, \\ \varpi(\alpha,\beta,\gamma...)\psi_{m-1}(x,y,z...)=0, \end{cases}$$

de manière que les équations (55) soient toujours satisfaites. On pourrait aussi substituer chaque valeur de $\psi_0(x,y,z...)$ dans les équations (55) pour en déduire les valeurs correspondantes de $\psi_1(x,y...)$, $\psi_2(x,y...)$..., $\psi_{m-1}(x,y...)$.

Exemple. Résoudre l'équation

$$(58)\qquad \frac{d^2u}{dt^2}+(m+n)\frac{d^2u}{dxdt}+mn\frac{d^2u}{dx^2}=0,$$

de manière que l'on ait

pour $t=t_0$, $u=f_0(x)$,
pour $t=t_1$, $u=f_1(x)$.

Solution. L'équation (58) se réduit à

$$[\theta^2 + (m+n)\alpha\theta + mn\alpha^2]\,u = 0. \tag{59}$$

Or, de la formule

$$\theta^2 + (m+n)\alpha\theta + mn\alpha^2 = 0,$$

ou

$$(\theta + m\alpha)(\theta + n\alpha) = 0,$$

on tire les valeurs suivantes de θ

$$\theta = -m\alpha, \qquad \theta = -n\alpha.$$

Donc, par suite

$$u = e^{-m\alpha t}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t}\psi_1(x). \tag{60}$$

En outre, les conditions prescrites donneront

$$\begin{cases} e^{-m\alpha t_0}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_0}\psi_1(x) = f_0(x), \\ e^{-m\alpha t_1}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_1}\psi_1(x) = f_1(x); \end{cases} \tag{61}$$

et l'on en conclura

$$\begin{cases} \varpi(\alpha)\cdot\psi_0(x) = e^{-n\alpha t_1} f_0(x) - e^{-n\alpha t_0} f_1(x), \\ \varpi(\alpha)\cdot\psi_1(x) = e^{-m\alpha t_0} f_1(x) - e^{-m\alpha t_1} f_0(x), \end{cases} \tag{62}$$

$\varpi(\alpha)$ étant déterminé par la formule

$$\begin{aligned} \varpi(\alpha) &= e^{-m\alpha t_0} e^{-n\alpha t_1} - e^{-n\alpha t_0} e^{-m\alpha t_1} \\ &= e^{-(nt_0 + mt_1)\alpha}\left[e^{(m-n)(t_1 - t_0)\alpha} - 1\right]. \end{aligned} \tag{63}$$

Par suite, en posant

$$(m-n)(t_1 - t_0) = k, \tag{64}$$

on trouvera

$$\begin{cases} (e^{k\alpha} - 1)\psi_0(x) = e^{(mt_0 + k)\alpha} f_0(x) + e^{mt_1\alpha} f_1(x), \\ (e^{k\alpha} - 1)\psi_1(x) = e^{(nt_1 + k)\alpha} f_1(x) + e^{nt_0\alpha} f_0(x). \end{cases} \tag{65}$$

Cela posé, les valeurs particulières de $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ seront

$$\begin{cases} \psi_0(x) = \dfrac{e^{(mt_0 + k)\alpha} f_0(x) + e^{mt_1\alpha} f_1(x)}{e^{k\alpha} - 1}, \\ \psi_1(x) = \dfrac{e^{(nt_1 + k)\alpha} f_1(x) + e^{nt_0\alpha} f_0(x)}{e^{k\alpha} - 1}; \end{cases} \tag{66}$$

et l'on devra joindre, à ces valeurs particulières, les valeurs générales de $\psi_0(x,y)$, $\psi_1(x,y)$ tirées des équations

$$(67)\qquad \begin{cases} e^{-m\alpha t_0}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_0}\psi_1(x) = 0, \\ e^{-m\alpha t_1}\psi_0(x) + e^{-n\alpha t_1}\psi_1(x) = 0. \end{cases}$$

Or, ces dernières donnent

$$\varpi(\alpha)\,\psi_0(x) = 0,$$

ou

$$(e^{k\alpha} - 1)\psi_0(x) = 0.$$

ou ce qui revient au même,

$$(68)\qquad \Delta\psi_0(x) = 0,$$

Δx étant égal à k. Donc

$$(69)\qquad \psi_0(x) = \varphi\left(\cos\frac{2\pi x}{k}, \sin\frac{2\pi x}{k}\right).$$

De plus, on tirera de la première des équations (67)

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= e^{(n-m)t_0\alpha}\psi_0(x) \\ &= \psi_0[x + (n-m)t_0].\end{aligned}$$

Si, pour plus de simplicité, on écrit

$$(70)\qquad \psi_0(x) = \varphi\left(\frac{x + mt_0}{k}\right),$$

on trouvera

$$(71)\qquad \psi_1(x) = \varphi\left(\frac{x + nt_0}{k}\right).$$

Lorsque

$$(72)\qquad u,\quad \frac{du}{dt},\quad \dots\quad \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}},$$

doivent se réduire à

$$(73)\qquad f_0(x,y\dots),\quad f_1(x,y\dots),\ \dots\ f_{m-1}(x,y\dots),$$

pour $t = 0$, les équations (55) deviennent

$$(74)\quad \begin{cases} \psi_0(x,y\ldots)+\psi_1(x,y\ldots)+\ldots+\psi_{m-1}(x,y\ldots)=0, \\ \varphi_0(\alpha,\beta\ldots)\,\psi_0(x,y\ldots)+\varphi_1(\alpha,\beta\ldots)\,\psi_1(x,y\ldots)\ldots+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)\,\psi_{m-1}(x,y\ldots)=0, \\ [\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)]^2\psi_0(x,y\ldots)+[\varphi_1(\alpha,\beta\ldots)]^2\psi_1(x,y\ldots)\ldots+[\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)]^2\psi_{m-1}(x,y\ldots)=0, \\ \text{etc...} \\ [\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)]^{m-1}\psi_0(x,y\ldots)+[\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)]^{m-1}\psi_1(x,y\ldots)\ldots+[\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\ldots)]^{m-1}\psi_{m-1}(x,y\ldots)=0 \end{cases}$$

Or, en éliminant $\psi_1(x,y\ldots)$, $\psi_2(x,y\ldots)$,... $\psi_{m-1}(x,y\ldots)$, on tire des équations (74)

$$(75)\quad (\varphi_0-\varphi_1)(\varphi_0-\varphi_2)\ldots(\varphi_0-\varphi_{m-1})\,.\,\psi_0(x,y,z\ldots)=0,$$

Soient d'ailleurs

$$(76)\quad \alpha=\chi_0(\beta,\gamma\ldots),\qquad \alpha=\chi_1(\beta,\gamma\ldots),\quad \text{etc...}$$

les valeurs de α déduites des équations

$$(77)\quad \begin{cases} \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)-\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0, \\ \text{etc...} \\ \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)-\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma\ldots)=0, \end{cases}$$

on trouvera pour la valeur générale de $\psi_0(x,y,z\ldots)$ déduite de l'équation (75)

$$(78)\quad \psi_0(x,y,z\ldots)=e^{x\chi_0(\beta,\gamma\ldots)}\,\theta_0(y,z\ldots)+e^{x\chi_1(\beta,\gamma\ldots)}\,\theta_1(y,z\ldots)+\text{etc.}$$

$\theta_0, \theta_1\ldots$ indiquant de nouvelles fonctions arbitraires. Des valeurs correspondantes, mais particulières, de $\psi_1(x,y,z\ldots)$, $\psi_2(x,y,z\ldots)$,... tirées des équations (74), seront

$$(79)\quad \begin{cases} \psi_1(x,y,z\ldots)=-\dfrac{(\varphi_0-\varphi_2)(\varphi_0-\varphi_3)\ldots(\varphi_0-\varphi_{m-1})}{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1-\varphi_3)\ldots(\varphi_1-\varphi_{m-1})}\,\psi_0(x,y,z\ldots), \\ \psi_2(x,y,z\ldots)=-\dfrac{(\varphi_0-\varphi_1)(\varphi_0-\varphi_3)\ldots(\varphi_0-\varphi_{m-1})}{(\varphi_2-\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_3)\ldots(\varphi_2-\varphi_{m-1})}\,\psi_0(x,y,z\ldots), \\ \text{etc...} \\ \psi_{m-1}(x,y,z\ldots)=-\dfrac{(\varphi_0-\varphi_1)(\varphi_0-\varphi_2)\ldots(\varphi_0-\varphi_{m-1})}{(\varphi_{m-1}-\varphi_1)(\varphi_{m-1}-\varphi_2)\ldots(\varphi_{m-1}-\varphi_{m-1})}\,\psi_0(x,y,z\ldots), \end{cases}$$

et la valeur correspondante de u donnée par la formule (52) deviendra

$$(80)\quad u = \left[e^{t\varphi_0} - \frac{(\varphi_0-\varphi_2)(\varphi_0-\varphi_3)\dots(\varphi_0-\varphi_{m-1})}{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1-\varphi_3)\dots(\varphi_1-\varphi_{m-1})}\, e^{t\varphi_1} - \text{etc.}\right]\psi_0(x,y,z\dots).$$

Si, dans cette dernière, on substitue à la place de $\psi_0(x,y,z,\dots)$, un terme de la forme

$$e^{x\chi_0(\alpha,\beta\dots)}\,\delta_0(y,z\dots),$$

$z = \gamma_0(\beta,\gamma\dots)$ étant l'une des racines des équations (77), on obtiendra un résultat nul. Donc la valeur de u, donnée par la formule (80), se réduira tout entière à zéro.

Si, au lieu des valeurs particulières de $\psi_1(x,y\dots)$, $\psi_2(x,y\dots)$, on voulait employer leurs valeurs générales, il faudrait ajouter à la valeur de u, donnée par l'équation (80), celle qu'on obtiendrait en posant dans l'équation (52)

$$\psi_0(x,y,z\dots) = 0,$$

c'est-à-dire en posant

$$u = e^{t\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma\dots)}\psi_1(x,y,z\dots) + \dots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma\dots)}\psi_{m-1}(x,y,z\dots),$$

puis déterminant

$$\psi_1(x,y,z\dots),\ \dots\quad \psi_{m-1}(x,y,z\dots),$$

à l'aide des équations

$$(81)\quad \begin{cases} \psi_1(x,y,z\dots) + \dots + \psi_{m-1}(x,y,z\dots) = 0, \\ \varphi_1(\alpha,\beta)\,\psi_1(x,y,z\dots) + \dots + \varphi_{m-1}(\alpha,\beta\dots)\,\psi_{m-1}(x,y\dots) = 0, \\ \text{etc.} \\ \left[\varphi_1(\alpha,\beta..)\right]^{m-2}\psi_1(x,y,z..) + \dots + \left[\varphi_{m-1}(\alpha,\beta..)\right]^{m-1}.\psi_{m-2}(x,y..) = 0. \end{cases}$$

On se trouvera ainsi ramené au cas où l'équation linéaire en u serait de l'ordre $m-1$ relativement à t, et de la forme

$$(82)\qquad (\theta-\varphi_1)(\theta-\varphi_2)\dots(\theta-\varphi_{m-1})\,u = 0.$$

Par conséquent, une seule valeur de u sera propre à vérifier l'équation

$$(83) \qquad (\theta - \varphi_0)(\theta - \varphi_1)\ldots(\theta - \varphi_{m-1})\,u = 0,$$

de manière que

$$u, \quad \frac{du}{dt}, \ldots \quad \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}$$

se réduisent à des fonctions données de $x, y, z\ldots$, pour $t = 0$, si une seule valeur de u est propre à vérifier l'équation (82), avec la condition que

$$u, \quad \frac{du}{dt}, \ldots \quad \frac{d^{m-2}u}{dt^{m-2}}$$

se réduisent à des fonctions données, ou bien à des valeurs nulles pour $t = 0$. En continuant de la même manière, on prouvera qu'une seule valeur de u peut vérifier l'intégrale (83) avec les conditions prescrites, si une seule valeur de u peut vérifier une équation de la forme

$$(84) \qquad (\theta - \varphi_0)\,u = 0,$$

de manière à s'évanouir pour $t = 0$. Or, on aura, dans ce cas

$$(85) \qquad u = e^{t\varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots)}\psi_0(x, y, z\ldots);$$

et l'équation de condition donnera

$$\psi_0(x, y, z\ldots) = 0,$$

et par suite

$$(86) \qquad u = 0.$$

Telle est la seule valeur de u, propre à vérifier l'équation (85) avec la condition requise. Par conséquent, une seule valeur de u vérifiera l'équation (83) avec les conditions prescrites. Donc, par suite, une seule valeur de u pourra vérifier l'équation (41), supposée de l'ordre m par rapport à t, de manière que

$$u, \quad \frac{du}{dt}, \ldots \qquad\qquad \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}$$

se réduisent à des fonctions données

$$f_0(x, y, z\ldots), f_1(x, y, z\ldots), \ldots \qquad\qquad f_{m-1}(x, y, z\ldots),$$

pour $t = 0$. Donc l'équation (4), après que l'on aura déterminé v de manière à remplir les conditions prescrites, sera l'intégrale générale de la formule (1).

Deuxième exemple. Intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} - m^2\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{87}$$

relative au mouvement d'une corde tendue, de manière que l'on ait

$$\text{pour} \quad t = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = 0, \qquad \text{et} \qquad z = f(x). \tag{88}$$

Solution. On trouvera

$$z = e^{\frac{\alpha t}{m}}\psi_0(x) + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\psi_1(x),$$
$$\psi_0(x) + \psi_1(x) = f(x),$$
$$\frac{\alpha}{m}\psi_0(x) - \frac{\alpha}{m}\psi_1(x) = 0,$$
$$\psi_0(x) = \psi_1(x) = \frac{1}{2}f(x).$$

$$z = e^{\frac{1}{m}\alpha t}\frac{1}{2}f(x) + e^{-\frac{1}{m}\alpha t}\frac{1}{2}f(x) \tag{89}$$
$$= \frac{1}{2}\left[f\left(x + \frac{t}{m}\right) + f\left(x + \frac{t}{m}\right)\right].$$

Nota. La solution précédente suppose la fonction $f(x)$, connue au premier instant pour toutes les valeurs de x.

Concevons maintenant que les conditions (88) doivent être remplies seulement entre les limites $x = 0$, $x = a$, et

que de plus z doive s'évanouir aux deux limites, quel que soit t; on aura

$$z = e^{m\theta x}\psi_0(t) + e^{-m\theta x}\psi_1(t),$$
$$0 = \psi_0(t) + \psi_1(t),$$
$$0 = e^{m\theta a}\psi_0(t) + e^{-m\theta a}\psi_1(t),$$
$$(e^{m\theta a} - e^{-m\theta a})\psi_0(t) = 0.$$

On satisfait à la dernière équation, en posant

$$m\theta a = \pm n\pi i,$$

n étant un entier quelconque. Donc, par suite, on aura

$$\psi_0(t) = S\left(c_0 e^{\frac{nt\pi i}{ma}} + c_1 e^{\frac{-nt\pi i}{ma}}\right) = -\psi_1(t),$$

$$z = \left(e^{m\theta x} - e^{-m\theta x}\right) S\left(c_0 e^{\frac{nt\pi i}{ma}} + c_1 e^{\frac{-nt\pi i}{ma}}\right)$$
$$= S\left[c_0\left(e^{\frac{n(t+mx)\pi i}{ma}} - e^{\frac{n(t-mx)\pi i}{ma}}\right) - c_1\left(e^{\frac{-n(t+mx)\pi i}{ma}} - e^{\frac{-n(t-mx)\pi i}{ma}}\right)\right],$$

et, pour $t = 0$,

$$\frac{dz}{dt} = S\left[\frac{n\pi i}{ma}\left(e^{\frac{nx\pi i}{a}} - e^{\frac{-nx\pi i}{a}}\right)\left(c_0 - c_1\right)\right].$$

Pour que $\frac{dz}{dt}$ s'évanouisse alors quel que soit x, il faudra que l'on ait $c_1 = c_0$. Donc, par suite

$$(90) \qquad z = S\left[c\left(e^{\frac{n\pi t i}{ma}} + e^{\frac{-n\pi t i}{ma}}\right)\left(e^{\frac{n\pi x i}{a}} - e^{\frac{-n\pi x i}{a}}\right)\right]$$
$$= S\left[A\cos\left(\frac{n\pi t}{ma}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right],$$

A étant égal à $4ci$.

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients A, de manière que l'on ait pour $t = 0$, $z = f(x)$, c'est-à-dire,

$$(91)\qquad f(x) = S_0^{\infty}\left(A \sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$= A_0 + A_1 \sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + \text{etc...},$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = a$.

Troisième exemple. Intégrer l'équation

$$(92)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

de manière que l'on ait

pour $z = h$, $\qquad \frac{du}{dz} = 0,$

pour $z = 0$, $\qquad g\frac{du}{dz} - \frac{d^2u}{dt^2} = 0,$

pour $z = 0$ et $t = 0$, $\qquad u = 0$ et $\frac{du}{dt} = f(x,y).$

Solution. On trouvera, en mettant x, y, z en évidence,

$$(93)\qquad u = e^{z i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_0(x,y) + e^{-z i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_1(x,y),$$
$$(94)\qquad 0 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left[e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_0(x,y) - e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_1(x,y)\right].$$

Soient

$$(95)\qquad \begin{cases} e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_0(x,y) + e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_1(x,y) = \varpi_0(x,y), \\ e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_0(x,y) - e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\psi_1(x,y) = \varpi_1(x,y); \end{cases}$$

l'équation (94) deviendra

$$(96)\qquad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\,\varpi_1(x,y) = 0,$$

et l'on aura

$$\psi_0(x,y) = e^{-hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\varpi_0(x,y) + \varpi_1(x,y)\right],$$
$$\psi_1(x,y) = e^{hi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\varpi_0(x,y) - \varpi_1(x,y)\right].$$

Or, on tire de l'équation (96), $\alpha^2 + \beta^2$ étant égal au pro-

duit $(\alpha - 6\,\mathrm{i})(\alpha + 6\,\mathrm{i})$,

$$\varpi_1(x,y) = e^{6x\,\mathrm{i}}\,8_0(y) + e^{-6x\,\mathrm{i}}\,8_1(y)$$
$$= 8_0(y + x\,\mathrm{i}) + 8_1(y - x\,\mathrm{i}).$$

Cela posé, la valeur de u deviendra

$$(97)\quad u = \left[e^{(h-z)\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} + e^{-(h-z)\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right]\varpi_0(x,y)$$
$$-\left[e^{(h-z)\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} - e^{-(h-z)\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right]\left[8_0(y+x\,\mathrm{i}) + 8_1(y-x\,\mathrm{i})\right],$$

et la seconde condition donnera

$$(98)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}\cdot g\left[e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} - e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right]\varpi_0(x,y) + \left[e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} + e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right]\dfrac{d^2\varpi_0(x,y)}{dt^2} \\ -\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}\cdot g\left[e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} + e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right](8_0+8_1) - \left[e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} - e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}\right]\left(\dfrac{d^2 8_0}{dt^2} + \dfrac{d^2 8_0}{dt^2}\right) \\ = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger $8_0 = 0$, $8_1 = 0$, et de plus

$$\sqrt{\alpha^2 + 6^2} = \lambda, \qquad \frac{d}{dt} = \theta, \qquad \varpi_0(x,y) = v,$$

$$\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2 + 6^2}\,\frac{e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} - e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}}{e^{h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}} + e^{-h\mathrm{i}\sqrt{\alpha^2+6^2}}} = \mu^2,$$

l'équation (98) deviendra

$$(99)\qquad \left[\theta^2\left(e^{h\lambda\mathrm{i}} + e^{-h\lambda\mathrm{i}}\right) + g\lambda\,\mathrm{i}\left(e^{h\lambda\mathrm{i}} - e^{-h\lambda\mathrm{i}}\right)\right]v = 0,$$

et l'on en tirera, en mettant t en évidence,

$$v = e^{+\mu t\,\mathrm{i}}\chi_0(x,y) + e^{-\mu t\,\mathrm{i}}\chi_1(x,y),$$
$$(100)\quad u = \left[e^{(h-z)\lambda\mathrm{i}} + e^{-(h-z)\lambda\mathrm{i}}\right]\left[e^{\mu t\,\mathrm{i}}\chi_0(x,y) + e^{-\mu t\,\mathrm{i}}\chi_1(x,y)\right].$$

Par suite, la dernière condition donnera

$$(101)\quad \left\{\begin{array}{l} \left[e^{h\lambda\mathrm{i}} + e^{-h\lambda\mathrm{i}}\right]\left[\chi_0(x,y) + \chi_1(x,y)\right] = 0, \quad \text{et} \\ \mu\,\mathrm{i}\left[e^{h\lambda\mathrm{i}} + e^{-h\lambda\mathrm{i}}\right]\left[\chi_0(x,y) - \chi_1(x,y)\right] = f(x,y). \end{array}\right.$$

Or, on vérifie les équations (101) en prenant

$$\chi_0(x,y) = -\chi_1(x,y) = \frac{f(x,y)}{2\mu\,\mathrm{i}\left(e^{h\lambda\mathrm{i}} + e^{-h\lambda\mathrm{i}}\right)}.$$

Alors l'équation (100) deviendra

$$(102) \qquad u = \frac{[e^{(h-z)\lambda i} + e^{-(h-z)\lambda i}]\,[e^{\mu t i} - e^{-\mu t i}]}{2\mu i\,(e^{h\lambda i} + e^{-h\lambda i})} f(x,y).$$

Telle est effectivement la valeur de u, trouvée dans la théorie des ondes.

§ 6. *Sur la détermination des fonctions arbitraires que comportent des intégrales générales des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constants.*

Conservons les notations du paragraphe précédent; soit

$$(1) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta).u = f(x,y,z\ldots t)$$

une équation linéaire donnée, de l'ordre m par rapport à t, et désignons par

$$(2) \qquad \varphi_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots),\ \varphi_1(\alpha,\beta,\gamma\ldots),\ \ldots \qquad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma\ldots)$$

les m valeurs de θ, déduites de la formule

$$(3) \qquad F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta) = 0,$$

l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$(4) \qquad u = e^{t\varphi_0(\alpha,\beta\ldots)}\psi_0(x,y\ldots) + \ldots + e^{t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\ldots)}\psi_{m-1}(x,y\ldots) + \frac{f(x,y,z\ldots t)}{F(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta)};$$

$\psi_0(x,y,z\ldots)$, etc... $\psi_{m-1}(x,y,z\ldots)$ désignant les fonctions arbitraires.

Supposons maintenant que l'on doive avoir

$$(5) \quad \begin{cases} \text{pour} \quad t = t_0, & F_0(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta).u = f_0(x,y,z\ldots), \\ \text{pour} \quad t = t_1, & F_1(\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta).u = f_1(x,y,z\ldots), \\ \text{etc...} & \\ \text{pour} \quad t = t_{m-1}, & F_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma\ldots).u = f_{m-1}(x,y,z\ldots), \end{cases}$$

les fonctions arbitraires se trouveront alors déterminées par les équations (19) du paragraphe précédent ; et ne pourront l'être que d'une seule manière, si les conditions (5) exigent seulement que l'on ait, pour $t = t_0$,

$$(6) \quad u = f_0(x,y..), \frac{du}{dt} = f_1(x,y...),... \quad \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} = f_{m-1}(x,y...).$$

Toutefois, cette dernière conclusion suppose que

$$(7) \qquad f_0(x,y...), f_1(x,y...),... \qquad f_{m-1}(x,y...),$$

sont connues pour toutes les valeurs possibles de $x,y,...$ Or, il peut arriver, comme dans le problème des cordes vibrantes, que les fonctions (6) soient données à priori seulement pour certaines valeurs de $x,y,z...$ comprises entre certaines limites, et doivent être prolongées hors de ces limites, à l'aide de nouvelles conditions. Par exemple, dans le cas où $x,y,z...$ représentent des coordonnées, il peut arriver que des fonctions de la forme

$$f_0(x), \qquad f_0(x,y), \qquad f_0(x,y,z)$$

soient connues pour tous les points compris dans une longueur, dans une surface, ou dans un volume donné. Alors on pourra représenter la variable principale par des sommes d'exponentielles, respectivement multipliées par des constantes arbitraires, et il ne restera plus qu'à déterminer ces constantes de manière qu'entre les limites données les fonctions (6) prennent les valeurs qu'elles doivent avoir. C'est ce qui arrivera, par exemple, dans le problème des cordes vibrantes, si l'on fixe la valeur de z par le moyen de l'équation (90) du cinquième paragraphe. Mais on pourrait aussi résoudre les questions proposées en exprimant la variable principale à l'aide des fonctions initiales, sauf à pro-

longer ensuite ces fonctions hors des limites primitives, en recourant, pour y parvenir, aux conditions supplémentaires. Ainsi, par exemple, si, dans le problème des cordes vibrantes, on représente par

$$z = f_0(x)$$

la valeur initiale de z, on trouvera, pour l'intégrale de

$$\frac{d^2z}{dx^2} - m^2\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{8}$$

déterminée de manière que l'on ait à la fois

$$t = 0, \qquad z = f_0(x), \qquad \frac{dz}{dt} = 0, \tag{9}$$

on trouvera, dis-je,

$$z = \frac{1}{2}\left[f_0\left(x + \frac{t}{m}\right) + f_0\left(x - \frac{t}{m}\right)\right]. \tag{10}$$

Or, la fonction $f_0(x)$, qui détermine la forme initiale de la corde, est censée connue seulement entre les limites

$$x = 0, \qquad x = a; \tag{11}$$

mais, pour la prolonger hors de ces limites, il suffit d'admettre que les valeurs de z correspondantes aux valeurs précédentes de x sont toujours nulles, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit t,

$$f_0\left(\frac{t}{m}\right) + f_0\left(-\frac{t}{m}\right) = 0,$$

$$f_0\left(a + \frac{t}{m}\right) + f_0\left(a - \frac{t}{m}\right) = 0,$$

et par conséquent, quel que soit x,

$$f_0(x) + f_0(-x) = 0, \qquad f_0(a + x) + f_0(a - x) = 0. \tag{12}$$

Si, dans la seconde des équations (12), on remplace x par $x + a$, on en tirera

$$f_0(x+2a) = -f_0(-x) = f_0(x).$$

Donc, par suite

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_0(x+2a) = f_0(x+4a) = \text{etc...} \\ &= f_0(x-2a) = f_0(x-4a) = \text{etc...}, \end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned} f_0(x+a) &= f_0(x+3a) = f_0(x+5a) = \text{etc...} \\ = f_0(x-a) &= f_0(x-3a) = f_0(x-5a) = \text{etc...} \end{aligned}$$

Cela posé, soit $f(x)$ la valeur donnée de $f_0(x)$ entre les limites $x=0$, $x=a$. On aura, en vertu des équations qui précèdent,

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{lll} f_0(x) = & f(x) & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = -f(2a-x) & & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=a \\ x=2a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = & f(x-2a) & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=2a \\ x=3a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = -f(4a-x) & & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=3a \\ x=4a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = & f(x-4a) & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=4a \\ x=5a \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

etc...

On trouvera au contraire

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{lll} f_0(x) = -f(-x) & & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = & f(x+2a) & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=-a \\ x=-2a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = -f(-2a-x) & & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=-2a \\ x=-3a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = & f(x+4a) & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=-3a \\ x=-4a \end{array}\right\}, \\ f_0(x) = -f(-4a-x) & & \text{entre les limites } \left\{\begin{array}{l} x=-4a \\ x=-5a \end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

etc...

Par conséquent, la valeur générale de $f_0(x)$ sera donnée par l'équation

$$(15)\quad f_0(x) = A_0 f(x) - A_1 f(2a - x) + A_2 f(x - 2a) - \text{etc.} - B_0 f(-x) + B_1 f(x + 2a) - B_2 f(-2a - x) + \text{etc.},$$

si l'on désigne par A_n un coefficient qui se réduise à l'unité entre les limites $x = na$, $x = (n+1)a$, et soit toujours nul hors de ces limites; et par B_n un coefficient qui se réduise à l'unité, entre les limites $x = -na$, $x = -(n+1)a$, en restant toujours nul hors de ces limites. Or, on satisfera aux conditions requises, si l'on prend

$$(16)\quad A_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x - na}{\sqrt{(x - na)^2}} + \frac{(n+1)a - x}{\sqrt{[(n+1)a - x]^2}}\right],$$

et

$$(17)\quad B_n = \frac{1}{2}\left[\frac{x + na}{\sqrt{(x + na)^2}} + \frac{(n+1)a + x}{\sqrt{[(n+1)a + x]^2}}\right].$$

On peut encore supposer

$$(18)\quad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a} e^{\alpha(x-\mu)i}\, d\mu d\alpha, \\ B_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-(n+1)a}^{-na} e^{\alpha(x-\mu)i}\, d\mu d\alpha, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19)\quad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-na-\mu)i}\, d\mu d\alpha, \\ B_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x+\overline{n+1}.a-\mu)i}\, d\mu d\alpha. \end{cases}$$

Si l'on a égard à ces dernières formules, l'équation (15) donnera

$$(20)\quad f_0(x) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[f(x) - e^{-a\alpha i} f(2a - x) + e^{-2a\alpha i} f(x - 2a) - \text{etc.}\right] d\mu d\alpha,$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[e^{a\alpha i} f(-x) - e^{2a\alpha i} f(x + 2a) + e^{3a\alpha i} f(-2a - x) - \text{etc.}\right] d\mu d\alpha.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{e^{\frac{\pi x}{a}i} - e^{-\frac{\pi x}{a}i}}{2i},$$

on trouvera, comme on devait s'y attendre,

$$f_0(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Au lieu d'employer la formule (15), on pourrait recourir aux considérations suivantes.

En vertu du théorème de M. Fourier, les intégrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha, \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{2a} e^{\alpha(x-\mu)i} f(2a-\mu)\,d\mu\,d\alpha,$$

etc...

sont respectivement égales aux fonctions

$$f(x), \qquad -f(2a-x), \qquad \text{etc.},$$

entre les valeurs de x qui correspondent aux limites de la variable μ, et toujours nulles hors de ces limites. Par suite, la somme

$$(21) \qquad A_0 f(x) - A_1 f(2a-x) + A_2 f(x-2a) + \text{etc...}$$

est équivalente à

$$(22) \qquad \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{2a} e^{\alpha(x-\mu)i} f(2a-\mu)\,d\mu\,d\alpha + \text{etc.}\right],$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(23) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[1+\eta e^{-2a\alpha i}+\text{etc.}\right] f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x+\mu)i}\left[e^{-2a\alpha i}+\eta e^{-4a\alpha i}\ldots\right] f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} \frac{e^{\alpha(x-\mu)i} - e^{\alpha(x-2a+\mu)i}}{1-\eta e^{-2a\alpha i}} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} \frac{e^{\alpha(x-\mu+a)i} - e^{\alpha(x-a+\mu)i}}{e^{a\alpha i} - \eta e^{-a\alpha i}} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha, \end{aligned}\right.$$

η désignant un nombre qui diffère infiniment peu de l'unité. On prouvera de même que la somme

$$-B_0 f(-x) + B_1 f(x+2a) - B_2 f(-2a-x) + \dots$$

est équivalente à

$$(24)\quad -\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{0} e^{\alpha(x-\mu)i} f(-\mu)\,d\mu\,d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-2a}^{-a} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu+2a)\,d\mu\,d\alpha \dots\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x+\mu)i}\left[1+\eta e^{2a\alpha i}+\text{etc.}\right] f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha(x-\mu)i}\left[e^{2a\alpha i}+\eta e^{4a\alpha i}+\dots\right] f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha x i}\,\frac{e^{\alpha\mu i}-e^{2a\alpha i}e^{-\alpha\mu i}}{1-\eta e^{2a\alpha i}} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha \\ &=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha x i}\,\frac{e^{(\mu-a)\alpha i}-e^{(a-\mu)\alpha i}}{e^{-a\alpha i}-\eta e^{a\alpha i}} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Par suite, la valeur générale de $f_0(x)$ deviendra

$$(26)\qquad f_0(x) =$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\alpha x i}\left[\frac{e^{(a-\mu)\alpha i}-e^{(\mu-a)\alpha i}}{e^{a\alpha i}-\eta e^{-a\alpha i}} - \frac{e^{(\mu-a)\alpha i}-e^{(a-\mu)\alpha i}}{e^{-a\alpha i}-\eta e^{a\alpha i}}\right] f(\mu)\,d\mu\,d\alpha$$

$$=\frac{1-\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} 2\sin\alpha x\,\frac{\sin(\mu\alpha)+\sin(\mu-2a)\alpha}{1-2\eta\cos(2a\alpha)+\eta^2} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.$$

Or, $1-\eta$ étant infiniment petit, le rapport

$$\frac{1-\eta}{1-2\eta\cos(2a\alpha)+\eta^2}$$

n'aura de valeurs sensibles que pour des valeurs de $a\alpha$ équivalentes à des multiples de la circonférence. On peut donc, dans l'équation (26), remplacer $\sin(\mu-2a)\alpha$ par $\sin\mu\alpha$, et réduire cette équation à

$$(27)\quad f_0(x) = \frac{1-\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} 2\,\frac{\sin\alpha x\,.\,\sin\alpha\mu}{1-2\eta\cos(2a\alpha)+\eta^2} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{a} 2\sin\alpha x\,.\,\sin\alpha\mu\,\frac{1-\eta}{(1-\eta\cos 2a\alpha)^2+(\eta\sin 2a\alpha)^2} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha.$$

Observons maintenant que, si l'on désigne par ε un nombre très-petit, on aura (n étant un nombre entier quelconque)

$$(28)\quad \int_{\frac{n\pi}{a}-\varepsilon}^{\frac{n\pi}{a}+\varepsilon} \frac{1-\eta}{(1-\eta\cos 2a\alpha)^2+(\eta\sin 2a\alpha)^2}\sin\alpha x\sin\alpha\mu\, d\alpha$$

$$= \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}\int_{\frac{n\pi}{a}-\varepsilon}^{\frac{n\pi}{a}+\varepsilon}\frac{1-\eta}{(1-\eta)^2+(2a\alpha-2n\pi)^2}\,d\alpha.$$

Si maintenant on fait $a\alpha = n\pi + \frac{1}{2}(1-\eta)\theta$, le second membre de l'équation (28) deviendra

$$\frac{1}{2a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}\int_{-\frac{2a\varepsilon}{1-\eta}}^{+\frac{2a\varepsilon}{1-\eta}}\frac{d\theta}{1+\theta^2},$$

et se réduira, pour $\eta = 1$, à

$$\frac{\pi}{2a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\mu}{a}.$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'on tirera de la formule (27)

$$(29)\quad f_0(x) = \frac{2}{a}\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{\pi\mu}{a}f(\mu)d\mu \\ +\sin\frac{2\pi x}{a}\int_0^a\sin\frac{2\pi\mu}{a}f(\mu)d\mu \\ +\text{etc.}\end{array}\right.$$

On peut vérifier directement la formule (29). En effet, si l'on pose

$$(30)\quad f_0(x) = c_0 + c_1\sin\frac{\pi x}{a} + c_2\sin\frac{2\pi x}{a} + \ldots + c_n\sin\frac{n\pi x}{a} + \text{etc.},$$

on en conclura, en multipliant les deux membres par

$$\sin\frac{n\pi x}{a},$$

puis intégrant entre les limites $x = 0$, $x = a$,

$$\int_0^a f_0(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = c_n\int_0^a\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)^2 dx$$
$$= c_n\int_0^a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)dx$$
$$= \frac{a}{2}c_n.$$

Donc

$$c_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} f_0(x)dx$$
$$= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi\mu}{a} f(\mu)d\mu.$$

En général, lorsqu'à l'aide des conditions prescrites on aura prolongé les fonctions initiales hors des limites entre lesquelles leurs valeurs étaient connues, les valeurs des fonctions ainsi prolongées se trouveront représentées par des expressions différentes, suivant qu'elles correspondront à tels ou tels systèmes de valeurs de $x, y, z...$ Si, pour fixer les idées, $x, y, z...$ désignent des coordonnées rectangulaires, une fonction initiale de la forme $f_0(x)$ se trouvera successivement représentée par des expressions diverses, suivant que le point correspondant à l'abscisse x appartiendra à telle ou telle portion de l'axe des x; une fonction initiale de la forme $f_0(x,y)$ se trouvera représentée par des expressions diverses, suivant que le point (x,y) se trouvera compris dans telle ou telle portion du plan des x,y; enfin, une fonction initiale de la forme $f_0(x,y,z)$ sera représentée par des expressions diverses, selon que le point (x,y,z) appartiendra à tel ou tel volume compris dans telle ou telle enveloppe extérieure; etc.... Cela posé, pour obtenir les expressions générales de

$$f_0(x), \qquad f_0(x,y), \qquad f_0(x,y,z), \qquad \text{etc...}$$

correspondantes à toutes les valeurs possibles de $x, y, z\ldots$ il suffira évidemment de transformer chaque expression particulière en une autre, qui ait précisément la même valeur dans les limites prescrites, mais qui devienne constamment nulle, hors de ces limites; puis de faire la somme de toutes les expressions nouvelles ainsi obtenues. Or, la formule de M. Fourier, et une formule semblable que j'ai donnée dans le dix-neuvième cahier du *Journal de l'École polytechnique,* fournissent le moyen de résoudre complétement les problèmes de ce genre. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

Premier problème. Trouver une fonction $\varphi(x)$ qui soit constamment égale à

$$f(x)$$

entre les limites $x = a$, $x = b > a$, et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. Il suffira de prendre

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{a}^{b} e^{\alpha(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu\,d\alpha. \tag{31}$$

Si, dans cette formule, on pose

$$\mu = a + (b-a)m,$$

elle donnera

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1} e^{\alpha[x-a-(b-a)m]i} f(a+\overline{b-a}.m).(b-a)\,dm\,d\alpha. \tag{32}$$

Ainsi l'intégrale relative à μ, qui était prise entre les limites $\mu = a$, $\mu = b$, se trouve remplacée par une autre intégrale prise entre les limites $m = 0$, $m = 1$.

Deuxième problème. Trouver une fonction $\varphi(x)$ qui soit constamment égale à $f(x)$ entre les limites déterminées par

les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad F(x) = 0,$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. Il suffira de prendre

$$(33)\quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1} e^{\alpha[mF(x)+(1-m)f(x)]} f(M)\sqrt{[F(x)-f(x)]^2}\,.\,dm\,da,$$

M étant une fonction de m, déterminée par l'équation

$$(34)\qquad mF(M) + (1-m)f(M) = 0.$$

Si l'on pose, dans l'équation (33),

$$f(x) = x - a, \qquad F(x) = x - b,$$

on retrouvera la formule (32).

Troisième problème. Trouver une fonction $\varphi(x,y)$ qui soit constamment égale à $f(x,y)$ entre les limites

$$\left\{\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = F(x) \end{array}\right\}, \qquad \left\{\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right\},$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. Il suffira de prendre

$$(35)\quad \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiiint e^{\alpha(x-\mu)+\epsilon(y-\nu)} f(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu\,d\alpha\,d\epsilon$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \nu = f(\mu), & \mu = a, & \alpha = -\infty, & \epsilon = -\infty \\ \nu = F(\mu), & \mu = b, & \alpha = \infty, & \epsilon = +\infty \end{array}\right\}.$$

Cette formule se démontre avec la même facilité que celle de M. Fourier dans le cas de plusieurs variables.

Quatrième problème. Trouver une fonction $\varphi(x,y)$ qui soit constamment égale à $f(x,y)$ entre les limites déterminées par les équations

$$f(x,y) = 0, \qquad x = a \qquad \text{ou} \qquad f_0(x) = 0,$$
$$F(x,y) = 0, \qquad x = b \qquad \text{ou} \qquad F_0(x) = 0,$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. Il suffira de prendre

$$\varphi(x,y) = \tag{36}$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 e^{6[nF(x,y)+(1-n)f(x,y)]i}\, e^{\alpha[mF_0(x)+(1-m)f_0(x)]i} f(M,N)\, P\,dm\,dn\,d\alpha\,d\varepsilon,$$

les valeurs de M et de N étant déterminées par les équations

$$\begin{cases} nF(M,N) + (1-n)f(M,N) = 0, \\ mF_0(M) + nf_0(M) = 0, \end{cases} \tag{37}$$

et la valeur de P, étant positive et donnée par la formule

$$P = \pm [F_0(x) - f_0(x)]\,[F(x,y) - f(x,y)]. \tag{38}$$

Cinquième problème. Trouver une fonction $\varphi(x,y,z...)$ qui soit constamment égale à $f(x,y,z...)$ entre les limites déterminées par les équations

$$\begin{cases} f_0(x) = 0, & f_1(x,y) = 0, & f_2(x,y,z) = 0, & \text{etc.}, \\ F_0(x) = 0, & F_1(x,y) = 0, & F_2(x,y,z) = 0, & \text{etc.}, \end{cases} \tag{39}$$

et constamment nulle hors de ces limites.

Solution. Il suffira de prendre (n étant le nombre des variables $x,y...$)

$$\varphi(x,y,z...) = \tag{40}$$
$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_0^1\int_0^1 \cdots e^{\alpha[\mu F_0(x)+(1-\mu)f_0(x)]i}\, e^{6[\nu F_1(x,y)+(1-\nu)f_1(x,y)]i} \cdots f(M,N...)\,P\,d\mu\,d\nu\,d\alpha\,d\varepsilon..$$

les valeurs de M, N... étant déterminées par les équations

$$\begin{cases} \mu F_0(M) + (1-\mu)f_0(M) = 0, \\ \nu F_1(M,N) + (1-\nu)f_1(M,N) = 0, \\ \text{etc.}, \end{cases} \tag{41}$$

et celle de P, qui est toujours censée positive, par la formule

$$(42) \qquad P = \pm [F_0(x) - f_0(x)][F_1(x,y) - f_1(x,y)] \text{ etc...}$$

Nota. Les formules (36) et (40) peuvent être démontrées par la méthode qui a servi à établir les formules du même genre que j'ai données dans le dix-neuvième cahier du *Journal de l'École polytechnique.*

Ajoutons que la formule (40) subsistera encore, si l'on remplace

$$f_0(x), \qquad F_0(x), \qquad f_1(x,y), \qquad \text{etc...} \quad f_0(M), \qquad \text{etc...}$$

par

$$f_0(x,y,z...), \quad F_0(x,y,z...), \quad f_1(x,y,z...), \quad \text{etc...} \quad f_0(M,N...), \quad \text{etc...}$$

Faisons voir maintenant comment, à l'aide de certaines conditions données, on peut prolonger une fonction hors des limites entre lesquelles sa valeur était connue.

Premier problème. Intégrer l'équation

$$(43) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} - m^2\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha^2 - m^2\theta^2)z = 0,$$

de manière que l'on ait

$$\text{pour} \quad t = 0, \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = 0, \\ z = f(x). \end{cases}$$

Supposons d'ailleurs la fonction initiale $f(x)$, connue seulement entre les limites 0, a. Mais ajoutons la condition que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour} \quad x = 0, \\ \text{et pour} \quad x = a, \end{array}\right\} \qquad z = 0, \qquad \text{quel que soit } t.$$

Solution. On trouvera

$$(44)\qquad z=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)f(x)$$
$$=e^{\theta m x}\varphi(t)+e^{-\theta m x}\chi(t).$$

De plus, les conditions prescrites donneront

$$(45)\qquad \begin{cases} \varphi(t)+\chi(t)=0, \\ e^{\theta m a}\varphi(t)+e^{-\theta m a}\chi(t)=0. \end{cases}$$

Donc, par suite,

$$(46)\qquad \begin{cases} z=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)f(x) \\ \quad =(e^{\theta m x}-e^{-\theta m x})\varphi(t), \end{cases}$$

et

$$(47)\qquad (e^{\theta m a}-e^{-\theta m a})\varphi(t)=0.$$

Faisons maintenant pour abréger

$$\mathrm{F}(\alpha)=e^{a\alpha}-e^{-a\alpha}=-\mathrm{F}(-\alpha).$$

On aura, en vertu de l'équation (47),

$$\mathrm{F}(\alpha)[(e^{\theta m x}-e^{-\theta m x})\varphi(t)]=[\mathrm{F}(\theta m)\,e^{\theta m x}-\mathrm{F}(-\theta m)\,e^{-\theta m x}]\varphi(t)$$
$$=[e^{\theta m x}+e^{-\theta m x}]\mathrm{F}(\theta m)\,\varphi(t)=0,$$

et, par suite, on tirera de la formule (46)

$$(48)\qquad 0=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)\mathrm{F}(\alpha)f(x).$$

Cette dernière, devant être satisfaite, quel que soit t, on en conclura

$$(49)\qquad \mathrm{F}(\alpha)f(x)=0,$$

ou

$$(e^{a\alpha}-e^{-a\alpha})f(x)=0,$$

ou encore

$$(50)\qquad f(x+a)=f(x-a).$$

Enfin, comme on tire de l'équation (46)

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}}+e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)f(x)=\mathrm{f}(t,x)-\mathrm{f}(t,-x),$$

$\mathrm{f}(t,x)$ désignant la fonction $e^{\theta m x}\varphi(t)$, on en conclura évidemment, en posant $t=0$,

$$f(x)=\mathrm{f}(0,x)-\mathrm{f}(0,-x),$$

et par suite,

$$f(x)=-f(-x). \tag{51}$$

Les équations (50) et (51) suffisent pour prolonger la fonction $f(x)$ au delà des limites $x=0$, $x=a$.

Second problème. Intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt}-m^2\frac{d^2u}{dx^2}+ru=0, \quad \text{ou} \quad \theta-m^2\alpha^2+r=0, \tag{52}$$

de manière que l'on ait

pour $t=0$, $u=f(x)$,

$f(x)$ étant connue entre les limites $x=a$, $x=b$, et que l'on ait aussi

$$\left.\begin{array}{lll}\text{pour } x=a, & \dfrac{du}{dx}+\mathrm{A}u=0, \text{ ou } & (\mathrm{A}+\alpha)u=0\\ \text{pour } x=b, & \dfrac{du}{dx}+\mathrm{B}u=0, \text{ ou } & (\mathrm{B}+\alpha)u=0\end{array}\right\}\ \text{quel que soit } t.$$

Solution. On trouvera, en posant $\Theta=\dfrac{\sqrt{\theta+r}}{m}$,

$$\begin{aligned}u&=e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x)\\&=e^{x\Theta}\varphi(t)+e^{-x\Theta}\chi(t),\end{aligned} \tag{53}$$

et les conditions prescrites donneront

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A}+\Theta)e^{a\Theta}\varphi(t)+(\mathrm{A}-\Theta)e^{-a\Theta}\chi(t)=0,\\(\mathrm{B}+\Theta)e^{b\Theta}\varphi(t)+(\mathrm{B}-\Theta)e^{-b\Theta}\chi(t)=0.\end{array}\right. \tag{54}$$

On satisfait à la première des équations (54) en prenant

$$(55)\qquad \begin{cases} \varphi(t) = (A-\Theta)e^{-a\Theta}\psi(t), \\ \chi(t) = -(A-\Theta)e^{a\Theta}\psi(t); \end{cases}$$

alors la seconde se réduit à

$$(56)\qquad F(\Theta)\psi(t) = 0,$$

la fonction $F(\alpha)$ étant déterminée par l'équation

$$(57)\quad F(\alpha) = (B+\alpha)(A-\alpha)e^{(b-a)\alpha} - (B-\alpha)(A+\alpha)e^{(a-b)\alpha}.$$

De plus, la valeur de u devient

$$(58)\qquad \begin{aligned} u &= e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x) \\ &= [(A-\Theta)e^{(x-a)\Theta} - (A+\Theta)e^{(a-x)\Theta}]\psi(t) \\ &= [A-\alpha][(e^{(x-a)\Theta} - e^{(a-x)\Theta})\psi(t)]. \end{aligned}$$

On satisfait à cette dernière formule en posant

$$(59)\qquad \begin{cases} (e^{(x-a)\Theta} - e^{(a-x)\Theta})\psi(t) = e^{(m^2\alpha^2-r)t}\varpi(x), \\ f(x) = (A-\alpha)\varpi(x). \end{cases}$$

Comme on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} &F(\alpha)[(e^{(x-a)\Theta} - e^{(a-x)\Theta})\psi(t)] \\ &= [e^{(x-a)\Theta}F(\Theta) - e^{(a-x)\Theta}F(-\Theta)]\psi(t) \\ &= [e^{(x-a)\Theta} + e^{(a-x)\Theta}]F(\Theta)\psi(t) = 0, \end{aligned}$$

on tirera, de la première des équations (59),

$$0 = e^{(m^2\alpha^2-r)t}F(\alpha)\varpi(x).$$

Cette dernière sera satisfaite, quel que soit t, si l'on pose

$$(60)\qquad F(\alpha)\varpi(x) = 0.$$

De plus, on tirera de la première des équations (59),

$$e^{(m^2\alpha^2-r)t}\varpi(x) = f(t, x-a) - f(t, a-x),$$

$f(t, x-a)$ désignant la fonction $e^{(x-a)\Theta}\psi(t)$; et par suite on trouvera, en posant $t = 0$,

$$\varpi(x) = f(0, x-a) - f(0, a-x).$$

Donc

$$\varpi(x) = -\varpi(2a-x). \tag{61}$$

Les équations

$$\begin{cases} \varpi(x) = -\varpi(2a-x), \\ \mathrm{F}(\alpha)\varpi(x) = 0, \\ f(x) = (\mathrm{A}-\alpha)\varpi(x) = \mathrm{A}\varpi(x) - \varpi'(x), \end{cases} \tag{62}$$

suffiront pour prolonger la fonction $f(x)$ au delà des limites entre lesquelles sa valeur est connue.

Il est bon de remarquer que l'on tire des équations (62)

$$\begin{aligned} \varpi(x+a) &= -\varpi(a-x) \qquad \text{et de plus} \\ f(x+a) &= \mathrm{A}\varpi(x+a) - \varpi'(x+a) \\ &= (\mathrm{A}-\alpha)\varpi(x+a), \\ f(a-x) &= \mathrm{A}\varpi(a-x) - \varpi'(a-x) \\ &= (\mathrm{A}+\alpha)\varpi(a-x) \\ &= -(\mathrm{A}+\alpha)\varpi(x+a), \end{aligned}$$

et par suite

$$(\mathrm{A}+\alpha)f(x+a) + (\mathrm{A}-\alpha)f(a-x) = 0, \tag{63}$$

ou

$$(\mathrm{A}+\alpha)e^{a\alpha}f(x) + (\mathrm{A}-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x) = 0. \tag{64}$$

On trouverait de même

$$(\mathrm{B}+\alpha)f(x+b) + (\mathrm{B}-\alpha)f(b-x) = 0, \tag{65}$$

ou

$$(\mathrm{B}+\alpha)e^{b\alpha}f(x) + (\mathrm{B}-\alpha)e^{-b\alpha}f(-x) = 0. \tag{66}$$

Si l'on élimine $f(-x)$ entre les équations (64) et (66) on en tirera

$$[(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{(a-b)\alpha} - (\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{(b-a)\alpha}]f(x) = 0,$$

ou

$$F(\alpha)f(x) = 0, \tag{67}$$

ce que l'on pouvait également conclure des deux dernières des formules (62).

Les équations (64) et (66) dont l'une peut être remplacée par la formule (67), suffisent pour prolonger la fonction $f(x)$.

Afin de montrer comment on peut y parvenir, faisons pour abréger $a = 0$, et remplaçons en même temps b par a; les équations (64) et (67) donneront

$$\begin{cases} (A+\alpha)f(x) + (A-\alpha)f(-x) = 0, \\ [(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha} - (A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]f(x) = 0. \end{cases} \tag{68}$$

On en tirera

$$f(-x) = -\frac{A+\alpha}{A-\alpha}f(x), \tag{69}$$

et

$$e^{2a\alpha}f(x) = \frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}f(x),$$

ou

$$f(x+2a) = \frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}f(x), \tag{70}$$

et par suite

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= -\frac{A+\alpha}{A-\alpha}f(x-2a) \\ &= -\frac{B+\alpha}{B-\alpha}f(x). \end{aligned} \tag{71}$$

On aura donc

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{B-\alpha}{B+\alpha}f(2a-x), & \text{et} \\ f(x) = \dfrac{A+\alpha}{A-\alpha}\dfrac{B-\alpha}{B+\alpha}f(x-2a). \end{cases} \tag{72}$$

Par conséquent, si l'on nomme $f(x)$ la valeur connue de u entre les limites $x = 0$, $x = a$, on trouvera

$$f(x) = f(x) \ldots\ldots\ldots \text{ entre les limites } \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ x = a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = -\frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(2a - x) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = a \\ x = 2a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = \frac{A+\alpha}{A-\alpha}\frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(x - 2a) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = 2a \\ x = 3a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = -\left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)\frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(4a - x) \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = 3a \\ x = 4a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = \left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)^2 f(x - 4a) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = 4a \\ x = 5a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = -\left(\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\frac{B-\alpha}{B+\alpha}\right)^2 \frac{B-\alpha}{B+\alpha} f(6a - x) \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = 5a \\ x = 6a \end{matrix} \right\},$$

etc...

On aura au contraire, en vertu de l'équation (69),

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha} f(-x) \ldots\ldots \text{ entre les limites } \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ x = -a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = \frac{A-\alpha}{A+\alpha}\frac{(B+\alpha)}{(B-\alpha)} f(2a + x) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -a \\ x = -2a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)} f(-x - 2a) \ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -2a \\ x = -3a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = \left[\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^2 f(4a + x) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -3a \\ x = -4a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = -\frac{A-\alpha}{A+\alpha}\left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^2 f(-x - 4a) \ldots \left\{ \begin{matrix} x = -4a \\ x = -5a \end{matrix} \right\},$$

$$f(x) = \left[\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^3 f(6a + x) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{matrix} x = -5a \\ x = -6a \end{matrix} \right\},$$

etc...

On aura donc généralement, n désignant un nombre entier quelconque,

$$(73)\quad \begin{cases} f(x) = \left[\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n f(x-2na) \text{ entre les limites} \left\{\begin{matrix} x=2na \\ x=(2n+1)a \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = -\dfrac{B-\alpha}{B+\alpha}\left[\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n f(2na+2a-x). \left\{\begin{matrix} x=(2n+1)a \\ x=(2n+2)a \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = \left[\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n f(x+2na). \left\{\begin{matrix} x=-(2n-1)a \\ x=-2na \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = -\dfrac{A-\alpha}{A+\alpha}\left[\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n f(-x-2na). \left\{\begin{matrix} x=-2na \\ x=-(2n+1)a \end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

On aura d'ailleurs, en vertu du théorème de M. Fourier,

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{k}^{k+a} e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu-k)\, d\mu d\lambda \\ = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x-k-\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda = f(x-k) \left\{\begin{matrix} x=k \\ x=k+a \end{matrix}\right\}, \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{k-a}^{k} e^{\lambda(x-\mu)i} f(k-\mu).\, d\mu d\lambda \\ = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x-k+\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda = f(k-x) \left\{\begin{matrix} x=k-a \\ x=k \end{matrix}\right\}, \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre les limites indiquées, tandis que les mêmes intégrales doubles s'évanouiront hors de ces limites. On trouvera en conséquence

$$(75)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\left[\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)} e^{-2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda \\ \qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{matrix} x=2na \\ x=(2n+1)a \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\dfrac{B-\alpha}{B+\alpha}\left[\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)} e^{-2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-2a+\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda \\ \qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{matrix} x=(2n+1)a \\ x=(2n+2)a \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\left[\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)} e^{2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda \\ \qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{matrix} x=-(2n-1)a \\ x=-2na \end{matrix}\right\}, \\ f(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\dfrac{A-\alpha}{A+\alpha}\left[\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)} e^{2a\lambda i}\right]^n e^{\lambda(x+\mu)i} f(\mu) d\mu d\lambda \\ \qquad \text{entre les limites} \left\{\begin{matrix} x=-2na \\ x=-(2n+1)a \end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Par suite, si l'on appelle η un nombre qui diffère infiniment peu de l'unité, on trouvera pour la valeur générale de $f(x)$

$$(76)\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\frac{e^{\lambda(x-\mu)i}}{1-\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}}f'(\mu)d\mu d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\frac{e^{\lambda(x-2a+\mu)i}}{1-\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\lambda i}}\frac{B-\alpha}{B+\alpha}f'(\mu)d\mu d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\frac{e^{\lambda(x-\mu+2a)i}}{1-\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}}\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}f'(\mu)d\mu d\lambda$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\frac{e^{\lambda(x+\mu)i}}{1-\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\lambda i}}\frac{A-\alpha}{A+\alpha}f'(\mu)d\mu d\lambda,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(77)\qquad f(x)=$$
$$\frac{A-\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}[(B+\alpha)e^{\lambda(a-\mu)i}-(B-\alpha)e^{\lambda(a-\mu)i}]\,\mathfrak{F}(\alpha)e^{\lambda(x-\mu)i}f'(\mu)d\mu d\lambda.$$

la valeur de $\mathfrak{F}(\alpha)$ étant donnée par l'équation

$$\mathfrak{F}(\alpha)=\frac{1}{(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}-\eta(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}}$$
$$+\frac{1}{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}-\eta(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}}$$
$$=4(1-\eta)\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}}{(1-\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]^2-\text{etc.}},$$

c'est-à-dire, par l'équation

$$(78)\qquad \mathfrak{F}(\alpha)=$$
$$4(1-\eta)\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}}{(1-\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}+(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]^2-(1+\eta)^2[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\lambda i}-(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\lambda i}]}$$

Si, dans l'équation (77), on fait passer le facteur $A-\alpha$ sous le signe $\iint$, on pourra remplacer ensuite α, qui indique

une différentiation relative à x, par λi. On trouvera de cette manière

$$(79) \qquad f(x) = \frac{2(1-\eta)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} \Lambda e^{\lambda x i} f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

la valeur de Λ étant donnée par la formule

$$(80) \qquad \Lambda = (A-\lambda i)i\,\frac{[B\sin(a-\mu)\lambda+\lambda\cos(a-\mu)\lambda][(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]}{(1-\eta)^2[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]^2+(1+\eta)^2[(AB+\lambda^2)\sin a\lambda-(B-A)\lambda\cos a\lambda]^2};$$

ou bien encore, à cause des limites $\lambda = -\infty$, $\lambda = \infty$,

$$(81) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} (\lambda\cos\lambda x - A\sin\lambda x)\ \mathfrak{L} f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

la valeur de $\mathfrak{L}$ étant à très-peu près

$$(82) \qquad \mathfrak{L} = [B\sin(a-\mu)\lambda+\lambda\cos(a-\mu)\lambda]\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\eta}{2}\right)[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]}{\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^2[(AB+\lambda^2)\cos a\lambda+(B-A)\lambda\sin a\lambda]^2+[(AB+\lambda^2)\sin a\lambda-(B-A)\lambda\cos a\lambda]^2}.$$

Or, il est clair que la valeur précédente de $\mathfrak{L}$, à cause du facteur infiniment petit $\frac{1-\eta}{2}$, sera toujours sensiblement nulle, excepté quand la valeur de λ vérifiera la condition

$$(83) \qquad (AB+\lambda^2)\sin a\lambda - (B-A)\lambda\cos a\lambda = 0.$$

On aura de plus

$$(84) \qquad u = e^{(m^2\alpha^2-r)t} f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{-(m^2\lambda^2+r)t}(\lambda\cos\lambda x - A\sin\lambda x)\,\mathfrak{L} f(\mu)\,d\mu\,d\lambda.$$

Enfin, si l'on désigne par ρ une des racines de l'équation (83), et par ε un nombre infiniment petit, on aura évidemment

$$(85)\qquad \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \mathfrak{L}(\lambda\cos\lambda x - \mathrm{A}\sin\lambda x)\,d\lambda = \\ = \frac{\pi}{2}\,\frac{(\rho\cos\rho x - \mathrm{A}\sin\rho x)\,[\mathrm{B}\sin(a-\mu)\rho + \rho\cos(a-\mu)\rho]}{\mathrm{D}_\rho[(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin a\rho - (\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos a\rho]}.$$

Donc, si l'on fait pour abréger,

$$(86)\quad \mathfrak{M} = \frac{[\mathrm{B}\sin(a-\mu)\rho + \rho\cos(a-\mu)\rho]}{a[(\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\sin a\rho + (\mathrm{AB}+\rho^2)\cos a\rho] + 2\rho\sin a\rho - (\mathrm{B}-\mathrm{A})\cos a\rho},$$

on trouvera

$$(87)\quad f(x) = \sum\int_0^a [\rho\cos\rho x - \mathrm{A}\sin\rho x]\,\mathfrak{M}f(\mu)\,d\mu \quad (*),$$

et

$$(88)\quad u = \int_0^a \sum e^{-m^2\rho^2 t - rt}(\rho\cos\rho x - \mathrm{A}\sin\rho x)\,\mathfrak{M}f(\mu)\,d\mu,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de ρ.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point qui a pour abscisse $\frac{a}{2}$, il faudra remplacer x par $x + \frac{a}{2}$. Si

---

(*) On a

$$\int_0^a \mathfrak{M}f(\mu)\,d\mu = \frac{1}{2}\,i\,\frac{\int_0^a [(\mathrm{B}-\rho i)e^{\rho(\mu-a)i} - (\mathrm{B}+\rho i)e^{\rho(a-\mu)i}]f(\mu)\,d\mu}{\mathrm{D}_\rho[(\mathrm{AB}+\rho^2)\sin a\rho - (\mathrm{B}-\mathrm{A})\rho\cos a\rho]},$$

ou

$$\int_0^a \mathfrak{M}f(\mu)\,d\mu = \frac{-i\int_0^a [(\mathrm{B}-\rho i)e^{\rho(\mu-a)i} - (\mathrm{B}+\rho i)e^{\rho(a-\mu)i}]f(\mu)\,d\mu}{\int_0^a [(\mathrm{A}-\rho i)e^{\rho\mu i} - (\mathrm{A}+\rho i)e^{-\rho\mu i}]\,[(\mathrm{B}-\rho i)e^{\rho(\mu-a)i} - (\mathrm{B}+\rho i)e^{\rho(a-\mu)i}]\,d\mu} \\ = -\frac{i\int_0^a [(\mathrm{A}-\rho i)e^{\rho\mu i} - (\mathrm{A}+\rho i)e^{-\rho\mu i}]f(\mu)\,d\mu}{\int_0^a [(\mathrm{A}-\rho i)e^{\rho\mu i} - (\mathrm{A}+\rho i)e^{-\rho\mu i}]^2\,d\mu}.$$

de plus on fait pour abréger

$$(89)\qquad \begin{cases} \mu = \frac{a}{2} + z, \qquad f\left(\frac{a}{2} + z\right) = f(z), \\ R = \frac{d[(B - A)\rho \cos a\rho - (AB + \rho^2)\sin a\rho]}{d\rho}, \end{cases}$$

on trouvera

$$(90)\qquad f(x) =$$

$$-\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sum \frac{\left[\rho \cos\left(z - \frac{a}{2}\right)\rho - B \sin\left(z - \frac{a}{2}\right)\rho\right]\left[\rho \cos\left(x + \frac{a}{2}\right)\rho - A \sin\left(x + \frac{a}{2}\right)\rho\right]}{R} f(z)\,dz,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(91)\qquad \begin{cases} f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{P \cos \rho x + Q \sin \rho x}{R}, \qquad \text{et} \\ u = e^{-rt} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{P \cos \rho x + Q \sin \rho x}{R} e^{-m^2\rho^2 t}, \end{cases}$$

pourvu que l'on fasse

$$(92)\qquad \begin{cases} P = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\rho \cos(z - l)\rho - B \sin(z - l)\rho][\rho \cos l\rho - A \sin l\rho] f(z)\,dz, \\ Q = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\rho \cos(z - l)\rho - B \sin(z - l)\rho][\rho \sin l\rho + A \cos l\rho] f(z)\,dz, \end{cases}$$

la valeur de l étant $\frac{a}{2}$.

Si l'on observe d'ailleurs que ρ désigne une des racines de l'équation

$$(93)\qquad (AB + \rho^2)\sin 2l\rho - (B - A)\rho \cos 2l\rho = 0,$$

on reconnaîtra immédiatement que les formules (91) et (92) coïncident avec celles que M. Poisson a données.

Les formules précédentes paraissent n'être établies que

par induction, attendu que, suivant la méthode de M. Brisson, l'on a plusieurs fois considéré la lettre α comme indiquant une différentiation relative à x. Mais, pour rendre les calculs rigoureux, il suffit de revenir aux formules et aux notations du paragraphe 2^e^. En effet, en employant ces notations, l'on aura généralement

$$(94)\qquad \varphi(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u\,\mathrm{i})f(v)\,e^{u\mathrm{i}(x-v)\mathrm{i}}\,dv\,du,$$

et par suite, si l'on pose

$$(95)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda\mathrm{i}(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

on trouvera non-seulement

$$(96)\qquad f(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda\mathrm{i}(v-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

et

$$(97)\qquad e^{\lambda x\mathrm{i}}\varphi(\lambda\,\mathrm{i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u\,\mathrm{i})\,e^{v\lambda(v-u)\mathrm{i}}\,e^{ux\mathrm{i}}\,dv\,du,$$

mais encore, en vertu des formules (96) et (97),

$$(98)\qquad \varphi(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\varphi(\lambda\,\mathrm{i})\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda\mathrm{i}(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda.$$

Ainsi l'équation (95) entraîne l'équation (98). Il est bon de remarquer en passant que la fonction $f(x)$, déterminée par la formule (95), s'évanouit hors des limites $x = 0$, $x = a$, et qu'il en est de même du second membre de la formule (98). Ajoutons que, des formules (95) et (98) réunies, l'on conclut immédiatement

$$(99)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda\mathrm{i}(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\ = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a}\varphi(\lambda\,\mathrm{i})\,\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda\mathrm{i}(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda. \end{array}\right.$$

On aura donc aussi

$$(100)\quad \left\{\begin{array}{l} [\varphi(\alpha)\varpi(\alpha)]\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\ \quad = \varphi(\alpha)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} \varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\ \quad = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} \varphi(\lambda\,\mathrm{i})\varpi(\lambda\,\mathrm{i})\,e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}\,\mathrm{F}(\mu)\,d\mu\,d\lambda \\ \quad = \varphi(\alpha)\,\varpi(\alpha)\,\mathrm{F}(x), \quad \text{entre les limites} \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Cela posé, on pourra immédiatement remplacer, dans les formules (75) et par suite dans les formules (76), (77), etc.. α par $\lambda\,\mathrm{i}$, et l'on obtiendra de cette manière la formule (79). Réciproquement, on pourra écrire partout dans la formule (77) α au lieu de $\lambda\,\mathrm{i}$; et l'on trouvera ainsi, au lieu de l'équation (77) ou (79), une équation de la forme

$$(101)\quad \left\{\begin{array}{c} f(x) = \\ (\mathrm{A}-\alpha)\varphi(\alpha)[(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}f(x) - (\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}]f(-x), \end{array}\right.$$

pourvu que l'on fasse

$$(102)\quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha} - \eta(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha}} + \frac{1}{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha} - \eta(\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}}$$

$$= 4(1-\eta)\,\frac{(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha} + (\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}}{(1-\eta)^2[(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha} + (\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}]^2 - (1+\eta)^2[(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha} - (\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}]^2}$$

$$= \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - [(\mathrm{A}+\alpha)(\mathrm{B}-\alpha)e^{-a\alpha} - (\mathrm{A}-\alpha)(\mathrm{B}+\alpha)e^{a\alpha}]^2},$$

ε étant un nombre infiniment petit, et que l'on désigne par

$$(103)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x-\mu)\mathrm{i}}f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

une fonction qui soit considérée comme toujours nulle, hors des limites $x = 0$, $x = a$, et toujours connue entre ces limites.

En remettant pour $\varphi(\alpha)$ sa valeur dans $f(x)$, on trouvera

$$(104) \qquad f(x) = \frac{2\varepsilon(A-\alpha)[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x)-(B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)]}{\varepsilon^2-[(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}-(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}]^2},$$

ε désignant un nombre infiniment petit. Cette formule, jointe à la suivante

$$(105) \qquad \psi(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda i)f(\mu)\,e^{\lambda(x-\mu)i}\,d\mu\,d\lambda,$$

dans laquelle $\psi(\alpha)$ désigne une fonction quelconque de α, suffit pour déterminer complétement la valeur de $f(x)$ et de $\psi(\alpha)f(x)$. On aura par suite, en vertu de la formule (53),

$$(106) \qquad \left\{ u = \frac{2\varepsilon(A-\alpha)e^{t(m^2\alpha^2-r)}[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x)-(B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)]}{\varepsilon^2-[(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}-(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]^2}. \right.$$

On peut encore présenter l'équation (104) sous la forme

$$(107) \qquad f(x) = (A-\alpha)\varpi(x),$$

la valeur de $\varpi(x)$ étant

$$(108) \qquad \varpi(x) = \frac{2\varepsilon[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x)-(B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)]}{\varepsilon^2-[(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}-(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]^2}.$$

Cette dernière valeur de $\varpi(x)$ vérifie deux équations semblables aux formules (62), savoir

$$(109) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varpi(x) = -\varpi(-x), \quad \text{et} \\ [(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}-(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]\varpi(x) = 0, \end{array} \right.$$

et, de plus, elle satisfait, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$, $x = a$, à la formule

$$(110) \qquad \varpi(x) = \frac{f(x)}{A - \alpha}.$$

Remarquons enfin que, si l'on pose comme ci-dessus

$$(102) \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha} - \eta(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}} + \frac{1}{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha} - \eta(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 - [(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha} - (A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]^2},$$

la valeur de $\varpi(x)$ deviendra simplement

$$(111) \quad \varpi(x) = \varphi(\alpha)[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x) - (B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)].$$

On pourrait, à l'aide des équations (109) et (110), déterminer directement la valeur de $\varpi(x)$, ainsi qu'il suit :

Soit d'abord

$$(112) \qquad \varpi(x) = \chi(\alpha)f(x) + \psi(\alpha)f(-x).$$

Si, dans cette formule, on change x en $-x$, on devra changer aussi α en $-\alpha$, et l'on trouvera par suite

$$(113) \qquad \varpi(-x) = \chi(-\alpha)f(-x) + \psi(-\alpha)f(x).$$

Si l'on ajoute les équations (112) et (113), on trouvera, en ayant égard à la première des équations (109),

$$0 = [\chi(\alpha) + \psi(-\alpha)]f(x) + [\chi(-\alpha) + \psi(\alpha)]f(-x).$$

On satisfait à cette dernière en posant

$$\psi(\alpha) = -\chi(-\alpha).$$

Donc

$$(114) \qquad \varpi(x) = \chi(\alpha)f(x) - \chi(-\alpha)f(-x).$$

Observons de plus qu'on tirera de la seconde des équations (109)

$$(115)\qquad \begin{aligned}\varpi(x) &= \frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\,e^{-2a\alpha}\,\varpi(x)\\ &= \frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\,e^{2a\alpha}\,\varpi(x)\ ;\end{aligned}$$

et par suite, η désignant un nombre très-peu différent de l'unité, et n un nombre entier quelconque,

$$(116)\qquad \begin{cases}\varpi(x) = \left[\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \varpi(x-2na),\\ \varpi(x) = \left[\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \varpi(x+2na).\end{cases}$$

Si, dans les formules précédentes, on remplace x par $-x$, on devra remplacer aussi α par $-\alpha$. On trouvera donc

$$(117)\qquad \begin{cases}\varpi(-x) = \left[\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \varpi(-x-2na),\\ \varpi(-x) = \left[\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \varpi(-x+2na),\end{cases}$$

et l'on aura par suite, en vertu de la première des équations (109),

$$(118)\qquad \begin{cases}\varpi(x) = -\left[\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\right]^n \varpi(-x-2na),\\ \varpi(x) = -\left[\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\right]^n \varpi(-x+2na).\end{cases}$$

Les équations (116) et (118) peuvent encore s'écrire comme il suit :

$$(119)\qquad \begin{cases}\varpi(x) = \left[\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\,e^{-2a\alpha}\right]^n \varpi(x), & \begin{cases}x=0\\ x=\infty\end{cases},\\ \varpi(x) = \left[\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\,e^{2a\alpha}\right]^n \varpi(x),\end{cases}$$

$$(120)\qquad \begin{cases}\varpi(x) = -\left[\eta\dfrac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\,e^{2a\alpha}\right]^n \varpi(-x),\\ \varpi(x) = -\left[\eta\dfrac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\,e^{-2a\alpha}\right]^n \varpi(-x).\end{cases}$$

Si maintenant on écrit dans les seconds membres des équations précédentes

$$\frac{f(x)}{A-\alpha} \quad \text{au lieu de} \quad \varpi(x),$$

et

$$\frac{f(-x)}{A+\alpha} \quad \text{au lieu de} \quad \varpi(-x),$$

elles auront respectivement lieu pour les valeurs de

$$x-2na, \quad x+2na, \quad -x-2na, \quad -x+2na.$$

comprises entre zéro et a; d'où il résulte qu'on devra y poser successivement

$$x-2na=\iota a, \qquad x+2na=\iota a,$$
$$-x-2na=\iota a, \qquad -x+2na=\iota a,$$

ι désignant un nombre inférieur à l'unité. On aura donc par suite

$$x=(2n+\iota)a, \qquad -x=(2n-\iota)a,$$
$$-x=(2n+\iota)a, \qquad x=(2n-\iota)a,$$

et l'on pourra, dans ces quatre équations, prendre pour limites inférieures de n,

$$n=0, \qquad n=1, \qquad n=0, \qquad n=1.$$

En réunissant toutes les valeurs particulières de $\varpi(x)$, on aura la valeur générale, savoir :

$$(121)\quad \varpi(x)=\frac{f(x)}{A-\alpha}\left\{\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n+\sum_1^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n\right\}$$
$$-\frac{f(-x)}{A+\alpha}\left\{\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n+\sum_1^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n\right\}.$$

Ici l'on reconnaît immédiatement que $\varpi(x)$ est de la forme exigée par l'équation (114). Si, dans chacune des sommes prises depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, on supprime le premier des facteurs égaux à 0, et si l'on pose en outre

(122) $$\varphi(\alpha) = \frac{e^{-a\alpha}}{(A-\alpha)(B+\alpha)}\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A+\alpha)(B-\alpha)}{(A-\alpha)(B+\alpha)}e^{-2a\alpha}\right]^n + \frac{e^{a\alpha}}{(A+\alpha)(B-\alpha)}\sum_0^\infty\left[\eta\frac{(A-\alpha)(B+\alpha)}{(A+\alpha)(B-\alpha)}e^{2a\alpha}\right]^n,$$

on trouvera

(123) $$\varpi(x) = \varphi(\alpha)[(B+\alpha)e^{a\alpha}f(x) - (B-\alpha)e^{-a\alpha}f(-x)].$$

De plus, il est clair que la valeur de $\varphi(\alpha)$ donnée par l'équation (122) deviendra

(124) $$\varphi(\alpha) = \frac{1}{(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha} - \eta(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}} + \frac{1}{(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha} - \eta(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}}.$$

Les formules (123) et (124) coincident exactement avec les formules (102) et (111). Pour achever la solution du problème, et retrouver la formule (79), il suffira de recourir à l'équation

(103) $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a e^{\lambda(x-\mu)i}f(\mu)\,.\,d\mu d\lambda,$$

et d'observer qu'on aura généralement

(125) $$\begin{cases} \chi(\alpha)\,f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \chi(\lambda i)\,e^{\lambda(x-\mu)i}f(\mu)d\mu d\lambda, \\ \chi(-\alpha)\,f(-x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \chi(-\lambda i)\,e^{\lambda(x+\mu)i}f(\mu)d\mu d\lambda. \end{cases}$$

Revenons maintenant à l'équation des cordes vibrantes. On a, dans ce cas, pour déterminer $f(x)$, les deux équations

(126) $$\begin{cases} (e^{a\alpha} - e^{-a\alpha})f(x) = 0, \\ f(x) = -f(-x). \end{cases}$$

De plus, nous appellerons encore $f(x)$ une fonction qui sera égale à la valeur connue de $f(x)$ entre les limites $x = 0$.

$x = a$, et qui deviendra constamment nulle hors de ces limites. Cela posé, on tirera des équations (126)

$$f(x) = e^{-2a\alpha} f(x)$$
$$= e^{2a\alpha} f(x),$$

et par suite en nommant ι, η, deux nombres inférieurs à la limite 1, mais dont le dernier η diffère infiniment peu de l'unité,

$$f(x) = \eta^n e^{-2an\alpha} f(x), \text{ pour } x = (2n+\iota)a,\ n = \text{ou} > 0,$$
$$f(x) = \eta^n e^{2an\alpha}\ f(x), \quad -x = (2n-\iota)a,\ n = \text{ou} > 1,$$
$$-f(x) = f(-x) = \eta^n e^{2an\alpha}\ f(-x), \quad -x = (2n+\iota)a,\ n = \text{ou} > 0,$$
$$-f(x) = f(-x) = \eta^n e^{-2an\alpha} f(-x), \quad x = (2n-\iota)a,\ n = \text{ou} > 1.$$

En remplaçant dans les seconds membres des équations précédentes $f(x)$ par $\mathrm{f}(x)$, $f(-x)$ par $\mathrm{f}(-x)$, puis réunissant toutes les valeurs particulières de $f(x)$ qui en résulteront, on obtiendra la valeur générale de $f(x)$, savoir :

$$f(x) = \sum_0^\infty \eta^n e^{-2an\alpha} \mathrm{f}(x) - \sum_1^\infty \eta^n e^{-2an\alpha} \mathrm{f}(-x)$$
$$+ \sum_1^\infty \eta^n e^{2an\alpha}\ \mathrm{f}(x) - \sum_0^\infty \eta^n e^{2an\alpha}\ \mathrm{f}(-x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(x) = \left(\sum_0^\infty \eta^n e^{-2an\alpha} + \sum_0^\infty \eta^n e^{2an\alpha} - 1\right)\left[\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)\right]$$
$$= \frac{1-\eta^2}{1-\eta(e^{2a\alpha}+e^{-2a\alpha})+\eta^2}\left[\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)\right],$$

ou à très-peu près

$$(127) \qquad f(x) = \frac{2(1-\eta)}{1-\eta(e^{2a\alpha}+e^{-2a\alpha})+\eta^2}\left[\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)\right].$$

On a d'ailleurs

$$(128) \qquad \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \left[e^{\lambda(x-\mu)\iota} - e^{\lambda(x+\mu)\iota}\right]\mathrm{f}(\mu)\,d\mu\,d\lambda;$$

puis, en désignant par ρ une racine de l'équation

$$(129)\qquad e^{a\lambda i} - e^{-a\lambda i} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \sin a\lambda = 0,$$

on trouve

$$(130)\qquad \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \frac{(1-\eta)d\lambda}{1-2\eta\cos(2a\lambda)+\eta^2} = \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \frac{(1-\eta)d\lambda}{(1-\eta\cos 2a\lambda)^2+(\eta\sin 2a\lambda)^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

Donc, par suite, on aura

$$\begin{aligned}(131)\quad f(x) &= \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \left[e^{\rho(x-\mu)i} - e^{\rho(x+\mu)i}\right] f(\mu)d\mu \\ &= \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \left[\cos\rho(x-\mu) - \cos\rho(x+\mu)\right] f(\mu)d\mu \\ &= \frac{1}{a}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \sin\rho x \cdot \sin\rho\mu \cdot f(\mu)d\mu \\ &= \frac{2}{a}\sum_{0}^{\infty}\sin\rho x \int_0^a \sin\rho\mu \cdot f(\mu)d\mu,\end{aligned}$$

ce qui est exact.

Il est aisé de voir que les méthodes ci-dessus exposées sont applicables à tous les problèmes du même genre.

§ 7. *Développement des principes établis dans le paragraphe précédent.*

Adoptons les notations du paragraphe 3^e^, en sorte qu'on ait

$$(1)\qquad F(\alpha)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(x-\mu)i} F(\lambda i) f(\mu)d\mu d\lambda,$$

quelles que soient les fonctions $F(\alpha)$ et $f(\mu)$. On en conclura, si $F(\alpha)$ désigne une fonction entière de α et de e^{α}, en sorte qu'on ait

$$(2)\qquad F(\alpha) = \varphi(\alpha, e^{\alpha}),$$

on en conclura, dis-je,

$$\varphi(\alpha, e^{\alpha}) f(x) = \varphi(\mathrm{D}_x, 1 + \Delta_x) f(x). \tag{3}$$

De plus, si, la valeur de $\mathrm{F}(\alpha)$ restant quelconque, on a

$$\mathrm{F}(\alpha) = \varphi(\alpha)\,\chi(\alpha), \tag{4}$$

alors, en posant

$$\chi(\alpha) f(x) = \varpi(x), \tag{5}$$

on trouvera

$$\mathrm{F}(\alpha) f(x) = \varphi(\alpha)\,\varpi(x), \tag{6}$$

ou

$$\begin{aligned}[\varphi(\alpha)\cdot\chi(\alpha)]f(x) &= \varphi(\alpha)[\chi(\alpha) f(x)] \\ &= \chi(\alpha)[\varphi(\alpha) f(x)].\end{aligned} \tag{7}$$

Enfin, si l'on a

$$f(x) = \mathrm{S}\varphi(k)\, e^{kx}, \tag{8}$$

S indiquant une somme quelconque de termes finis ou infiniment petits, on trouvera

$$\mathrm{F}(\alpha) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\lambda\, i)\,[\mathrm{S}\varphi(k)\, e^{k\mu}]\, e^{\lambda(x-\mu)i}\, d\mu\, d\lambda : \tag{9}$$

et parce que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(k-\lambda)i}\, \mathrm{F}(\lambda\, i)\, d\lambda\, d\mu = \mathrm{F}(k), \tag{10}$$

on aura

$$\mathrm{F}(\alpha) f(x) = \mathrm{S}\mathrm{F}(k)\,\varphi(k)\, e^{kx}. \tag{11}$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$f(x) = \int_{u'}^{u''} e^{ux\,i}\,\varphi(u)\, du \tag{12}$$

entraînera la suivante :

$$\mathrm{F}(\alpha) f(x) = \int_{u'}^{u''} \mathrm{F}(u\, i)\,\varphi(u)\, e^{ux\,i}\, du. \tag{13}$$

Si l'on désigne par $f(x)$ une fonction de x qui soit tou-

jours connue entre les limites $x = 0$, $x = a$, et toujours nulle hors de ces limites, on aura

$$(14)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu, \\ f(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{\lambda(x+\mu)i} f(\mu)\,d\mu, \end{cases}$$

et l'on en conclura

$$(15)\quad \begin{cases} F(\alpha) f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} F(\lambda i)\, e^{\lambda(x-\mu)i} f(\mu)\,d\mu, \\ F(\alpha) f(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{a} F(\lambda i)\, e^{\lambda(x+\mu)i} f(\mu)\,d\mu. \end{cases}$$

Observons enfin que, si la fonction $\varpi(x)$, étant propre à vérifier l'équation

$$(16)\qquad [\varphi(\alpha) - 1]\,\varpi(x) = 0,$$

est donnée par la formule

$$(17)\quad \varpi(x) = \left[\sum_0^\infty \eta^n \left(\varphi(\alpha)\right)^n + \sum_0^\infty \eta^n \left(\frac{1}{\varphi(\alpha)}\right)^n - 1\right] f(x),$$

ou

$$(18)\quad \begin{cases} \varpi(x) = \left[\frac{1}{1-\eta\varphi(\alpha)} + \frac{1}{1-\frac{\eta}{\varphi(\alpha)}} - 1\right] f(x), \\ \qquad = \frac{1-\eta^2}{1-\eta\left[\varphi(\alpha) + \frac{1}{\varphi(\alpha)}\right] + \eta^2} f(x), \end{cases}$$

η représentant un nombre très-rapproché de l'unité ; on trouvera, en désignant par ρ une racine réelle de l'équation

$$(19)\qquad \varphi(\rho i) = 1,$$

et posant

$$(20)\qquad Q = \pm \varphi'(\rho i),$$

ou, ce qui revient au même, en représentant par Q la va-

leur numérique de la fonction $\varphi'(\alpha)$ correspondante à $\alpha = \rho i$,

$$\int_{\rho-\varepsilon}^{\rho+\varepsilon} \frac{(1-\eta^2)d\lambda}{1-\eta\left[\varphi(\lambda i)+\frac{1}{\varphi(\lambda i)}\right]+\eta^2} = \frac{2\pi}{Q},$$

ε étant un nombre très-petit; et par suite

$$(21) \qquad \varpi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Q} e^{\rho(x-\mu)i} f(\mu) d\mu.$$

C'est là, en effet, ce que l'on conclura de l'équation (18) combinée avec la formule

$$(22) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{\lambda(x-\mu)i} d\mu d\lambda.$$

Si la fonction $f(x)$ était assujettie à s'évanouir hors des limites $x = 0$, $x = a$, on aurait

$$(23) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{a} f(\mu) e^{\lambda(x-\mu)i} d\mu d\lambda,$$

et l'équation (21) serait remplacée par la suivante

$$(24) \qquad \varpi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{a} \frac{1}{Q} e^{\rho(x-\mu)i} f(\mu) d\mu.$$

Enfin, si l'on supposait

$$(25) \qquad f(x) = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \chi(\lambda) e^{\lambda x i} d\lambda,$$

on trouverait

$$(26) \qquad \varpi(x) = 2\pi \sum_{\lambda'}^{\lambda''} \left[\frac{\chi(\rho)}{Q} e^{\rho x i}\right],$$

le signe $\sum$ devant s'étendre à toutes les racines réelles de l'équation (19) comprises entre les limites λ' et λ''.

Si l'on supposait

$$(27) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)},$$

l'équation (19), qui fournit les valeurs de ρ, deviendrait

$$\psi(\rho i) - \psi(-\rho i) = 0, \tag{28}$$

et la valeur de Q serait donnée par la formule

$$Q = \pm \frac{\psi'(\rho i) + \psi'(-\rho i)}{\psi(\rho i)}. \tag{29}$$

Appliquons maintenant les formules qui précèdent à des exemples particuliers.

Premier problème. La fonction

$$f(x)$$

étant assujettie à vérifier l'équation

$$f(x + a) = f(x) \qquad \text{ou} \qquad e^{a\alpha} f(x) = f(x), \tag{30}$$

et la valeur de cette fonction étant connue entre les limites

$$x = 0, \qquad x = a,$$

on demande sa valeur générale.

Solution. Désignons par $f(x)$ une fonction qui obtienne la même valeur que $f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$, et qui soit constamment nulle hors de ces limites. L'expression

$$e^{na\alpha} f(x) = f(x + na)$$

(n étant un nombre entier quelconque) sera toujours nulle, excepté entre les limites $x = -na$, $x = -na + a$, et l'expression

$$e^{-na\alpha} f(x) = f(x - na)$$

sera pareillement nulle, excepté entre les limites $x = na$, $x = na + a$. De plus, on aura généralement, en désignant par

$$\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \eta = 1 - \varepsilon$$

deux nombres, l'un infiniment petit, l'autre infiniment rapproché de l'unité,

$$(31)\qquad \begin{cases} f(x) = \eta^n e^{an\alpha} f(x), \\ f(x) = \eta^n e^{-an\alpha} f(x), \end{cases}$$

et l'on en conclura évidemment

$$(32)\qquad f(x) = \left(\sum_0^\infty \eta^n e^{an\alpha} + \sum_0^\infty \eta^n e^{-an\alpha} - 1\right) f(x).$$

On a retranché l'unité des deux sommes $\sum_0^\infty \eta^n e^{an\alpha}$, $\sum_0^\infty \eta^n e^{-an\alpha}$, afin de ne pas trouver $2f(x)$ au lieu de $f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = a$, correspondantes à $n = 0$. Pour déduire l'équation (32) de la formule (17) il suffit de remplacer $\varpi(x)$ par $f(x)$, $f(x)$ par $f(x)$ et $\varphi(\alpha)$ par $e^{a\alpha}$. Cela posé, on aura

$$\varphi'(\alpha) = ae^{a\alpha}.$$

L'équation (19) deviendra

$$(33)\qquad e^{ap\mathrm{i}} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \cos ap = 1,$$

et la valeur de Q sera

$$(34)\qquad Q = ae^{ap\mathrm{i}} = a.$$

Par suite la formule (24) donnera

$$(35)\qquad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_a^a e^{p(x-\mu)\mathrm{i}} f(\mu)\, d\mu \\ \quad = \frac{1}{a} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^a \cos p(x-\mu) f(\mu)\, d\mu \\ \quad = \frac{2}{a} \int_0^a \left[\frac{1}{2} + \sum_0^\infty \cos \frac{2n\pi}{a}(x-\mu)\right] f(\mu)\, d\mu. \end{cases}$$

Second problème. Supposons qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$(36)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} - m^2 \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\alpha^2 - m^2\theta^2)z = 0,$$

de manière que l'on ait

pour $x = 0$ et pour $x = a$ $\Big\}$ $z = 0$, quel que soit t,

et de plus, pour $t = 0$,

$$z = f(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

entre les limites $x = 0$, $x = a$, [$f(x)$ désignant une fonction qui s'évanouisse hors de ces limites].

Solution. Dans ce cas, comme on l'a déjà prouvé, on est conduit aux équations

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\alpha t}{m}} + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) f(x), \tag{37}$$

la valeur de $f(x)$ étant déterminée par les formules

$$(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) f(x) = 0, \qquad f(x) = -f(-x). \tag{38}$$

La première de ces formules pouvant s'écrire comme il suit

$$e^{2a\alpha} f(x) = f(x),$$

on aura $\varphi(\alpha) = e^{2a\alpha}$, et de plus

$$f(x) = e^{2an\alpha} f(x), \qquad f(x) = -e^{-2an\alpha} f(-x),$$
$$f(x) = e^{-2an\alpha} f(x), \qquad f(x) = -e^{2an\alpha} f(-x),$$

$$f(x) = \left[\sum_0^\infty \eta^n e^{2an\alpha} + \sum_0^\infty \eta^n e^{-2an\alpha} - 1\right]\left[f(x) - f(-x)\right]. \tag{39}$$

Cela posé, on trouvera pour déterminer ρ, l'équation

$$e^{2a\rho i} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \cos 2a\rho = 1, \tag{40}$$

et la valeur de Q deviendra

$$Q = 2a. \tag{41}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$f(x) - f(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \left[e^{\lambda(x-\mu)i} - e^{\lambda(x+\mu)i}\right] f(\mu)\, d\mu\, d\lambda, \tag{42}$$

on tirera de la formule (26)

$$(43)\quad f(x)=\frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\rho x i}\int_0^a(e^{-\rho\mu i}-e^{\rho\mu i})f(\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{1}{ai}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\rho x i}\int_0^a\sin(\rho\mu).f(\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{0}^{\infty}\sin\rho x\int_0^a\sin(\rho\mu).f(\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{2}{a}\sum_{0}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a\sin\frac{n\pi\mu}{a}f(\mu)\,d\mu,$$

ce qui est exact.

Troisième problème. Intégrer l'équation

$$(44)\quad \frac{du}{dt}-m^2\frac{d^2u}{dx^2}+ru=0,\qquad \text{ou}\qquad (\theta-m^2\alpha^2+r)u=0,$$

de manière que l'on ait

pour $t=0$, $u=f(x)$, entre les limites $\left\{\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right\}$,

pour $x=0$, $\frac{du}{dx}+Au=0$

pour $x=a$, $\frac{du}{dx}+Bu=0$ } quel que soit t.

Solution. On aura, comme nous l'avons prouvé,

$$(45)\qquad u=e^{(m^2\alpha^2-r)t}f(x),$$

$$(46)\qquad f(x)=(A-\alpha)\varpi(x);$$

la valeur de $\varpi(x)$ étant assujettie aux équations

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l}[(A-\alpha)(B+\alpha)e^{a\alpha}-(A+\alpha)(B-\alpha)e^{-a\alpha}]\varpi(x)=0,\\ \varpi(x)=-\varpi(-x),\end{array}\right.$$

et devant être égale à

$$\frac{f(x)}{A-\alpha},$$

entre les limites $x=0$, $x=a$. Cela posé, on trouvera

$$\psi(\alpha) = (A - \alpha)(B + \alpha)e^{a\alpha},$$

$$\varpi(x) = \eta^n \left[\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right]^n \varpi(x) = \eta^n \left[\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^n \varpi(x)$$

$$= -\eta^n \left[\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right]^n \varpi(-x) = -\eta^n \left[\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right] \varpi(-x),$$

et par suite

$$(48)\quad \varpi(x) = \left[\sum_0^\infty \eta^n \left(\frac{\psi(\alpha)}{\psi(-\alpha)}\right)^n + \sum_0^\infty \eta^n \left(\frac{\psi(-\alpha)}{\psi(\alpha)}\right)^n - 1\right]\left[\frac{f(x)}{A-x} - \frac{f(-x)}{A+x}\right].$$

De plus, l'équation (28) donnera

$$(49)\quad (A - \rho i)(B + \rho i)e^{a\rho i} - (A + \rho i)(B - \rho i)^{-a\rho i} = 0,$$

ou

$$(50)\qquad (AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho = 0;$$

et comme on aura identiquement

$$(AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho = \frac{\psi(\rho i) - \psi(-\rho i)}{2i},$$

il est clair qu'en posant

$$R = \pm\frac{d_\rho[(AB + \rho^2)\sin a\rho - (B - A)\rho\cos a\rho]}{d\rho} = \pm\frac{\psi'(\rho i) + \psi'(-\rho i)}{2},$$

on tirera de la formule (29),

$$(49)\qquad Q = \pm\frac{2R}{\psi(\rho i)} = \pm\frac{2R}{\psi(-\rho i)},$$

eu égard à l'équation

$$\psi(\rho i) = \psi(-\rho i).$$

Par suite, comme on aura aussi

$$(50)\quad \frac{f(x)}{A-x} - \frac{f(-x)}{A+x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a \left(\frac{e^{\lambda(x-\mu)i}}{A-\lambda i} - \frac{e^{\lambda(x+\mu)i}}{A+\lambda i}\right) f(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

on tirera des formules (26) et (48)

$$(51)\quad \varpi(x)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R}\int_0^a\left(\frac{\psi(\rho i)\,e^{\rho(x-\mu)i}}{A-\rho i}-\frac{\psi(-\rho i)\,e^{\rho(x+\mu)i}}{A+\rho i}\right)f(\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\rho x i}}{R}\int_0^a\left[(B+\rho i)\,e^{(a-\mu)\rho i}-(B-\rho i)\,e^{(\mu-a)\rho i}\right]f(\mu)\,d\mu,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(52)\quad \varpi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\rho x i}}{R}\int_0^a\left[B\sin(a-\mu)\rho+\rho\cos(a-\mu)\rho\right]f(\mu)\,d\mu$$
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{-\sin\rho x}{R}\int_0^a\left[B\sin(a-\mu)\rho+\rho\cos(a-\mu)\rho\right]f(\mu)\,d\mu;$$

après quoi la formule

$$(53)\qquad f(x)=(A-\alpha)\,\varpi(x)=[A-D_x]\,\varpi(x)$$

donnera

$$(54)\qquad f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\cos\rho x-A\sin\rho x}{R}\int_0^a\left[B\sin(a-\mu)\rho+\rho\cos(a-\mu)\rho\right]f(\mu)\,d\mu.$$

Quatrième problème. Intégrer l'équation

$$(55)\quad \frac{d^2z}{dt^2}-r^2\frac{d^2z}{dx^2}-s^2\frac{d^2z}{dy^2}=0,\quad \text{ou}\quad (\theta^2-r^2\alpha^2-s^2\beta^2)z=0,$$

de manière que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour } x=0\\ \text{et pour } x=a\end{array}\right\}\ z=0,\quad \text{quels que soient } y \text{ et } t,$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour } y=0\\ \text{et pour } y=b\end{array}\right\}\ z=0,\quad \text{quels que soient } x \text{ et } t,$$

$$\text{pour } t=0\ \left\{\begin{array}{l} z=f(x,y)\\ \dfrac{dz}{dt}=0\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}\text{entre les limites } x=0,\\ x=a,\ y=0,\ y=b \text{ et}\\ f(x,y) \text{ étant une fonction}\\ \text{toujours nulle hors de}\\ \text{ces limites.}\end{array}\right.$$

Solution. On trouvera, en raisonnant comme dans le second problème,

$$(56)\qquad z=\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}+e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right)f(x,y)$$
$$=\left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}-e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y,t)$$
$$=\left(e^{\frac{y}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}-e^{-\frac{y}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}\right)\psi(x,t),$$

et de plus

$$(57)\qquad \left(e^{\frac{a}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}-e^{-\frac{a}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y,t)=0,$$

$$(58)\qquad \left(e^{\frac{b}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}-e^{-\frac{b}{s}\sqrt{\theta^2-r^2\alpha^2}}\right)\psi(x,t)=0.$$

Soit maintenant

$$\mathrm{F}(\alpha)=e^{a\alpha}-e^{-a\alpha}=-\mathrm{F}(-\alpha).$$

On aura, en vertu des équations (3) et (57),

$$\mathrm{F}(\alpha)\left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}-e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\chi(y,t)$$
$$=\left[\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}-\mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right]\chi(y,t)$$
$$=\left(e^{\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}+e^{-\frac{x}{r}\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}\right)\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{\theta^2-s^2\beta^2}}{r}\right)\chi(y,t)=0.$$

On aura donc par suite

$$\mathrm{F}(\alpha)z=\frac{1}{2}\left[e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}+e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right]\mathrm{F}(\alpha)f(x,y)=0,$$

et, en posant $t=0$, on en conclura

$$\mathrm{F}(\alpha)f(x,y)=0,$$

ou

$$(59)\qquad (e^{a\alpha}-e^{-a\alpha})f(x,y)=0.$$

On établira de la même manière l'équation

$$(60)\qquad (e^{b\beta}-e^{-b\beta})f(x,y)=0.$$

Enfin, comme on tire de l'équation (56)

$$\frac{1}{2}\left[e^{t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}-e^{-t\sqrt{r^2\alpha^2+s^2\beta^2}}\right]f(x,y)=\varpi(x,y,t)-\varpi(-x,y,t),$$

on en conclura, en posant $t=0$,

$$f(x,y)=\varpi(x,y,0)-\varpi(-x,y,0),$$

et par suite

$$f(-x,y)=-f(x,y). \tag{61}$$

On trouvera de même

$$f(x,-y)=-f(x,-y). \tag{62}$$

Les équations (59), (60), (61) et (62) suffisent pour prolonger indéfiniment la fonction $f(x,y)$ hors des limites $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. On y parviendra, en suivant la méthode employée dans le second problème. En effet, si l'on désigne par m, n deux nombres entiers quelconques, on tirera des formules (59), (60), (61) et (62)

$$\left\{\begin{aligned}
f(x,y) &= \eta^m\eta'^m e^{\pm 2ma\alpha}e^{\pm 2nb\beta}f(x,y),\\
f(-x,y) &= -\eta^m\eta'^m e^{\mp 2ma\alpha}e^{\pm 2nb\beta}f(-x,y),\\
f(x,-y) &= -\eta^m\eta'^m e^{\pm 2ma\alpha}e^{\mp 2nb\beta}f(x,-y),\\
f(-x,-y) &= \eta^m\eta'^m e^{\mp 2ma\alpha}e^{\mp 2nb\beta}f(-x,-y),
\end{aligned}\right. \tag{63}$$

$\eta=1-\varepsilon$ et $\eta'=1-\varepsilon'$ désignant deux nombres très-rapprochés de l'unité. On aura par suite

$$f(x,y)= \tag{64}$$

$$\left(\sum_0^\infty \eta^m e^{2ma\alpha}+\sum_0^\infty \eta^m e^{-2ma\alpha}-1\right)\left(\sum_0^\infty \eta'^n e^{2nb\beta}+\sum_0^\infty \eta'^n e^{-2nb\beta}-1\right)\left\{\begin{matrix} f(x,y)-f(-x,y)\\ -f(x,-y)+f(-x,-y)\end{matrix}\right\}.$$

De plus, si, dans la formule qu'on obtient en égalant l'un à l'autre les derniers membres des équations (39) et (43),

on remplace n par m, et $f(x)$ par $f(x,y) - f(x,-y)$, on trouvera

$$\left(\sum_0^\infty \eta^m e^{2ma\alpha} + \sum_0^\infty \eta^m e^{-2ma\alpha} - 1\right)\Big(f(x,y) - f(x,-y) - f(-x,y) + f(-x,-y)\Big)$$
$$= \frac{2}{a}\sum_0^\infty \sin\frac{m\pi x}{a}\int_0^a \sin\frac{m\pi\mu}{a}\,[f(\mu,y) - f(\mu,-y)]\,d\mu.$$

On trouvera de même

$$\left(\sum_0^\infty \eta'^n e^{2nb\beta} + \sum_0^\infty \eta'^n e^{-2nb\beta} - 1\right)\Big(f(\mu,y) - f(\mu,-y)\Big)$$
$$= \frac{2}{b}\sum_0^\infty \sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^b \sin\frac{n\pi\nu}{b} f(\mu,\nu)\,d\nu.$$

Cela posé, la formule (64) donnera

$$(65)\qquad f(x,y) = \frac{4}{ab}\sum_0^\infty\sum_0^\infty \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\int_0^b\int_0^a \sin\frac{m\pi\mu}{a}\sin\frac{n\pi\nu}{b} f(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu. \quad (*)$$

(*) Il m'a semblé inutile de reproduire ici des formules qui, dans le manuscrit, suivaient celles qu'on vient de lire, et qui se rapportaient uniquement à la question traitée aux pages 33 et 34 du mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique.

POST-SCRIPTUM.

Plusieurs des formules établies dans le mémoire précédent ont, avec celles que j'ai données plus tard dans d'autres mémoires, des rapports faciles à saisir. L'objet des notes qu'on va lire est non-seulement d'indiquer ces rapports, mais encore de joindre à ces formules quelques éclaircissements, ou quelques développements, qui m'ont paru propres à intéresser les amis des sciences, et à contribuer aux progrès de l'analyse mathématique.

PREMIÈRE NOTE.

SUR LES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES.

Dans le précédent mémoire, un grand nombre de formules renferment quelques-unes des expressions que l'on a nommées imaginaires. J'avais même, dans le manuscrit, conservé la notation généralement admise à l'époque où j'écrivais, et le signe $\sqrt{-1}$, auquel j'ai substitué dans l'impression la lettre i, ainsi qu'il est dit à la page 42, afin de me conformer à l'usage maintenant adopté par les géomètres. J'ajouterai que la théorie des expressions imaginaires a été, à diverses époques, envisagée sous divers points de vue.

Dès l'année 1806, M. l'abbé Buée et M. Argand, en partant de cette idée que $\sqrt{-1}$ est un signe de perpendicularité, avaient donné des expressions imaginaires une interprétation géométrique contre laquelle des objections spécieuses ont été proposées. Plus tard, M. Argand et d'autres auteurs, particulièrement MM. Français, Faure, Mourey, Vallès, etc..... ont publié des recherches (*) qui avaient pour but de développer ou de modifier l'interprétation dont il s'agit. Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires en considérant ces expressions et ces équations comme *symboliques*. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions *imaginaires* par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques*, en mettant à profit les idées émises et les notations proposées non-seulement par les auteurs déjà cités, mais aussi par M. de Saint-Venant, dans un mémoire digne de remarque sur les *sommes géométriques*. C'est ce que j'essayerai d'expliquer dans les paragraphes suivants, qui offriront une sorte de résumé des travaux faits sur cette matière, reproduits, dans un ordre méthodique, avec des modifications utiles, sous une forme simple et nouvelle en quelques points.

(*) Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre.

§ 1. *Définitions, notations.*

Menons, dans un plan fixe, et par un point fixe O pris pour *origine* ou *pôle*, un axe *polaire* OX. Soient d'ailleurs r la distance de l'origine O à un autre point A du plan fixe, et p l'angle polaire, positif ou négatif, décrit par un rayon mobile, qui en tournant autour de l'origine O dans un sens ou dans un autre, passe de la position OX à la position OA.

Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le rayon vecteur OA dirigé de O vers A. La longueur de ce rayon, représentée par la lettre r, sera nommée la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p; l'angle p, qui indique la direction du rayon vecteur OA, sera *l'argument* ou *l'azimut* de cette même quantité. Deux quantités géométriques seront *égales* entre elles, lorsqu'elles représenteront le même rayon vecteur. Donc, puisqu'un tel rayon revient toujours à la même position, quand on le fait tourner autour de l'origine dans un sens ou dans un autre, de manière que chacun de ses points décrive une ou plusieurs circonférences du cercle, il est clair que si l'on désigne par k une quantité entière quelconque, positive, nulle ou négative, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, une équation de la forme

$$R_P = r_p$$

entraînera toujours les deux suivantes :

$$R = r, \qquad P = p + 2k\pi,$$

et par suite les formules

$$\cos P = \cos p, \qquad \sin P = \sin p.$$

Enfin, nous conviendrons de mesurer les longueurs absolues sur l'axe polaire OX, en sorte qu'on aura identiquement

$$r_0 = r.$$

Quant à la quantité géométrique r_π (*), elle se mesurera aussi bien que r_0, sur l'axe polaire OX, mais en sens inverse, et par suite la notation r_π pourra être censée représenter ce qu'on nomme en algèbre une quantité négative.

Cela posé, la notion de *quantité géométrique* comprendra, comme cas particulier, la notion de *quantité algébrique*, positive ou négative, et à plus forte raison la notion de *quantité arithmétique* ou de *nombre*, renfermée elle-même, comme cas particulier, dans la notion de quantité algébrique.

Ajoutons que, pour plus de généralité, on pourra désigner encore, sous le nom de *quantité géométrique*, et à l'aide de la notation r_p, une longueur r mesurée dans le plan fixe donné, à partir d'un point quelconque, mais dans une direction qui forme avec l'axe fixe OX, ou avec un axe parallèle, l'angle polaire p. Alors le point à partir duquel se mesurera la longueur r, et le point auquel elle aboutira, seront l'*origine* et l'*extrémité* de cette longueur.

(*) En général, les notations

$$r_p, \quad r_{p+\pi},$$

représenteront deux longueurs mesurées sur la même droite, mais dans des *directions opposées*.

§ 2. *Sommes, produits et puissances entières des quantités géométriques.*

Après avoir défini les quantités géométriques, il est encore nécessaire de définir les diverses fonctions de ces quantités, spécialement leurs sommes, leurs produits, et leurs puissances entières, en choisissant des définitions qui s'accordent avec celles que l'on admet dans le cas où il s'agit simplement de quantités algébriques. Or, cette condition sera remplie, si l'on adopte les conventions que nous allons indiquer.

Étant données plusieurs quantités géométriques,

$$r_p, \qquad r'_{p'}, \qquad r''_{p''}, \ldots$$

représentées en grandeur et en direction par les rayons vecteurs

$$\mathrm{OA}, \qquad \mathrm{OA}', \qquad \mathrm{OA}'', \ldots$$

qui joignent le pôle O aux points A, A′, A″,... concevons que l'on mène par l'extrémité A du rayon vecteur OA une droite AB égale et parallèle au rayon vecteur OA′, puis, par le point B une droite BC égale et parallèle au rayon vecteur OA″, etc... ; et joignons le pôle O au dernier sommet K de la portion de polygone OABC... HK construite comme on vient de le dire. On obtiendra le dernier côté OK d'un polygone fermé dont les premiers côtés seront OA, AB, BC,... HK. Or, ce dernier côté OK sera ce que nous appellerons la *somme* des quantités géométriques données, et ce que nous indiquerons par la juxtaposition de ces quantités, liées l'une à l'autre par le signe +, comme on a coutume de le faire pour une somme de quantités algébriques. En consé-

quence, si l'on nomme R la valeur numérique du rayon vecteur OK, et P l'angle polaire formé par ce rayon avec l'axe polaire, on aura :

$$R_p = r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \dots \quad (1)$$

Observons d'ailleurs que les côtés OA, AB, BC,... HK, du polygone ABCD... HK, peuvent être censés représenter eux-mêmes les quantités géométriques désignées par les notations r_p, $r'_{p'}$, $r''_{p''}$... Donc, *pour obtenir la somme de plusieurs quantités géométriques, il suffit de porter, l'une après l'autre, les diverses longueurs qu'elles représentent, dans les directions indiquées par les divers arguments, en prenant pour origine de chaque longueur nouvelle l'extrémité de la longueur précédente, puis de joindre l'origine de la première longueur à l'extrémité de la dernière par une droite qui représentera en grandeur et en direction la somme cherchée.*

Si l'on projette orthogonalement les divers côtés du polygone OABC... HK sur l'axe polaire, la projection algébrique du dernier côté OK sera évidemment la somme des projections algébriques de tous les autres, ou, ce qui revient au même, la somme des projections algébriques des rayons vecteurs OA, OA', OA''.. Donc l'équation (1) entraînera la suivante :

$$R\cos P = r\cos p + r'\cos p' + r''\cos p'' + \dots \quad (2)$$

On trouvera de même, en projetant les divers côtés du polygone OABC...HK, non plus sur l'axe polaire, mais sur un axe fixe, perpendiculaire à celui-ci,

$$R\sin P = r\sin p + r'\sin p' + r''\sin p'' + \dots \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) fournissent le moyen de déterminer aisément le module R et l'argument P de la somme de plusieurs quantités géométriques.

Si l'on considère seulement deux rayons vecteurs OA, OA′, représentés en grandeur et en direction par les quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$, la somme de ces dernières sera, en vertu de la définition admise, une troisième quantité géométrique propre à représenter en grandeur et en direction la diagonale OK du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs donnés. En d'autres termes, elle sera le troisième côté d'un triangle qui aura pour premier côté le rayon vecteur OA, le second côté AK étant égal et parallèle au rayon vecteur OA′. D'ailleurs dans ce triangle, le côté OK, représenté en grandeur par le module de la somme $r_p + r'_{p'}$, sera compris entre la somme et la différence des deux autres côtés, représentés en grandeur par les modules r et r'. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Premier théorème. Le module de la somme de deux quantités géométriques est toujours compris entre la somme et la différence de leurs modules.

Il est bon d'observer que le module de la somme de deux quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$ pourrait atteindre les limites qui lui sont assignées par le théorème précédent, et se réduirait effectivement à la somme ou à la différence des modules r, r', si les rayons vecteurs OA, OA′ étaient dirigés suivant une même droite, dans le même sens ou en sens opposés.

Le théorème premier entraîne évidemment le suivant.

Deuxième théorème. Le module de la somme de plusieurs quantités géométriques ne peut surpasser la somme de leurs modules.

On peut, au reste, déduire directement ce second théorème de cette seule considération, que dans un polygone formé OABC... HK, le dernier côté OK ne peut surpasser la somme de tous les autres.

Ce que nous nommerons le *produit* de plusieurs quantités géométriques, ce sera une nouvelle quantité géométrique qui aura pour module le produit de leurs modules, et pour argument la somme de leurs arguments. Nous indiquerons le produit de plusieurs quantités géométriques,

$$r_p, \qquad r'_{p'}, \qquad r''_{p''}, \ldots$$

à l'aide des notations que l'on emploie dans le cas où il s'agit de quantités algébriques, par exemple, en plaçant ces quantités à la suite les unes des autres, sans les faire précéder d'aucun signe. Cela posé, on aura, d'après la définition énoncée,

$$r_p r'_{p'} r''_{p''} \ldots = (rr'r'' \ldots)_{p+p'+p''+\ldots}. \tag{4}$$

On sait que, pour multiplier par un facteur donné la somme de plusieurs nombres ou de plusieurs quantités algébriques, il suffit de multiplier chaque terme de la somme par le facteur dont il s'agit. La somme R_P de plusieurs quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$,... jouit de la même propriété. Pour le prouver, il suffit de faire voir que l'équation (1) continuera de subsister, si l'on multiplie les divers termes

$$R_P, \qquad r_p, \qquad r'_{p'}, \qquad r''_{p''}, \ldots$$

par un facteur géométrique ρ_ϖ. Or, en premier lieu, si le module ρ se réduit à l'unité, il suffira, pour effectuer la multiplication dont il s'agit, d'ajouter l'argument ϖ à chacun des arguments P, p, p', p'',... Mais cette opération revient à

faire tourner autour de l'origine chacun des rayons vecteurs

$$R_P, \qquad r_p, \qquad r'_{p'}, \ldots$$

et par suite le polygone OABC...HK dont la construction fournit la valeur de R_P, en faisant décrire à chaque rayon vecteur l'angle ϖ; elle laissera donc subsister l'équation (1), qui deviendra

$$R_{P+\varpi} = r_{p+\varpi} + r'_{p'+\varpi} + r''_{p''+\varpi} + \ldots \tag{5}$$

En second lieu, on pourra, sans altérer les directions des côtés du polygone OABC...HK, le transformer en un polygone semblable, en faisant varier ses côtés dans le rapport de 1 à ρ, et l'on pourra ainsi de la formule (5), déduire l'équation

$$(R\rho)_{P+\varpi} = (r\rho)_{p+\varpi} + (r'\rho)_{p'+\varpi} + \ldots$$

qui peut être présentée sous la forme

$$\rho_\varpi R_P = \rho_\varpi r_p + \rho_\varpi r'_{p'} + \ldots \tag{6}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Troisième théorème. Pour multiplier la somme

$$r_p + r'_{p'} + \ldots$$

de plusieurs quantités géométriques r_p, $r'_{p'}$... par le facteur géométrique ρ_ϖ, il suffit de multiplier chacun des termes qui la composent par ce même facteur.

Ce théorème une fois établi, on en déduit immédiatement la proposition plus générale dont voici l'énoncé :

Quatrième théorème. Le produit de plusieurs sommes de quantités géométriques est la somme des produits partiels que l'on peut former avec les divers termes de ces mêmes sommes, en prenant un facteur dans chacune d'elles.

Soit maintenant m un nombre entier quelconque. Le produit de m facteurs égaux à la quantité géométrique r_p est ce

que nous appellerons la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de cette quantité, et ce que nous indiquerons, suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, par la notation

$$r_p^m.$$

Cela posé, l'équation (4) entraînera évidemment la formule

$$r_p^m = (r^m)_{mp}; \tag{7}$$

et l'on étendra sans peine aux puissances entières de quantités géométriques les propositions connues et relatives aux puissances entières de quantités algébriques. Ainsi, par exemple, en désignant par m, n deux nombres entiers, on aura

$$r_p^m r_p^n = r_p^{m+n}, \tag{8}$$

$$(r_p^m)^n = r_p^{mn}. \tag{9}$$

Ainsi encore, on conclura du quatrième théorème que la formule de Newton, relative au développement de la puissance entière d'un binôme, subsiste dans le cas même où ce binôme est la somme de deux quantités géométriques.

Deux quantités géométriques seront dites *opposées* l'une à l'autre, lorsque leur somme sera nulle, et *inverses* l'une de l'autre, lorsque leur produit sera l'unité. D'après ces définitions, la quantité géométrique $r_{p+\pi}$ ou $-r_p$ sera l'opposée de r_p. De plus, si l'on étend les formules (7), (8), au cas même où l'exposant m devient nul ou négatif, on aura identiquement

$$r_p^0 = 1,$$

et la quantité géométrique r_p^{-1} ne sera autre chose que l'inverse de r_p. Pareillement, r_p^{-m} sera l'inverse de r_p^m, et l'on aura

$$r_p^{-m} = (r^{-m})_{-mp}. \tag{10}$$

Suivant l'usage adopté pour les quantités algébriques, une quantité géométrique pourra quelquefois être représentée par une seule lettre.

§ 3. *Différences, quotients et racines de quantités géométriques.*

Pour les quantités géométriques, comme pour les quantités algébriques, la soustraction, la division, l'extraction des racines, ne seront autre chose que les opérations inverses de l'addition, de la multiplication, de l'élévation aux puissances. Par suite, les résultats de ces opérations inverses, désignés sous les noms de différences, de quotients, de racines, se trouveront complétement définis. Ainsi, en particulier,

La *différence* entre deux quantités géométriques sera ce qu'il faut ajouter à la seconde pour obtenir la première;

Le *quotient* d'une quantité géométrique par une autre sera le facteur qui, multiplié par la seconde, reproduit la première;

La *racine* $n^{\text{ième}}$ d'une quantité géométrique, n étant un nombre entier quelconque, sera un facteur dont la $n^{\text{ième}}$ puissance reproduira la quantité dont il s'agit.

De ces définitions, on déduira immédiatement les propositions suivantes :

Premier théorème. Pour soustraire une quantité géométrique, il suffit d'ajouter la quantité opposée.

Deuxième théorème. Pour diviser par une quantité géométrique, il suffit de multiplier par la quantité inverse.

Les différences et quotients de quantités géométriques s'indiqueront à l'aide des notations usitées pour les quantités algébriques. Ainsi la différence des deux quantités géométriques R_P, r_p, sera désignée par la notation

$$R_P - r_p,$$

et le rapport ou quotient qu'on obtient en divisant la première par la seconde, sera exprimé par la notation

$$\frac{R_P}{r_p}.$$

Lorsque, dans une somme ou différence de quantités géométriques, quelques-unes s'évanouiront, on pourra se dispenser de les écrire. Donc, la somme et la différence des quantités géométriques o et r_p pourront être représentées simplement par $+r_p$ et $-r_p$; et l'on aura, eu égard au premier théorème

$$+r_p = r_p, \qquad -r_p = r_{p+\pi}.$$

Si dans la dernière des deux formules précédentes on pose $p = 0$, elle donnera

$$r_\pi = -r_0 = -r.$$

Soit maintenant ρ_ϖ la racine $n^{\text{ième}}$ de r_p : l'équation

$$\rho_\varpi^n = r_p \tag{1}$$

donnera

$$(\rho^n)_{n\varpi} = r_p,$$

et par suite [voir le § 1$^{\text{er}}$]

$$\rho^n = r, \qquad n\varpi = p + 2k\pi, \tag{2}$$

k désignant une quantité entière, positive, nulle ou négative;

puis on en conclura

$$\rho' = r^{\frac{1}{n}}, \qquad \varpi = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \tag{3}$$

$$\rho_\varpi = (r^{\frac{1}{n}})_{\frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}}. \tag{4}$$

En vertu de la seconde des formules (3), l'angle polaire

$$P = \frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

pourra être un terme quelconque de la progression arithmétique dont la raison serait $\frac{2\pi}{n}$, l'un des termes étant $\frac{p}{n}$. Il en résulte qu'une même quantité géométrique r_p offrira n racines du degré n, toutes comprises dans la formule

$$(r^{\frac{1}{n}})_{\frac{p}{n} + \frac{2k\pi}{n}}, \tag{5}$$

et représentées par des rayons vecteurs égaux, menés du pôle à n points qui diviseront une même circonférence en parties égales. Ajoutons que, l'expression (5) reprenant exactement la même valeur, lorsqu'on fait croître ou décroître le rapport $\frac{k}{n}$ d'une ou de plusieurs unités, par conséquent, lorsqu'on fait croître ou décroître k de n ou d'un multiple de n, il suffira, pour obtenir les diverses valeurs de cette expression, de prendre successivement pour k les divers termes de la suite :

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots \qquad n - 1. \tag{6}$$

Si p se réduit à zéro, et r à l'unité, on aura simplement

$$r_p = 1_0 = 1.$$

Alors les diverses valeurs de l'expression (5), réduites à la

forme

$$(7) \qquad \mathrm{I}_{\frac{2k\pi}{n}},$$

ne seront autre chose que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, représentées par les divers termes de la suite :

$$(8) \qquad \mathrm{I}_0 = 1, \qquad \mathrm{I}_{\frac{2\pi}{n}}, \qquad \mathrm{I}_{\frac{4\pi}{n}}, \quad \cdots \qquad \mathrm{I}_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Il est bon d'observer que, parmi ces termes, deux au plus se réduiront à des quantités algébriques, savoir : le premier terme $\mathrm{I}_0 = 1$, et, quand n sera pair, le terme $\mathrm{I}_\pi = -1$, que l'on obtiendra en posant $k = \frac{n}{2}$. De plus, comme on aura

$$\frac{2(n-1)\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}, \qquad \frac{2(n-2)\pi}{n} = 2\pi - \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{I}_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \mathrm{I}_{-\frac{2\pi}{n}}, \qquad \mathrm{I}_{\frac{2(n-2)\pi}{n}} = \mathrm{I}_{-\frac{4\pi}{n}}, \quad \cdots$$

il est clair que les diverses racines de l'unité pourront être représentées non-seulement par les divers termes de la suite (8), mais encore, si n est impair, par les termes de la suite :

$$(9) \quad \mathrm{I}_{-\frac{(n-1)\pi}{n}}, \cdots \mathrm{I}_{-\frac{4\pi}{n}}, \quad \mathrm{I}_{-\frac{2\pi}{n}}, \quad 1, \quad \mathrm{I}_{\frac{2\pi}{n}}, \quad \mathrm{I}_{\frac{4\pi}{n}}, \cdots \mathrm{I}_{\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

et, si n est pair, par les termes de la suite :

$$(10) \quad \mathrm{I}_{-\frac{(n-2)\pi}{n}}, \cdots \mathrm{I}_{-\frac{4\pi}{n}}, \quad \mathrm{I}_{-\frac{2\pi}{n}}, \quad 1, \quad \mathrm{I}_{\frac{2\pi}{n}}, \quad \mathrm{I}_{\frac{4\pi}{n}}, \cdots \mathrm{I}_{\frac{(n-2)\pi}{n}}, \quad -1.$$

Si, par exemple, on attribue successivement à n les valeurs

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ \ldots$$

on trouvera pour *racines carrées* de l'unité les deux quantités

algébriques

$$-1, \qquad +1;$$

pour *racines cubiques* de l'unité, la seule quantité algébrique 2, et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{2\pi}{3}}, \qquad 1_{\frac{2\pi}{3}};$$

pour *racines quatrièmes* de l'unité, les deux quantités algébriques $1, -1$, et les deux quantités géométriques

$$1_{-\frac{\pi}{2}}, \qquad 1_{\frac{\pi}{2}},$$

liées entre elles par la formule

$$1_{-\frac{\pi}{2}} = -1_{\frac{\pi}{2}},$$

etc....

Si, dans l'expression (5), on posait $k = 0$, cette expression, réduite à

$$(r^{\frac{1}{n}})_{\frac{p}{n}},$$

représenterait une seule des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p. Or, il suffira de multiplier celle-ci par l'une des valeurs de $1_{\frac{2k\pi}{n}}$, c'est-à-dire, par l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, pour reproduire l'expression (5), propre à représenter l'une quelconque des racines $n^{\text{ièmes}}$ de r_p, attendu que l'on aura généralement

$$(r^{\frac{1}{n}})_{\frac{p}{n}+\frac{2k\pi}{n}} = (r^{\frac{1}{n}})_{\frac{p}{n}} \, 1_{\frac{2k\pi}{n}}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Troisième théorème. Pour obtenir les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ d'une quantité géométrique, il suffit de multiplier successivement l'une quelconque d'entre elles par les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

§ 4. *Fonctions entières. Équations algébriques.*

Nous appellerons *fonction entière* d'une quantité géométrique, une somme de termes proportionnels à des puissances entières et positives de cette quantité. Le degré de la puissance la plus élevée sera le *degré* de la fonction. Cela posé, si l'on désigne par z une quantité géométrique variable, et par Z une fonction de z entière et du degré n, la forme générale de la fonction Z sera

$$(1) \qquad Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n,$$

a, b, c,... g, h désignant des coefficients constants, dont chacun pourra être une quantité géométrique. Ajoutons que l'on pourra encore écrire l'équation (1) comme il suit :

$$(2) \quad Z = z^n(h + gz^{-1} + \ldots + cz^{-n+2} + bz^{-n+1} + az^{-n}).$$

Si n se réduisait à zéro, la fonction entière Z se réduirait à la constante a. Dans toute autre hypothèse, la fonction Z sera variable avec z, et son module deviendra infini avec le module de z. En effet, posons

$$z = r_p, \qquad Z = R_p ;$$

soit de plus h le module de la constante h, et concevons que le module r de z vienne à croître indéfiniment ; on verra décroître indéfiniment les modules de z^{-1}, z^{-2},... z^{-n}, et par suite le polynôme

$$h + gz^{-1} + \ldots + az^{-n}$$

s'approchera indéfiniment de la limite h. Donc, pour de très-grandes valeurs de r, le module de ce polynôme différera très-peu du module h de la constante h, et le module R de Z, eu égard à la formule (2), différera très-peu du module de hz^n, c'est-à-dire, du produit

$$hr^n.$$

Donc le module R de Z deviendra infiniment grand avec le module r de z; et *à une valeur finie du module R de la fonction Z ne pourra jamais correspondre qu'une valeur finie du module r de la variable Z.*

Concevons maintenant que l'on attribue à la variable z une valeur finie, puis à cette valeur finie un accroissement

$$\zeta = \rho_{\varpi},$$

dont le module ρ soit très-petit; et en désignant cet accroissement par Δz, nommons ΔZ l'accroissement correspondant de la fonction Z. Pour obtenir $Z + \Delta Z$, il suffira de remplacer z par $z + \zeta$ dans le second membre de l'équation (1), où chaque terme pourra être développé, à l'aide de la formule du binôme, en une suite ordonnée selon les puissances entières et ascendantes de ζ. En opérant ainsi, et réunissant les termes semblables, on obtiendra le développement de $Z + \Delta Z$ en une suite de termes proportionnels aux puissances entières de ζ, d'un degré inférieur ou égal à n. Si de cette suite on retranche la fonction Z représentée par le terme indépendant de ζ, on obtiendra un reste qui sera divisible algébriquement par ζ, et qui représentera le développement de ΔZ. Nommons ζ^m la plus petite des puissances de ζ, comprises dans ce développement. Le quotient, que produira la division de ΔZ par ζ^m, sera une fonction entière de ζ qui se réduira, pour une valeur nulle de ζ, à une limite finie et différente de zéro. Soient $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ ce quotient, et $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$ la limite dont il s'agit. On aura, non-seulement

$$\zeta^m = (\rho^m)_{m\varpi},$$

mais encore

$$\Delta Z = \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}\zeta^m = (\mathfrak{R}_{\rho^m})_{\mathfrak{p}+m\varpi},$$

et pour des valeurs décroissantes de ρ l'argument $\mathfrak{P} + m\varpi$ de ΔZ convergera vers la limite $\mathfrak{P} + m\varpi$. Cela posé, nommons A et B les extrémités de deux rayons vecteurs qui, partant du pôle O, soient représentés en grandeur et en direction par les deux quantités géométriques

$$Z, \qquad Z + \Delta Z.$$

La longueur AB représentée géométriquement par ΔZ, et numériquement par le module $\mathfrak{R}\rho^m$, se mesurera dans une direction qui formera l'angle $\mathfrak{P} + m\varpi$ avec l'axe polaire. Si d'ailleurs on fait croître le module ρ à partir de zéro, le point B, d'abord appliqué sur le point A, décrira un arc dont la droite AB sera la corde ; et la tangente menée à cet arc, par le point A, formera, avec l'axe polaire, un angle égal, non plus à la somme $\mathfrak{P} + m\varpi$, mais à sa limite $\mathfrak{P} + m\varpi$. Or, évidemment la distance OB sera plus petite que la distance OA, si le point B est intérieur à la circonférence de cercle décrite du pôle O comme centre avec le rayon OA ; et l'on peut ajouter que cette dernière condition sera certainement remplie, pour de très-petites valeurs du module ρ, si la tangente menée par le point A à l'arc AB forme un angle obtus avec le prolongement du rayon OA, ou, en d'autres termes, si l'angle polaire Π, déterminé par la formule

$$\Pi = \mathfrak{P} + m\varpi - \mathrm{P}, \tag{3}$$

offre un cosinus négatif ; ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a $\Pi = \pi$. Mais, après avoir choisi arbitrairement pour Π un angle dont le cosinus soit négatif, on pourra toujours satisfaire à l'équation (3), en attribuant à ϖ une valeur convenable, puisque, pour y parvenir, il suffira de prendre

$$\varpi = \frac{\Pi + \mathrm{P} - \mathfrak{P}}{m}. \tag{4}$$

Donc, en définitive, si le module R de Z, correspondant à une valeur finie de la variable z, n'est pas nul, on pourra modifier cette valeur de manière à faire décroître le module R. En conséquence, la plus petite valeur que pourra prendre le module R ne pourra différer de zéro. Mais quand R s'évanouira, la valeur de z, d'après ce qui a été dit plus haut, devra rester finie, et, puisque une telle valeur vérifiera l'équation

$$Z = 0,$$

on pourra énoncer la proposition suivante.

Premier théorème. Soient z une quantité géométrique variable, et Z une fonction entière de z. On pourra toujours satisfaire, par une ou plusieurs valeurs finies de z à l'équation

$$Z = 0. \tag{5}$$

Une valeur finie de z, qui vérifie l'équation (5), est ce qu'on nomme une *racine* de cette équation. Soit z' une telle racine, la fonction Z s'évanouira avec la différence $z - z'$; et si le degré n de cette fonction surpasse l'unité, elle sera le produit de $z - z'$ pour une autre fonction entière qui devra s'évanouir à son tour pour une nouvelle valeur z'' de z, et sera en conséquence divisible par $z - z''$. En continuant ainsi, on finira par établir la proposition suivante :

Deuxième théorème. Soit z une quantité géométrique variable, et

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de z du degré n. L'équation

$$Z = 0$$

admettra n racines; et si l'on nomme

$$z', \quad z'', \ldots \quad z^{(n)}$$

ces mêmes racines, on aura identiquement, quel que soit z,

(6) $$Z = h(z - z')(z - z'')\ldots(z - z^{(n)}),$$

en sorte que la fonction z sera le produit de la constante h par les facteurs linéaires

$$z - z', \qquad z - z'', \ldots \qquad z - z^{(n)}.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'équation (5) se vérifie, le terme hz^n de la fonction z équivaut à la somme de tous les autres, prise en signe contraire. Donc alors le module hr^n de ce terme doit être égal ou inférieur à la somme des modules de tous les autres; et si l'on nomme b, c, ... g, h les modules des coefficients b, c, ... g, h, on doit avoir :

(7) $$a + br + cr^2 + \ldots + gr^{n-1} - hr^n = \quad \text{ou} \quad > 0.$$

Or, cette dernière condition peut s'écrire comme il suit :

(8) $$\frac{a}{r^n} + \frac{b}{r^{n-1}} + \frac{c}{r^{n-2}} + \ldots + \frac{g}{r} - h = \quad \text{ou} \quad > 0.$$

D'ailleurs, le premier membre de la formule (8) varie, en décroissant, par degrés insensibles, et passe de la limite ∞ à la limite $-h$, tandis que r croît et varie par degrés insensibles en passant de zéro à l'infini. Donc ce premier membre s'évanouira pour une certaine valeur de r qui vérifiera l'équation

(9) $$a + br + cr^2 + \ldots + gr^{n-1} - hr^n = 0;$$

et si l'on nomme l la racine positive unique de l'équation (9), la condition (7) ou (8) donnera $r < l$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Troisième théorème. Les mêmes choses étant admises que dans le théorème 2, chacune des racines de l'équation proposée offrira un module inférieur à la racine positive unique de l'équation auxiliaire qu'on obtient lorsqu'on remplace dans la proposée chaque terme par son module, en affectant du signe — le terme qui renferme la plus haute puissance de l'inconnue, et tous les autres du signe +.

Lorsque dans la fonction entière z tous les termes s'évanouissent, à l'exception des termes extrêmes a et hz^n, la formule (5), réduite à l'*équation binôme*

(10) $$a + hz^n = 0,$$

donne

(11) $$z^n = -\frac{a}{h},$$

et ses diverses racines ne sont autres que les racines $n^{\text{ièmes}}$ du rapport $-\frac{a}{h}$.

§ 5. *Sur la résolution des équations algébriques.*

Considérons toujours une équation algébrique,

(1) $$Z = 0,$$

dont le premier membre

(2) $$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

soit une fonction entière de la variable

$$z = r_p,$$

les coefficients a, b, c, ... g, h pouvant être eux-mêmes des quantités géométriques. Comme on l'a prouvé dans le précédent paragraphe, cette équation admettra généralement n racines, c'est-à-dire que l'on pourra généralement assigner à z, n valeurs pour lesquelles la fonction Z s'évanouira. *Résoudre* l'équation, c'est déterminer ces racines, en commençant par l'une quelconque d'entre elles; et la condition à laquelle une méthode de résolution devra satisfaire, sera de fournir chaque racine avec telle approximation que l'on voudra. Or, le caractère d'une racine est de réduire à zéro la fonction Z avec son module R; et si des valeurs successives de z correspondent à des valeurs de R qui décroissent sans

cesse, en s'approchant indéfiniment de la limite zéro, ces valeurs de z formeront une série dont le terme général convergera vers une racine de l'équation (1). Donc, pour résoudre cette équation, il suffira de faire décroître indéfiniment le module R, et l'on pourra considérer comme appropriée à ce but toute méthode qui permettra de substituer à une valeur finie quelconque de z une autre valeur qui fournisse un module sensiblement plus petit de la fonction Z. D'ailleurs, si de ces deux valeurs de z la première n'est pas nulle, on pourra considérer la seconde comme composée de deux parties dont l'une serait précisément la première valeur de z, à laquelle s'ajouterait une valeur particulière d'une variable nouvelle qui aurait commencé par être nulle. Donc on peut admettre comme méthode de résolution tout procédé qui permet d'assigner à une variable z comprise dans une fonction entière Z, une valeur à laquelle corresponde un module R de Z sensiblement inférieur au module du terme constant a, qu'on obtient en posant dans cette fonction $z = 0$.

Cela posé, concevons que la valeur générale de Z étant donnée par l'équation (2), on considère d'abord le cas où le coefficient b de z diffère de zéro. Si la variable r passe d'une valeur nulle à une valeur très-peu différente de zéro, la fonction Z passera de la valeur a à une valeur peu différente de a, et représentée approximativement par le binôme

$$a + bz.$$

Si d'ailleurs le module de a est très-petit relativement au module de b, l'équation (1) offrira pour l'ordinaire une racine très-rapprochée de zéro, et cette racine se confondra sensiblement avec celle de l'équation binôme

$$a + bz = 0, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même, avec la quantité géométrique ρ_ϖ déterminée par la formule

$$\rho_\varpi = -\frac{a}{h}. \tag{4}$$

On pourra donc alors prendre ordinairement la quantité ρ_ϖ pour *valeur approchée* de l'une des racines de l'équation (1), et c'est en cela que consiste la *méthode d'approximation linéaire* ou *newtonienne*. Toutefois, la valeur ρ_ϖ attribuée à la variable z ne pourra être admise comme valeur approchée d'une racine qu'autant qu'elle fournira un module R de Z inférieur au module de a.

Si, en posant

$$z = \rho_\varpi \tag{5}$$

on obtient un module de Z supérieur au module de a, on pourra substituer à la valeur précédente de z une autre valeur de la forme

$$z = r_\varpi, \tag{6}$$

r étant inférieur à ρ, et convenablement choisi. Effectivement, soient

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ldots \qquad \mathrm{g},\ \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\ b,\ c,\ldots \qquad g,\ h.$$

Le module de

$$a + bz,$$

qui se réduisait à

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}\rho = \mathrm{o}$$

lorsqu'on prenait $z = \rho_\varpi$, deviendra

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r > \mathrm{o}, \tag{7}$$

lorsqu'on posera $z = r_\varpi$; alors aussi le module de la somme

$$cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera, en vertu du deuxième théorème du § II, égal ou inférieur à la quantité positive

$$cr^2 + \ldots + gr^{n-1} + hr^n,$$

et par suite le module du polynôme

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

sera égal ou inférieur à la quantité positive

$$a - br + cr^2 + \ldots + gr^{n-1} + hr^n,$$

ou, ce qui revient au même, à la différence

$$(8) \qquad a - r(b - cr - \ldots - gr^{n-2} - hr^{n-1}).$$

Donc, le module R de Z sera inférieur au module a de la constante a, si l'on détermine z à l'aide de l'équation (6), en assujettissant le module r à vérifier, non-seulement la condition (7), mais encore la suivante

$$(9) \qquad b - cr - \ldots - gr^{n-2} - hr^{n-1} > 0.$$

D'ailleurs, si l'on nomme r la racine positive unique de l'équation

$$(10) \qquad b - cr - \ldots - gr^{n-2} - hr^{n-1} = 0,$$

il suffira, pour satisfaire simultanément aux conditions (7) et (9), que le module r devienne inférieur au plus petit des deux nombres ρ et r. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

Premier théorème. Soient

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, et

$$a, b, c, \ldots \qquad g, h$$

les modules des coefficients

$$a, b, c, \ldots \qquad g, h.$$

Supposons, d'ailleurs, que les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ la racine de l'équation binôme

$$a + bz = 0,$$

et r la racine positive unique de l'équation

$$b - cr - \ldots - gr^{n-2} - hr^{n-1} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module

de son premier terme a, il suffira de poser $p = \varpi$, et d'attribuer au module r de z une valeur inférieure au plus petit des deux nombres ρ,r.

Nous avons ici supposé que, dans la fonction Z, le coefficient de z ne se réduisait pas à zéro. Mais ce coefficient et d'autres encore pourraient s'évanouir. Admettons cette hypothèse, ou, ce qui revient au même, supposons la fonction Z déterminée, non plus par l'équation (2), mais par une équation de la forme

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n, \tag{11}$$

les nombres $l, m, \ldots n$ formant une suite croissante. Alors, si le module de a était très-petit relativement au module de b, on pourrait, dans une première approximation, réduire pour l'ordinaire l'équation algébrique

$$Z = 0$$

à l'équation binôme

$$a + bz^l = 0. \tag{12}$$

De plus, en raisonnant comme ci-dessus, on établirait à la place du théorème premier, la proposition suivante.

Deuxième théorème. Soit

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n,$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, et

$$\text{a, b, c,}\ldots\ \text{h}$$

les modules des coefficients

$$a, b, c, \ldots h.$$

Supposons d'ailleurs que les nombres $l, m, \ldots n$ forment une suite croissante, et que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ l'une quelconque des racines de l'équation binôme

$$a + bz^l = 0, \tag{12}$$

et r la racine positive unique de l'équation

(13) $$\mathrm{b} - cr^{m-l} - \ldots - \mathrm{h}r^{n-l} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de poser $p = \varpi$, et d'attribuer au module r de z une valeur inférieure au plus petit des deux nombres ρ, r.

En s'appuyant sur les théorèmes 1 et 2, on pourra, d'une valeur nulle de z, déduire une série d'autres valeurs auxquelles correspondront des valeurs sans cesse décroissantes du module R de la fonction Z. Si ces valeurs décroissantes de R s'approchent indéfiniment de zéro, les valeurs correspondantes de z convergeront vers une limite qui sera certainement une racine de l'équation (1). Mais il peut arriver aussi que les valeurs de R successivement obtenues décroissent sans s'approcher indéfiniment de zéro. C'est ce que l'on reconnaîtra sans peine en essayant d'appliquer les théorèmes énoncés à la résolution d'équations très-simples, par exemple, d'équations de second degré.

En effet, considérons le cas où Z, étant du second degré, l'on aurait

(14) $$Z = a + bz + cz^2.$$

Supposons d'ailleurs que a, b, c étant les modules de a, b, c, on ait

$$a = \mathrm{a}, \qquad b = -\mathrm{b}, \qquad c = \mathrm{c}.$$

La valeur de Z deviendra

(15) $$Z = \mathrm{a} - \mathrm{b}z + \mathrm{c}z^2;$$

et les racines ρ_ϖ, r des équations

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}z = 0, \qquad \mathrm{b} - cr = 0$$

seront

$$\rho_\varpi = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \qquad \mathrm{r} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}},$$

de sorte qu'on aura encore

$$\rho = \frac{a}{b}, \qquad I_{\varpi} = 1.$$

Si d'ailleurs ρ est supérieur à r, ou, ce qui revient au même, si l'on a

(16) $$ac - b^2 > 0,$$

alors, pour obtenir un module de Z inférieur au module a, il suffira, en vertu du théorème 1er, de poser

(17) $$z = \theta r,$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, mais qui pourra varier arbitrairement entre les limites 0, 1 ; et comme en posant

(18) $$z = \theta r + \zeta,$$

on trouvera

(19) $$Z = a' - b'\zeta + c\zeta^2,$$

les valeurs de a', b' étant

(20) $$a' = a - \theta(1 - \theta)br, \qquad b' = (1 - 2\theta)b ;$$

il est clair qu'à la valeur zéro de ζ, ou, ce qui revient au même, à la valeur θr de z correspondra un module de Z, inférieur au module a, et représenté par a'. Il y a plus, comme des formules (20), jointes à la condition (16), on tirera

(21) $$a'c - b'^2 > 0.$$

il suffira d'appliquer le théorème 1er à la valeur générale de Z, que détermine, non plus l'équation (15), mais l'équation transformée (19), pour démontrer que le module de Z décroîtra encore si la nouvelle variable ζ passe de la valeur zéro à la valeur

$$\theta \frac{b'}{c} = \theta\Theta r,$$

Θ étant déterminé par la formule

$$\Theta = 1 - 2\theta,$$

ou, ce qui revient au même, si la variable z passe de la valeur θr à la valeur $\theta r(1+\Theta)$. En continuant ainsi, on reconnaîtra que, pour obtenir des valeurs décroissantes du module de Z, il suffit de prendre pour valeurs successives de z les divers termes de la suite

$$(22) \qquad 0, \quad \theta r, \quad \theta r(1+\Theta), \quad \theta r(1+\Theta+\Theta^2), \quad \text{etc...}$$

Or, le terme général de cette suite converge vers la limite

$$\theta r(1+\Theta+\Theta^2+\ldots) = \frac{\theta}{1-\Theta} r = \frac{1}{2} r,$$

et comme en supposant remplie la condition (16) on trouve, pour $z = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}\frac{b}{c}$

$$Z = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} > \frac{3}{4} a,$$

il est clair que dans cette hypothèse la limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) ne peut être une racine de l'équation du second degré

$$(23) \qquad a - bz + cz^2 = 0.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en formant la série des valeurs décroissantes du module R de Z, qui correspondraient aux valeurs successives de la variable z, et l'on reconnaîtrait ainsi que le terme général de cette nouvelle série, au lieu de s'approcher indéfiniment de zéro, converge vers la limite

$$a - (1-\theta) rb(1+\Theta'+\Theta'^2+\ldots) = a - \frac{\theta(1-\theta)}{1-\Theta'} br = a - \frac{1}{4} br,$$

par conséquent vers la limite

$$a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c},$$

supérieure à $\frac{3}{4} a$.

La limite vers laquelle converge le terme général de la série (22) n'étant pas une racine de l'équation (21), on pourrait

être tenté de regarder le calcul de cette limite comme inutile à la résolution de cette équation. Mais cette opinion serait une erreur ; car si l'on décompose la variable z en deux parties, dont la première soit la limite trouvée, ou, en d'autres termes, si l'on pose

$$z = \frac{1}{2} r + \zeta,$$

il suffira de substituer à la variable z la nouvelle variable ζ, pour réduire l'équation (23) à l'équation binôme

$$a' + c\zeta^2 = 0, \tag{24}$$

la valeur de a' étant

$$a' = a - \frac{1}{4}\frac{b^2}{c}.$$

D'ailleurs, les deux racines de l'équation (24) ne sont autres que les deux racines carrées du rapport $-\frac{a'}{c}$.

Généralement, si au lieu d'une équation du second degré, on considère une équation de degré quelconque, la série des valeurs de z, successivement déduites des règles que nous avons énoncées, et correspondantes à des valeurs décroissantes du module R de Z, pourra converger vers une limite qui, n'étant pas une racine de l'équation donnée, ne fasse pas évanouir le module R. Mais alors il suffira d'attribuer à cette limite un accroissement représenté par une nouvelle variable ζ ; puis de substituer ζ à z, pour obtenir, à la place de l'équation donnée, une équation transformée, de laquelle on pourra déduire, par l'application des mêmes règles, une nouvelle série de valeurs de ζ, et par conséquent une nouvelle série de valeurs de z, correspondantes à de nouvelles valeurs décroissantes du module R.

En continuant de la sorte, c'est-à-dire, en déduisant, s'il

est nécessaire, des règles énoncées plusieurs séries de valeurs de z, en déterminant d'ailleurs avec une approximation suffisante les limites vers lesquelles convergent les termes généraux de ces séries, et en transformant l'équation donnée par l'introduction de variables nouvelles qui, ajoutées à ces limites, reproduisent la variable z, on pourra, non-seulement diminuer sans cesse, mais encore rapprocher indéfiniment de zéro le module R; par conséquent on finira par résoudre l'équation donnée avec une approximation aussi grande que l'on voudra. Il y a plus : cette méthode de résolution peut encore servir à démontrer l'existence des racines. Lorsqu'on veut l'employer à cet usage, il n'est pas absolument nécessaire de considérer les équations auxiliaires (9) et (10), ou (12) et (13); il suffit d'observer que l'on satisfait aux conditions requises, par exemple, aux conditions (7) et (9), en attribuant au module r de z une valeur infiniment petite; et l'on se trouve ainsi ramené au théorème 1^er^ du § IV, par une démonstration qui est précisément celle qu'en a donnée M. Argand dans un article que renferme le IV^e^ volume des *Annales* de M. Gergonne, page 133 et suivantes(1). C'est encore à cette démonstration que se réduit celle que M. Legendre a proposée pour le même théorème dans la seconde édition de la *Théorie des nombres*. D'ailleurs, M. Legendre observe qu'en diminuant continuellement le module d'une fonction entière par des opérations semblables, répétées con-

(1) J'ai en ce moment sous les yeux un exemplaire de l'ouvrage dont cet article offre le résumé. Cet ouvrage, qui a pour titre *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, porte la date de 1806. Le nom de l'auteur, *Robert Argand, de Genève*, est écrit à la main.

venablement, on parviendra en définitive à une valeur de ce module aussi petite que l'on voudra ; il présente en conséquence ce décroissement graduel comme méthode de résolution pour les équations algébriques, et surtout comme propre à fournir une première valeur approchée d'une racine d'une telle équation. Mais le moyen qu'il propose pour conduire le calculateur à ce but laisse beaucoup à désirer, et consiste à faire décroître le module de la fonction entière Z, en attribuant à la variable z une valeur égale au produit d'un coefficient très-petit par la racine de l'équation (3), ou par une racine de l'équation (12). Du reste, il n'explique pas comment on doit s'y prendre pour obtenir un coefficient d'une petitesse telle que le module de Z décroisse effectivement, et ne parle pas de l'équation (10) ou (13) qui permet de répondre à cette question. Ajoutons que, même en ayant égard à l'équation (10) ou (13), et en suivant la méthode ci-dessus tracée, on peut être exposé à un travail long et pénible, si l'on n'a pas soin de choisir convenablement les quantités que la méthode laisse indéterminées; par exemple, le nombre désigné par θ dans la formule (18). Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (23) se réduise à la suivante:

$$2 - z + z^2 = 0.$$

Alors, le rapport $\frac{b}{c}$ ou r étant réduit à l'unité, le $n^{\text{ième}}$ terme de la série (22) sera

$$\theta(1 + \Theta + \Theta^2 + \ldots \Theta^{n-2}) = \theta \frac{1 - \Theta^{n-1}}{1 - \Theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta^{n-1},$$

et convergera, pour des valeurs croissantes de n, vers la limite $\frac{1}{2}$. Mais il s'approchera très-lentement de cette limite, si l'on attribue au nombre θ une valeur peu différente de

zéro, à laquelle correspondra une valeur de Θ peu différente de l'unité. Donc alors on devra prolonger fort loin la série (22), avant d'obtenir un terme sensiblement égal à cette limite; et l'on peut ajouter que les valeurs de R correspondantes aux valeurs successives de z décroîtront très-lentement. A la vérité, dans le cas présent, on peut déterminer directement la limite cherchée. Mais il n'en sera plus de même quand l'équation donnée sera d'un degré supérieur au second; et généralement le calcul des valeurs successives de z deviendra pénible, si le module R décroît très-lentement tandis que l'on passe d'une valeur de z à la suivante : ce qui obligera le calculateur d'effectuer une longue suite d'opérations avant que ce module devienne sensiblement nul.

On évitera ces inconvénients, ou du moins on les atténuera notablement, si, en appliquant à une fonction entière Z le théorème 1 ou 2, on attribue à la variable z un module r qui, sans dépasser la plus petite des limites indiquées ρ et $\mathfrak{r}$, fasse décroître autant qu'il sera possible le module de Z. D'ailleurs, lorsque le coefficient de z dans Z étant différent de zéro, on attribue à la variable z, avec l'argument ϖ, un module égal et inférieur au plus petit des nombres ρ, $\mathfrak{r}$, le module de Z ne dépasse pas la somme (8), savoir :

$$\text{(8)} \qquad \mathfrak{a} - r(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}r - \ldots - \mathfrak{g}r^{n-2} - \mathfrak{h}r^{n-1}),$$

dont la valeur minimum, inférieure à $\mathfrak{a}$, correspond à la valeur maximum du produit

$$\text{(25)} \qquad r(\mathfrak{b} - \mathfrak{c}r - \ldots - \mathfrak{g}r^{n-2} - \mathfrak{h}r^{n-1}).$$

Enfin, le produit (25), dont les deux facteurs s'évanouissent, le premier quand on pose $r = 0$, le second quand on pose $r = \mathfrak{r}$, aura évidemment pour *maximum* une valeur positive

correspondante à une valeur ν de r, qui vérifiera la condition

$$\nu < \mathfrak{r}.$$

Donc, la quantité ν, inférieure à $\mathfrak{r}$, sera la valeur de r à laquelle correspondra la valeur *minimum* de la somme (8), que le module de Z ne dépassera point si l'on a $r < \rho$. On se trouvera donc naturellement conduit à substituer, dans le théorème 1^er^, ν à $\mathfrak{r}$; on pourra même réduire le module r de z à celle des deux quantités ρ, $\mathfrak{r}$ qui fournira le plus petit module de Z; et l'on obtiendra ainsi, pour la résolution des équations algébriques, la méthode nouvelle et très-simple qui fera l'objet du paragraphe suivant.

§ 6. *Méthode nouvelle pour la résolution des équations algébriques.*

Soit toujours

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable

$$z = r_p.$$

Comme on l'a expliqué dans le paragraphe 5, on pourra résoudre une équation algébrique quelconque à l'aide de tout procédé qui fournira pour le variable z une valeur à laquelle corresponde un module R de la fonction Z, sensiblement inférieur au module a du premier terme a.

Cela posé, considérons d'abord le cas où, la valeur de Z étant donnée par l'équation (1), le coefficient b de z diffère de zéro. Alors une méthode de résolution très-simple pourra évidemment se déduire du théorème que nous allons énoncer.

Premier théorème. Soient

(1) $$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, et

$$\mathrm{a, b, c, \ldots g, h}$$

les modules des coefficients

$$a, b, c, \ldots g, h.$$

Supposons d'ailleurs que, les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ la racine de l'équation binôme

(2) $$a + bz = 0,$$

et ν la valeur de r pour laquelle le produit

(3) $$r(\mathrm{b} - \mathrm{c}r - \ldots - \mathrm{g}r^{n-2} - \mathrm{h}r^{n-1})$$

devient un maximum, ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation

(4) $$\mathrm{b} - 2\mathrm{c}r - \ldots - (n-1)\mathrm{g}r^{n-2} - n\mathrm{h}r^{n-1} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de réduire ce module z à la plus petite des deux valeurs qu'il obtient quand on pose successivement :

$$z = \rho_\varpi, \qquad z = \iota_\varpi.$$

Démonstration. Lorsque, l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binôme $a + bz$ se réduit à la différence

$$\mathrm{a} - \mathrm{b}r;$$

par conséquent le module de Z ne surpasse pas la somme

(5) $$\mathrm{a} - \mathrm{b}r + \mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n.$$

D'autre part le produit (3), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur maximum, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à ι, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc pour $r =$ ou $< \nu$, on aura

(6) $$\mathrm{c}r^2 + \ldots + \mathrm{g}r^{n-1} + \mathrm{h}r^n > \mathrm{b}r.$$

Or, il résulte immédiatement de cette dernière formule que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, ι, la somme (5), et à plus forte raison le module R de Z, offriront des valeurs inférieures au module a. Donc le plus petit des modules de Z, correspondants aux valeurs ρ_ϖ, ι_ϖ de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (3) comme fonction de r, ce produit, qui croît toujours avec r quand on fait varier r entre les limites 0, ι, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r < \iota$, on aura toujours

$$b - 2cr - \ldots - (n-1)gr^{n-1} - nhr^{n-1} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$br - 2cr^2 - \ldots - (n-1)gr^{n-1} - nhr^n > 0;$$

puis on en conclura

$$(7)\quad br - cr^2 - \ldots - gr^{n-1} - hr^n > cr^2 + \ldots + (n-2)gr^{n-1} + (n-1)hr^n.$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraîne évidemment avec elle la condition (6), le module a surpassera la somme (5) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé par la formule

$$(8)\quad \alpha = cr^2 + \ldots + (n-2)gr^{n-1} + (n-1)hr^n.$$

Donc par suite le module R de Z deviendra inférieur à la différence $a - \alpha$, si l'on pose $z = r_\varpi$ en prenant pour r le plus petit des deux nombres, ρ, ι; et à plus forte raison si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z = \rho_\varpi$, $z = \iota_\varpi$.

Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients $c, \ldots g, h$, s'évanouissant tous simultanément, le polynôme Z se trouverait réduit au binôme $a + bz$. D'ailleurs dans ce cas particulier

l'équation algébrique $Z = 0$ se réduirait précisément à l'équation binôme $a + bz = 0$, dont la racine est $z = \rho_\varpi = -\frac{a}{b}$.

Considérons maintenant le cas où dans la fonction Z le coefficient de z s'évanouirait, ou, ce qui revient au même, supposons cette fonction déterminée, non plus par la formule (1), mais par une équation de la forme

$$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n.$$

Alors au théorème premier on pourra substituer la proposition suivante.

Deuxième théorème. Soient

(9) $$Z = a + bz^l + cz^m + \ldots + hz^n$$

une fonction entière de la variable $z = r_p$, et

$$\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ldots\ \mathrm{h}$$

les modules des coefficients

$$a,\ b,\ c,\ldots\ h.$$

Supposons d'ailleurs que les nombres l, m, $\ldots n$ forment une suite croissante, et que les coefficients a, b n'étant pas nuls, on nomme ρ_ϖ l'une quelconque des racines de l'équation binôme

(10) $$a + bz^l = 0.$$

Enfin, soit ν la valeur de r, pour laquelle le produit

(11) $$r^l(b - cr^{m-l} - \ldots - hr^{n-l})$$

devient un *maximum*, ou, ce qui revient au même, la racine positive unique de l'équation

(12) $$l\mathrm{b} - mcr^{m-l} - \ldots - n\mathrm{h}r^{n-l} = 0.$$

Pour rendre le module de la fonction Z inférieur au module de son premier terme a, il suffira de réduire ce module à la plus petite des deux valeurs qu'il obtient quand on pose successivement

$$z = \rho_\varpi, \qquad z = \nu_\varpi.$$

Démonstration. Lorsque l'argument de z étant égal à ϖ, le module de z est égal ou inférieur à ρ, le module du binôme $a+bz^l$ se réduit à la différence

$$a - br^l;$$

par conséquent le module de Z ne surpasse pas la somme

(13) $$a - br^l + cr^m + \ldots + hr^n.$$

D'autre part, le produit (11), qui croîtra en passant d'une valeur nulle à sa valeur *maximum*, tandis que r croîtra depuis zéro jusqu'à ν, sera toujours positif dans cet intervalle. Donc, pour $r =$ ou $< \nu$, on aura

(14) $$cr^m + \ldots + hr^n < br^l.$$

Or il résulte immédiatement de cette dernière formule, que, si l'on réduit le module r au plus petit des deux nombres ρ, ν, la somme (13), et à plus forte raison le module de Z, offriront des valeurs inférieures au module a. Donc le plus petit des modules de Z correspondants aux valeurs ρ_ϖ, ν_ϖ de z, sera certainement inférieur au module a.

Corollaire. Il est bon d'observer que, si l'on considère le produit (11) comme une fonction de r ce produit, qui croît toujours avec r quand on fait varier r entre les limites 0, ν, offrira dans cet intervalle une dérivée toujours positive. Donc, pour $r < \nu$, on aura toujours

(15) $$lbr^{l-1} - mcr^{m-1} - \ldots - nhr^{n-1} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$lbr^l - mcr^m - \ldots - nhr^n > 0;$$

puis on en conclura

(16) $$br^l - cr^m - \ldots - hr^n > \left(\frac{m}{l} - 1\right)cr^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right)hr^n.$$

Or, en vertu de cette dernière formule, qui entraîne évidemment avec elle la condition (14), le module a surpassera la

somme (13) d'une quantité supérieure au nombre α déterminé pour la formule

$$\alpha = \left(\frac{m}{l} - 1\right) cr^m + \ldots + \left(\frac{n}{l} - 1\right) hr^n. \tag{17}$$

Donc, par suite, le module R de Z deviendra inférieur à la quantité $a - \alpha$, si l'on pose $z = r_\varpi$, en prenant pour r le plus petit des deux nombres ρ, ν, et à plus forte raison si l'on réduit le module R à la plus petite des deux valeurs qu'il acquiert quand on pose successivement $z = \rho_\varpi$, $z = \nu_\varpi$. Ajoutons que le nombre α ne s'évanouira jamais, si ce n'est dans le cas particulier où, les coefficients $c, \ldots g, h$, s'évanouissant tous simultanément, le polynôme Z se trouverait réduit au binôme $a + bz^l$. D'ailleurs, dans ce cas particulier l'équation algébrique $Z = 0$ se réduirait précisément à l'équation binôme $a + bz^l = 0$, dont les racines se confondent avec les racines de degré l du rapport $-\frac{a}{b}$, l'une d'elles étant ρ_ϖ.

L'application du théorème 1 ou 2 aux fonctions entières, qui représentent les premiers membres d'une équation algébrique et de ses transformées successives, fournit, pour la résolution de cette équation, une méthode et des formules précises qui ne renferment plus de quantités indéterminées et arbitraires, analogues au nombre θ du paragraphe précédent. A la vérité, pour déduire cette méthode des principes exposés dans le paragraphe précédent, il suffit d'attribuer aux indéterminées dont il s'agit des valeurs spéciales, en prenant, par exemple, $\theta = \frac{1}{2}$. Mais comme ces valeurs spéciales sont précisément celles qui font décroître plus rapidement le module de la fonction entière donnée, ou du moins certains nombres que ce module ne dépasse point, elles

seront aussi généralement celles qui rendront les approximations plus rapides.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on applique la nouvelle méthode à la formule (23) du paragraphe 5, c'est-à-dire, à l'équation du second degré

$$a - bz + cz^2 = 0,$$

en supposant toujours

$$ac - b^2 > 0.$$

On trouvera

$$\rho_\varpi = \frac{a}{b}, \qquad v_\varpi = v = \frac{1}{2}\frac{b}{c}, \qquad \alpha = cv^2;$$

puis, en prenant

$$z = v + \zeta,$$

et faisant pour abréger $a' = a - \alpha$, on obtiendra immédiatement la transformée

$$a' + c\zeta^2 = 0,$$

dont les deux racines coïncident avec les racines carrées du rapport $-\frac{a'}{c}$. On retrouvera donc ainsi l'équation (24) du paragraphe 5; et ce qu'il importe de remarquer, on aura été conduit à cette équation, non plus par la recherche de la limite vers laquelle converge le terme général d'une série formée avec des valeurs successives de la variable z, mais par la détermination d'une seule valeur de cette même variable.

S'il arrivait que la fonction Z offrît, à la suite de son premier terme a, un ou plusieurs autres termes dont les coefficients fussent sensiblement nuls, on pourrait, en se servant du théorème 1 ou 2 pour déterminer un module de Z inférieur à celui de a, faire abstraction de ces mêmes termes, sauf à constater ensuite que le module trouvé de Z,

quand on a égard aux termes omis, reste inférieur au module de a. Cette remarque permet d'employer la nouvelle méthode à la résolution d'une équation numérique donnée, dans le cas même où l'application rigoureuse des théorèmes 1 et 2 aux premiers membres des transformées de cette équation ferait décroître très-lentement, après un certain nombre d'opérations, les modules de ces premiers membres.

On sait que l'on peut toujours ramener la résolution d'une équation algébrique au cas où cette équation n'offre pas de racines égales. D'ailleurs, lorsqu'à l'aide de la nouvelle méthode on sera parvenu à une valeur très-approchée ω d'une racine simple d'une équation algébrique,

$$Z = 0, \tag{18}$$

alors, en posant

$$z = \omega + \zeta, \tag{19}$$

on transformera Z en une fonction de ζ dans laquelle le terme constant sera sensiblement nul, tandis que le coefficient de ζ différera sensiblement de zéro. Quant au coefficient de ζ^n, il se réduira précisément au coefficient de z^n dans la fonction Z. Donc, dans l'hypothèse admise on trouvera

$$Z = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\zeta + \mathfrak{c}\zeta^2 + \ldots + \mathfrak{g}\zeta^{n-1} + \mathfrak{h}\zeta^n, \tag{20}$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{g}$ désignent de nouveaux coefficients dont le premier $\mathfrak{a}$ offrira un module très-petit, tandis que le module de $\mathfrak{b}$ différera sensiblement de zéro. Donc alors, en vertu du théorème 1^er^, il faudra, pour rendre le module de Z inférieur au module de $\mathfrak{a}$, poser

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\zeta = 0, \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta = -\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}; \tag{22}$$

et par suite la nouvelle valeur approchée de la racine simple, qui différait peu de ω, sera celle que détermine la formule

$$z = \omega - \frac{a}{b}. \tag{23}$$

Ainsi *la nouvelle méthode, appliquée à la résolution d'une équation algébrique, finira par coïncider après, un certain nombre d'opérations, avec la méthode linéaire ou newtonienne.*

DEUXIÈME NOTE. *Réduction des quantités géométriques à la forme* $x+iy$.

D'après ce qui a été dit dans la note précédente, l'unité a pour *racines quatrièmes* les deux quantités algébriques

$$-1, +1,$$

qui sont en même temps ses deux racines carrées, ou, ce qui revient au même, les racines de l'équation binôme $x^2 = 1$, et les deux quantités géométriques

$$-1_{\frac{\pi}{2}}, \quad 1_{\frac{\pi}{2}},$$

qui sont en même temps les racines carrées de -1, ou, ce qui revient au même, les racines de l'équation binôme $x^2 = -1$.

La dernière de ces racines, ou $1_{\frac{\pi}{2}}$, est précisément la quantité géométrique que l'on désigne par la lettre i. Cela posé, comme on aura

$$ir = 1_{\frac{\pi}{2}} r_0 = r_{\frac{\pi}{2}}, \quad -ir = 1_{-\frac{\pi}{2}} r_0 = r_{-\frac{\pi}{2}},$$

il est clair que les deux quantités géométriques ir, $-ir$ se mesureront sur une même droite perpendiculaire à l'axe polaire, mais en sens inverse.

Lorsque la quantité géométrique r_p a le pôle pour origine, son extrémité peut être censée avoir pour coordonnées polaires les quantités algébriques r, p, et pour coordonnées rectangulaires les quantités algébriques x, y, liées à r, p par les formules

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p. \tag{1}$$

Alors aussi, pour arriver à l'extrémité de la longueur r_p, il suffit de porter, à partir de l'extrémité de l'abscisse x, et sur une perpendiculaire à l'axe polaire pris pour axe des x, l'ordonnée y, représentée en grandeur et en direction par la quantité géométrique iy. En d'autres termes, la quantité géométrique r_p est la somme des quantités géométriques x, iy. On a donc

$$r_p = x + iy = r(\cos p + i \sin p); \tag{2}$$

puis, en posant $r = 1$,

$$1_p = \cos p + i \sin p. \tag{3}$$

On aura de même

$$1_{-p} = \cos p - i \sin p, \tag{4}$$

et par suite

$$\cos p = \frac{1_p + 1_{-p}}{2}, \quad \sin p = \frac{1_p - 1_{-p}}{2i}. \tag{5}$$

Si l'on désigne à l'aide de la seule lettre z la quantité géométrique r_p, l'équation (2) donnera

$$z = x + iy. \tag{6}$$

Ainsi *toute quantité géométrique z pourra être réduite à la forme $x + iy$*, x y étant deux quantités algébriques dont la première sera ce que nous appellerons la *partie algébrique* de z.

TROISIÈME NOTE. *Séries dont les termes généraux sont des quantités géométriques, fonctions diverses de ces quantités.*

Les règles établies pour la convergence des séries dans mon *Analyse algébrique*, peuvent être facilement étendues au cas où les termes généraux de ces séries sont des quantités géométriques.

Considérons, pour fixer les idées, une série de quantités géométriques

$$z^{(0)}, \quad z^{(1)}, \quad z^{(2)}, \ldots \quad z^{(n)}, \ldots$$

prolongée indéfiniment dans un seul sens. Le terme $z^{(n)}$ correspondant à l'indice n sera le *terme général* de cette série. Soit d'ailleurs

$$s^{(n)} = z^{(0)} + z^{(1)} + \ldots + z^{(n)}$$

la somme de n premiers termes. La série sera dite *convergente*, lorsque, pour des valeurs croissantes de n, la somme $s^{(n)}$ convergera vers une li-

mite fixe s; et alors cette limite s sera ce que nous appellerons la *somme* de la série. Dans le cas contraire, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme.

Soit maintenant $r^{(n)}$ le module du terme général $z^{(n)}$, et nommons ν la limite unique ou la plus grande des limites vers lesquelles converge, pour des valeurs croissantes de n, l'expression

$$\left[r^{(n)}\right]^{\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire la racine $n^{\text{ième}}$ du module de $z^{(n)}$. Le nombre ν sera ce que nous appellerons le *module* de la série proposée, et, par des raisonnements semblables à ceux dont j'ai fait usage dans mon *Analyse algébrique*, on établira sans peine la proportion suivante :

Premier théorème. Une série de quantités géométriques

$$z^{(0)},\quad z^{(1)},\quad z^{(2)},\ldots\quad z^{(n)},\ldots$$

prolongée indéfiniment dans un seul sens, est toujours convergente lorsque son module ν est inférieur à l'unité, toujours divergente lorsque le module ν surpasse l'unité.

Si le terme général $z^{(n)}$ est proportionnel à la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une certaine variable $z = r_p$, en sorte qu'on ait

$$z^{(n)} = a^{(n)} z^n,$$

le coefficient $a^{(n)}$ pouvant être une quantité géométrique, alors en nommant ρ le module de la série qui a pour terme général $a^{(n)}$, on trouvera

$$\nu = \rho r,$$

et l'on déduira immédiatement du théorème 1$^{\text{er}}$ la proposition suivante :

Deuxième théorème. La série

$$a^{(0)},\quad a^{(1)}z,\quad a^{(2)}z^{(2)},\ldots\quad a^{(n)}z^{(n)},\ldots$$

ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable z, est convergente ou divergente suivant que le module n de z est inférieur ou supérieur à $\frac{1}{\nu}$, ν désignant le module de la série

$$a^{(0)},\quad a^{(1)},\quad a^{(2)},\ldots\quad a^{(n)},\ldots$$

formée avec les coefficients des puissances successives de z.

Une quantité géométrique est dite *fonction* de plusieurs autres lorsqu'elle varie avec elles.

Dans la note première, nous avons déjà considéré diverses fonctions

de quantités géométriques, spécialement celles que fournissent l'addition ou la soustraction de ces quantités, leur multiplication ou leur division, et leur élévation à des puissances entières. La formation des séries convergentes dont les termes généraux renfermeraient une ou plusieurs quantités géométriques variables, fournira de nouvelles fonctions de ces quantités, et parmi ces fonctions on devra distinguer les sommes de séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une seule variable z.

Considérons en particulier la série

$$1, \quad \frac{z}{1}, \quad \frac{z^2}{1.2}, \ldots$$

qui a pour terme général $\frac{z^n}{1.2\ldots n}$, et qui ne cesse jamais d'être convergente. La somme de cette série sera représentée, si z est algébrique, par l'exponentielle de e^z, en sorte qu'on aura dans ce cas

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \text{etc...}, \tag{1}$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques ou népériens. D'ailleurs, pour que la formule (1) s'étende à tous les cas possibles, il suffira de concevoir que l'on se serve de cette formule, lors même que la variable z est une quantité géométrique, pour définir l'*exponentielle* e^z.

Ajoutons que, si l'on pose

$$a = e^{\alpha}, \tag{2}$$

α désignant une quantité algébrique quelconque, on pourra supposer l'*exponentielle* a^z généralement définie par la formule

$$a^z = e^{\alpha z}. \tag{3}$$

Ces conventions étant admises, on prouvera aisément que les propriétés connues des exponentielles subsistent pour des exposants quelconques, même quand ces exposants sont des quantités géométriques. D'ailleurs, les exponentielles e^z a^z étant définies par les formules (1) et (2), leur définition entraînera celle des *logarithmes* pris dans le système qui a pour base le nombre e ou a, c'est-à-dire des exposants qu'il faut attribuer à cette base, pour obtenir des quantités géométriques données.

Si, dans la formule (1), on réduit à zéro la partie algébrique de z; si l'on pose, par exemple, $z = ip$, p étant un angle quelconque, alors, en

ayant égard aux formules,

$$\cos p = 1 - \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^4}{1.2.3.4} - \ldots, \qquad \sin p = p - \frac{p^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on trouvera

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = 1_p.$$

On aura donc par suite

$$(4) \qquad e^{ip} = 1_p, \qquad e^{-ip} = 1_{-p},$$

et les formules (5) de la note 2e donneront

$$(5) \qquad \cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2}, \qquad \sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Si dans ces dernières formules on écrit z au lieu de p, on obtiendra les suivantes :

$$(6) \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

et pour que $\cos z$, $\sin z$, se trouvent définis dans tous les cas possibles, il suffira d'étendre les équations (6) au cas même où la lettre z désigne une quantité géométrique.

QUATRIÈME NOTE. *Fonctions continues de quantités géométriques. Différentielles de ces quantités et de ces fonctions.*

Soient

$$z = r_p \text{ et } Z = R_P,$$

deux quantités algébriques, mesurées dans un plan donné, à partir du pôle O, ou plus généralement à partir de deux points fixes pris pour origines, jusqu'à deux points mobiles A, B. Z sera une *fonction* de z, si le mouvement du point A détermine le mouvement du point B; et cette fonction sera *continue*, si à un mouvement infiniment petit du point A correspond toujours un mouvement infiniment petit du point B. Alors à un accroissement infiniment petit Δz de la variable z, correspondra toujours un accroissement infiniment petit ΔZ de la fonction elle-même. Si cette condition était remplie seulement entre certaines limites de la variable z, et pour certaines positions du point mobile A, par exemple, quand ce point serait compris entre deux lignes données, la fonction Z ne serait continue qu'entre ces limites.

Désignons maintenant par $f(z)$ la valeur de Z exprimée en fonction de z. Si l'on attribue à z un accroissement infiniment petit Δz, l'accroissement correspondant

$$\Delta Z = f(z + \Delta z) - f(z)$$

de la fonction $f(z)$ supposée continue sera lui-même infiniment petit. Mais le rapport

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

conservera généralement une valeur finie. Si d'ailleurs on fait converger Δz vers la limite zéro, il arrivera souvent que le rapport (1) convergera vers une limite unique et finie. Cette limite, que l'on nomme *la dérivée* de la fonction Z, s'indique à l'aide de la notation Z' ou $f'(z)$, ou bien encore à l'aide de la notation $D_z Z$ ou $D_z f(z)$. Si, tandis que Δz s'approche de zéro, le rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ ne s'approchait pas indéfiniment d'une limite unique et finie, la dérivée Z' ou $f'(z)$ devrait être censée acquérir une valeur infinie ou multiple ou indéterminée, savoir, une valeur infinie, si le module du rapport $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ croissait indéfiniment; une valeur multiple ou indéterminée, dans le cas contraire.

Les *différentielles* dz, dZ de la variable z et de la fonction Z ne sont autre chose que des quantités géométriques dont le rapport est précisément la limite du rapport entre les accroissements infiniment petits Δz, ΔZ. En conséquence, dZ est liée à dz par la formule

$$\frac{dZ}{dz} = D_z Z \quad \text{ou} \quad dZ = D_z Z dz, \tag{2}$$

dans laquelle la différentielle dz de la *variable indépendante* z reste arbitraire.

En général, les *différentielles* de plusieurs quantités géométriques ne sont autre chose que de nouvelles quantités géométriques, dont les rapports se réduisent aux limites des rapports entre les accroissements infiniment petits des premières.

CINQUIÈME NOTE. *Sur les relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies.*

Les équations (21), (23), (24) et (25) du § 2 sont du nombre de celles qu'on obtient en cherchant les relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies. Ces équations, qui prennent une forme très-simple quand on fait usage du signe $\mathcal{E}$, coïncident avec quelques-unes de celles que contient le premier volume des *Exercices de Mathématiques*, et sont toutes comprises dans une formule générale que renferme le Mémoire lithographié à Turin en 1831. Dans cette formule, qui se réduit à

$$\int_0^c f(z)\, D_s z\, ds = 2\pi i\, \mathcal{E}(f(z)), \tag{1}$$

z peut être censé représenter une quantité géométrique variable r_p, mesurée à partir du pôle O jusqu'à un point mobile A, s l'arc mesuré sur une courbe fermée LMN, entre une origine fixe C et le point mobile A, et c le périmètre entier de la courbe. On suppose d'ailleurs l'arc s mesuré dans un sens tel, que, cet arc venant à croître, son extrémité A ait autour d'un point fixe très-voisin, et situé à l'intérieur du contour LMN, un mouvement de rotation *direct*, c'est-à-dire, pareil au mouvement de rotation qu'indiquerait, pour le rayon mobile OA, une valeur croissante de l'angle polaire p. Enfin, on suppose que, pour toutes les valeurs de z auxquelles correspondent des points situés à l'intérieur de la courbe LMN, la fonction $f(z)$ et sa dérivée restent continues, quand elles ne deviennent pas infinies, et que, dans ce dernier cas, on peut trouver une puissance entière de Δz, qui, multipliée par $f(z+\Delta z)$, fournisse pour produit une fonction de Δz qui reste continue avec sa dérivée. Ajoutons que, dans le second membre de la formule (1), le résidu intégral indiqué par le signe $\mathcal{E}$ s'étend seulement à celles des racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0, \tag{2}$$

auxquelles correspondent des points situés à l'intérieur du contour LMN.

Il est bon d'observer que la formule (1) s'étend au cas même où à la courbe LMN on substituerait un contour fermé quelconque, par exemple, le contour d'un polygone dont les côtés seraient rectilignes ou curvi-

lignes. Alors l'intégrale que renferme le premier membre de l'équation (1) se trouverait remplacée par la somme de plusieurs intégrales correspondantes aux divers côtés du polygone.

SIXIÈME NOTE. *Sur l'analogie des puissances et des différences.*

Les formules du § 3 fournissent un moyen facile d'établir rigoureusement l'analogie des puissances et des différences, déjà signalée par divers auteurs, et spécialement par M. Brisson. D'ailleurs ces formules, et les applications qu'on peut en faire à l'intégration des équations différentielles ou aux dérivées partielles, ont été reproduites avec de nouveaux développements dans le second volume des *Exercices de Mathématiques*.

SEPTIÈME NOTE. *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients croissants.*

Les formules données dans le § 4, pour l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, peuvent être aisément réduites à celles que j'ai plus tard établies et démontrées fort simplement dans les *Exercices de Mathématiques*. Ainsi, par exemple, si l'on fait usage du signe $\mathcal{E}$, et si l'on a égard à l'équation (24) du § 2, la formule (48) du § 4, qui représente l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$\mathrm{F}(D_t)\, u = f(t), \tag{1}$$

pourra s'écrire comme il suit :

$$u = \mathcal{E}\left[\frac{\mathrm{F}(\theta)-\mathrm{F}(\mathrm{U})}{\theta-\mathrm{U}} - \int_0^t e^{\theta(t-\tau)}\, f(\tau)\, d\tau\right]\frac{1}{(\mathrm{F}(\theta))}, \tag{2}$$

les diverses puissances de U devant être remplacées, dans le développement de la fonction $\dfrac{\mathrm{F}(\theta)-\mathrm{F}(\mathrm{U})}{\theta-\mathrm{U}}$, par les quantités

$$u_0, u_1, \ldots u_{n-1},$$

qui expriment les valeurs particulières de

$$u, \mathrm{D}_t u, \ldots \mathrm{D}_t^{n-1} u$$

correspondantes à une valeur nulle de U.

HUITIÈME NOTE. *Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.*

Les formules qui sont renfermées dans les §§ 5, 6, 7, et qui se rapportent à l'intégration des équations linéaires sous des conditions données, ont été plus tard reproduites en partie, souvent démontrées d'une autre manière dans divers Mémoires, et spécialement dans celui qui a pour objet l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique. Parmi ces formules, il en est quelques-unes qui, au premier abord, peuvent laisser au lecteur des doutes sur la question de savoir si elles s'accordent entre elles. Il est bon d'éclaircir cette difficulté, et de prouver en particulier que les résultats obtenus dans le § 6 s'accordent avec ceux que l'on a déduits de la formule (20) du § 7. On y parviendra de la manière suivante :

Je commencerai par observer que, dans la formule (20) du § 7, le signe du second membre doit être choisi, non pas arbitrairement, mais de manière à ce que la valeur de Q soit positive, et qu'en conséquence Q représente, comme il est dit à la page 121, la valeur numérique de $\varphi'(\rho i)$ correspondante à une racine réelle de l'équation

$$\varphi(\rho i) = 1.$$

Il en résulte que si l'on pose

$$\varphi(\alpha) = e^{2a\alpha},$$

a étant positif, on aura $Q = 2a$, et que par suite l'équation (39) du § 7 entraînera la formule (43), entièrement semblable à la formule (131) du § 6.

Il reste à faire voir que l'équation (54) du § 7 s'accorde pareillement avec la formule (87) du § 6. Pour y parvenir, il suffit de prouver que, dans la formule (54) du § 7, la valeur de R peut être réduite à

$$(1) \qquad R = D_\rho [(AB + \rho^2) \sin a\rho - (B - A)\rho \cos a\rho],$$

ρ étant une quantité algébrique et en même temps une racine de l'équation

$$(2) \qquad (AB + \rho^2) \sin a\rho - (B - A)\rho \cos a\rho = 0,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

(3) $$(A-\rho i)(B+\rho i)\,e^{a\rho i}=(A+\rho i)(B-\rho i)\,e^{-a\rho i}.$$

Or, effectivement, la valeur de R que détermine l'équation (1) peut être présentée sous la forme

$$R=-\frac{1}{2}\int_0^a\left[(A-\rho i)\,e^{\rho\mu i}-(A+\rho i)\,e^{-\rho\mu i}\right]\left[(B-\rho i)\,e^{\rho(\mu-a)i}-(B+\rho i)\,e^{\rho(a-\mu)i}\right]d\mu,$$

et en vertu de la formule (3) elle peut être réduite à

(4) $$R=\frac{\psi(\rho i)}{A^2+\rho^2}\,\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{(A-\rho i)\,e^{\rho\mu i}-(A+\rho i)\,e^{-\rho\mu i}}{i}\right]^2 d\mu,$$

la valeur de $\psi(\alpha)$ étant

(5) $$\psi(\alpha)=(A-\alpha)(B+\alpha)\,e^{a\alpha}.$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (4), le rapport $\frac{2R}{\psi(\rho i)}$ sera évidemment positif, et par suite la formule (49) du § 7, dans laquelle Q désigne une quantité positive, devra être réduite à

(6) $$Q=\frac{2R}{\psi(\rho i)};$$

d'où l'on conclura que la valeur de $f(x)$ peut être censée déterminée par l'équation (54) du § 7, jointe à la formule (1).

ERRATA.

Page 140, ligne 20, *effacez* ou $-r_p$;
Page 143, ligne 5, au lieu de P écrivez ϖ.

RECHERCHES CHIMIQUES

SUR PLUSIEURS

OBJETS D'ARCHÉOLOGIE

TROUVÉS DANS LE DÉPARTEMENT DE LA VENDÉE,

PAR M. E. CHEVREUL,

Présentées à l'Académie des inscriptions et belles-lettres, le 29 décembre 1848, et à l'Académie des sciences, le 29 janvier 1849.

1. Si les sciences mathématiques sont utiles à la connaissance de l'antiquité, lorsqu'il s'agit de traiter des questions de chronologie, en appliquant à la détermination de certaines époques des observations de phénomènes célestes que l'histoire nous a transmises, les sciences physico-chimiques n'ont pas moins d'utilité quand il s'agit de connaître des objets d'arts anciens qui ont résisté à l'action destructive du temps; en effet, ce but ne peut être atteint qu'à la condition de les soumettre à l'expérience aidée de tous les moyens dont elle dispose aujourd'hui pour découvrir la nature des corps.

Dans un temps où l'on s'occupe avec tant d'ardeur du concours de toutes les lumières à la solution des questions

que l'esprit de l'homme élève sans cesse à cause de son besoin incessant de connaître, et à une époque où toutes les Académies de l'Institut ont senti la nécessité de resserrer davantage le lien qui les unit, j'ai pensé que les membres de l'Académie des inscriptions et belles-lettres recevraient sans etonnement la communication qu'un de leurs confrères de l'Académie des sciences leur ferait de ses recherches sur quelques objets d'archéologie, et qu'ils verraient dans cette communication une conséquence toute simple des discussions qui se sont élevées au sein de l'Institut, pour rendre plus fréquentes qu'elles ne l'ont été jusqu'ici les relations mutuelles des membres des diverses Académies; car en attendant que l'opinion soit fixée sur le genre de lectures le plus convenable à nos séances trimestrielles, il m'a semblé que si des recherches consacrées à des sujets propres à intéresser deux Académies manquaient du degré de généralité nécessaire à captiver l'attention des trois autres, elles ne seraient pas pour cela dépourvues d'utilité, lorsque leur auteur, en appliquant à son sujet une science spéciale, présenterait ses conclusions avec le degré de certitude que comporte l'espèce de critique essentielle à l'esprit de cette science au nom de laquelle il parle.

2. Les objets qui ont fait le sujet de mes recherches furent trouvés, en 1845 et 1846, dans le tombeau d'une femme artiste gallo-romaine, et dans une *villa* découverte à Saint-Médard-des-Prés, à un kilomètre de Fontenay, département de la Vendée, près de la rivière de ce nom. Un jeune magistrat, M. Benjamin Fillon, après les avoir décrits avec tout le zèle que donnent l'amour du pays et le goût de l'archéologie nationale, me les a adressés afin que, conformément au dé-

sir que lui en avait exprimé M. Letronne, j'en fisse le sujet d'un examen chimique.

CHAPITRE I.

EXAMEN DE MATIÈRES D'ORIGINE INORGANIQUE.

§ I.

Examen de quatre matières désignées par les nos 1, 2, 3 et 4, et essentiellement formées de trois oxydes métalliques.

3. Elles avaient subi originairement une division mécanique et une suspension dans l'eau; car elles présentaient, dans le plus grand nombre d'échantillons, des couches distinctes qui différaient même quelquefois par la couleur.

Des échantillons des mêmes matières paraissaient avoir été mis à l'état pâteux dans des cavités où ils s'étaient séchés. Comme elles, ils présentaient des couches superposées dont la couleur pouvait varier.

Ces matières n'étaient donc pas d'une matière homogène, et en les étendant sur du papier on reconnaissait qu'aucune ne le colorait d'une teinte franche. Les couleurs participaient du vert, de l'orangé et du gris : c'étaient, en définitive, des teintes verdâtres rabattues par du roux, et des teintes orangées rabattues par du gris.

Matière n° 1.

4. Elle était essentiellement formée de sous-carbonate de cuivre, de sous-carbonate de plomb et de peroxyde de fer; elle contenait une trace d'une matière organique et de chaux; et à l'état de mélange apparent, un peu de sable ferrugineux. En la chauffant au chalumeau dans la flamme désoxydante, le plomb était réduit et le peroxyde de fer se transformait en oxyde attirable à l'aimant. Quant au sous-carbonate de cuivre, une partie devenait noire, et une autre présentait des points verts.

La matière n° 1 laissait sur le papier une trace d'un jaune-vert grisâtre.

Matière n° 2.

5. Tout à fait analogue à la précédente, elle présentait à l'analyse, outre les sous-carbonates de cuivre et de plomb, et le peroxyde de fer, des traces de matière organique, d'oxyde d'étain et d'arsenic, j'ignore dans quel état.

Il y avait en outre un sable formé de silice, d'alumine et d'oxyde de fer.

Matière n° 3.

6. Même composition que la matière précédente; seulement une proportion plus forte de peroxyde de fer, aussi colorait-elle le papier en brun rougeâtre.

Matière n° 4.

7. Tout à fait semblable à la matière n° 3.

§ II.

Examen d'une matière n° 5, formée d'oxydes métalliques et de phosphate de fer.

8. Elle était d'un gris verdâtre pâle, avec des taches brunes superficielles. Quoiqu'elle contînt, comme les précédentes, des oxydes de plomb et de cuivre, probablement sous-carbonatés, avec une quantité notable de peroxyde de fer, matière principale des taches brunes superficielles, il y avait en outre une trace de matière organique et une quantité notable de phosphate de fer, et probablement de phosphate d'alumine. Enfin il y avait, à l'état de mélange, du sous-carbonate de chaux et un peu de sable alumino-ferrugineux.

§ III.

Examen d'une matière n° 6, formée essentiellement de quatre oxydes métalliques.

9. Cette matière, m'a-t-on dit, avait été retirée d'une fiole; nul doute qu'elle n'y eût été introduite à l'état pâteux, et qu'elle ne s'y fût séchée en une matière fort compacte dans certaines parties. On apercevait dans l'intérieur, mis à découvert par la cassure, des stries vertes et de petites taches blanches sur un fond brun.

L'eau bouillante en séparait une très-petite quantité de matière organique tenant un sel calcaire autre que le sulfate.

Chauffée dans un tube de verre, elle décrépitait en déga-

geant de la vapeur d'eau qui se condensait en gouttes plutôt alcalines qu'acides.

10. L'acide azotique la dissolvait avec effervescence produite par de l'acide carbonique pur. Il ne restait qu'un faible résidu retenant une matière organique, un sable formé de silice, d'alumine, de peroxyde de fer, avec une trace d'oxyde de manganèse et d'acide phosphorique. Mais le résultat remarquable de cette analyse, c'est que la solution azotique renfermait de l'oxyde de plomb, de l'oxyde de cuivre, de l'oxyde de fer, et une quantité considérable d'oxyde de zinc que l'on obtint parfaitement pur.

Il est probable que les oxydes de plomb et de cuivre étaient sous-carbonatés.

§ IV.

Examen d'une matière n° 7.

11. La matière que j'examine sous le n° 7 est une des plus intéressantes de celles qu'on a trouvées dans le tombeau de Saint-Médard-des-Prés ; car, comme nous le verrons, elle a été employée à faire le fond d'un fragment de peinture dont je parlerai, sous le rapport chimique, à la fin de ce mémoire.

Elle avait été trouvée dans un pot noir de terre en morceaux d'un vert grisâtre avec des taches rougeâtres. Une portion était assez compacte, tandis que l'autre cédait à la moindre pression des doigts, et en examinant le tout avec attention, à l'œil nu et à la loupe, on distinguait une matière

verdâtre d'avec une matière sableuse composée de grains de diverses couleurs.

J'employai tous les moyens possibles pour séparer les corps mélangés que l'examen précédent m'avait fait apercevoir. Je parvins à des résultats aussi satisfaisants qu'il était permis de l'espérer.

12. Après avoir séparé à la main les parties de la matière n° 7 qui me paraissaient différentes, et après les avoir pressées entre les doigts pour diviser autant que possible les parties friables, j'ai traité séparément chacune de ces parties par la lévigation dans l'eau pure ou par la lévigation dans l'eau fortement acidulée d'acide chlorhydrique. Dans ce dernier cas il y avait macération préalable dans l'acide, afin d'enlever tout ce qui était susceptible de se dissoudre.

13. J'ai soumis quelques parties de la matière n° 7 séparées mécaniquement à la main comparativement à ces deux traitements. Je divisais préalablement par moitié un même échantillon, et une moitié était soumise au lavage de l'eau pure, et l'autre moitié subissait une macération dans l'acide chlorhydrique, puis un lavage par décantation avec l'eau. Ce traitement était répété tant que l'acide chlorhydrique enlevait quelque chose à la matière.

Ce procédé m'a donné :

1° Des matières solubles dans l'eau pure;

2° Une matière verte dont la couleur n'était pas également intense ni également pure dans tous les échantillons;

3° Une matière bleue, des grains ou des lamelles jaunes, un sable quartzeux blanc.

1° *Matière soluble dans l'eau pure.*

14. Les matières n'étaient qu'en extrême petite quantité dans l'eau distillée qui avait servi à la lévigation de la matière n° 7 ; elles consistaient :

En sulfate de chaux,

En chlorure de sodium,

En matière organique dont la cendre laissa de la chaux et du peroxyde de fer.

2° *Matière verte.*

15. La matière verte a été obtenue par la séparation mécanique en deux états.

16. *Premier état.* Après avoir été lavée à l'eau, elle était verte.

L'acide chlorhydrique en séparait du peroxyde de fer, du deutoxyde de cuivre, et un peu d'oxyde de plomb, mais en très-petite quantité. Le résidu avait une couleur verte moins grise ou plus pure que la matière non traitée par l'acide. Je reconnus que la potasse en forte solution dans l'eau n'altérait pas cette couleur. En chauffant la matière dans un tube de verre, la couleur passait à la couleur de rouille; de l'eau se dégageait; ce changement est la conséquence de l'oxydation du protoxyde de fer.

L'analyse de cette matière calcinée par la potasse fondue m'apprit qu'elle ne contenait pas d'acide phosphorique, qu'elle était formée de silice, d'alumine, de peroxyde de fer, de magnésie, d'une trace de peroxyde de manganèse.

Une seconde analyse faite avec l'azotate de baryte dans le creuset d'argent, me fit découvrir une quantité notable de potasse et de soude.

Après ces essais il ne me fut plus possible de douter que la matière verte était de la *terre de Vérone*. Voici le résultat d'une analyse que je suis loin de considérer comme normale, parce que certainement le produit que j'analysai n'était pas pur; il y avait des parties sableuses et une trace de bleu égyptien :

Eau	8,34
Silice	56,40
Protoxyde de fer	19,90
Alumine	3,60
Potasse	6,08
Soude	2,43
Chaux	0,50
Magnésie	0,50
Deutoxyde de cuivre	0,40
	98,15
Perte	1,85
	100,00

Je n'ai pas fait l'analyse de la terre de Vérone pure; mais dans un échantillon que j'ai eu à ma disposition, j'ai reconnu, dans l'acide chlorhydrique qui avait macéré avec la poudre de cet échantillon, une trace de cuivre. L'acide ne paraissait pas d'ailleurs avoir attaqué le minéral à froid. On ne peut douter de la nature de la matière verte comme terre de Vérone, car M. Delesse, qui a publié une analyse de ce minéral, aussi pur que possible, l'a trouvé formé de :

Eau	6,67
Silice	51,25
Protoxyde de fer	20,72
Alumine	7,25
Protoxyde de manganèse	trace.
Potasse	6,21
Soude	1,92
Magnésie	5,98
	100,00

17. *Deuxième état.* La matière verte qui était dans le second état se trouvait mélangée à différents corps, tels que de la craie, un sable siliceux blanc très-fin, une matière bleue, une matière grise alumino-ferrugineuse, des oxydes de fer, de cuivre et de plomb, avec une trace de peroxyde de manganèse.

La craie n'était pas également répartie, car j'ai eu des échantillons qui faisaient une vive effervescence, tandis que d'autres n'en produisaient pas.

Lorsqu'on épuisait cette matière de tout ce qu'elle contenait de soluble dans l'acide chlorhydrique, qui dissolvait, outre la chaux quand il y en avait, du peroxyde de fer, des oxydes de cuivre et de plomb, on obtenait un résidu dans lequel on reconnaissait à la loupe, et même à l'œil nu, une matière bleue dont je vais parler, de la terre de Vérone et un sable fin quartzeux.

3. *Matière sableuse.*

18. Avec beaucoup de soin, mais toujours par des procédés mécaniques, je suis parvenu à isoler de cette matière les grains jaunes (13,3°).

Quoique je n'en aie eu qu'une quantité qui n'excédait pas $0^{gr},005$, j'ai parfaitement constaté qu'ils étaient formés de soufre et d'arsenic; ils consistaient donc en orpiment. Je l'ai sublimé, il est devenu rouge; je l'ai dissous dans l'acide azotique, et la solution introduite dans l'appareil de Marsh m'a donné l'arsenic métallique.

19. Après avoir isolé des grains de quartz de la matière séparée du sulfure d'arsenic, il est resté une matière quartzeuse blanche mêlée de *particules bleues*.

Ces parties bleues résistaient à l'acide chlorhydrique et à l'acide azotique; les ayant traitées par la potasse, j'ai constaté l'absence de l'acide phosphorique dans l'alcali, et la présence du cuivre et de la silice; en ayant traité une très-petite quantité par l'azotate de baryte, j'en ai retiré de la soude.

Ce résultat me fait penser que la matière bleue est identique avec le *bleu égyptien*.

§ V.

Examen d'un verre.

20. Parmi les différentes substances vitreuses que renfermait le tombeau de Saint-Médard des Prés, il y avait un échantillon fort différent des verres des bouteilles par sa transparence et sa propriété incolore. Cet échantillon contenait de l'oxyde de plomb; il appartenait donc au verre plombeux appelé cristal, et se distinguait par plus de densité et moins de dureté d'un ustensile de forme cylindrique façonné, dont une portion était creusée en canal: cet ustensile était de véritable cristal de roche.

§ VI.

Examen d'un alliage de cuivre et d'étain.

21. Parmi les objets remarquables du tombeau de Saint-Médard-des-Prés, il y avait un mortier et une boîte à couleur qui étaient, à en juger d'après l'aspect de la matière verdâtre de leur surface, de cuivre ou d'un alliage de ce métal. Les fragments de ces objets décapés apparurent avec la couleur et l'éclat du bronze, et une portion de paroi de la boîte attira mon attention par sa minceur moindre d'un millimètre, et par sa flexibilité et sa ténacité, car il fallut la ployer en sens contraires un grand nombre de fois pour la rompre.

22. L'analyse chimique démontra que l'alliage est du véritable bronze : car il laissa un résidu blanc insoluble dans l'acide azotique, qui était doué de toutes les propriétés du peroxyde d'étain. En effet, il fut réduit par le charbon en métal blanc ductile; et ce métal, dissous dans l'acide chlorhydrique, donna, avec le chlorure d'or, du pourpre de Cassius. La solution azotique de l'alliage était bleue; elle ne donna qu'une trace de précipité de plomb par l'acide sulfurique et l'ammoniaque; enfin, par un excès d'ammoniaque, on ne sépara que quelques flocons de peroxyde de fer, et je constatai par deux procédés différents (1) l'absence du zinc dans la solution ammoniacale cuivreuse bleue.

(1) L'oxyde de cuivre, précipité de l'acide azotique par la potasse en excès, n'a pas cédé d'oxyde de zinc à cet alcali.

Une dissolution du cuivre de ce bronze dans l'acide sulfurique, passée à l'acide sulfhydrique, n'a point donné de sulfate de zinc après avoir été évaporée.

23. Puisque l'alliage de la boîte est du bronze, il faut reconnaître l'habileté des ouvriers anciens pour réduire cet alliage en feuilles aussi minces que celles qui avaient servi à la confection de la boîte à couleur. Connaissaient-ils la propriété qu'a le bronze d'acquérir de la mollesse, de la ductilité par la *trempe*, c'est-à-dire par l'opération à laquelle l'acier doit sa dureté?.... Quoi qu'il en soit, des fragments de vases de bronze, trouvés dans les ruines de Ninive, qui m'ont été remis par M. Botta, témoignent que les ouvriers des temps reculés où cette ville était une grande cité, exécutaient des ouvrages dans lesquels ils savaient surmonter la difficulté dont je parle.

CHAPITRE II.

EXAMEN DE MATIÈRES D'ORIGINE ORGANIQUE.

§ I.

Examen d'une matière résineuse.

24. Cette matière, en gros morceaux, se présentait sous deux états très-différents : une partie extérieure friable, opaque, jaune de bois; une partie intérieure, légèrement brune, translucide, odorante, ayant toutes les propriétés d'une résine. Entre ces deux parties, il n'y avait pas d'intermédiaire, et comme il n'est pas douteux que la partie extérieure est provenue d'une altération de la partie centrale,

la cause de l'altération a dû agir dans un temps déterminé sur une fraction seulement de la matière.

L'alcool bouillant n'a pas dissous complétement la partie centrale.

25. *Matière dissoute par l'alcool bouillant.*

Cette solution contenait au moins deux principes immédiats résineux ; le plus soluble était décidément acide, le moins soluble ne l'était que légèrement ; enfin, l'alcool avait dissous un principe odorant semblable, s'il n'était pas identique, à celui de la résine du *pin maritime*.

26. *La matière indissoute par l'alcool bouillant.*

Elle retenait encore des principes résineux, et un principe azoté qui manifestait son existence par de l'ammoniaque lorsqu'on distillait la matière avec de la potasse.

La matière distillée sans potasse donnait un produit légèrement acide au papier de tournesol, doué de l'odeur de la houille pyriteuse; ce produit était sulfuré. Enfin, le résidu de la distillation laissait une quantité notable de cendres tenant du peroxyde de fer et de la chaux.

27. La partie centrale avait toutes les propriétés essentielles de la résine du *pin maritime* ou du *pin sylvestre*. M. Guibourt, auteur d'excellents écrits sur la matière médicale, a jugé comme moi qu'elle avait cette origine : il pense qu'elle avait été extraite par le feu, comme on le pratique encore aujourd'hui pour préparer la poix noire. Il ne me paraît pas impossible qu'elle ait été obtenue en effet par ce procédé ; cependant, elle n'est point aussi altérée que l'est la poix noire du commerce. Je pense donc que, si le feu a con-

couru à sa préparation, il n'a pas produit autant d'altération qu'on en remarque dans la résine connue aujourd'hui sous la dénomination de poix noire. Au reste, il est remarquable que la matière dont je viens de parler ait conservé depuis tant de siècles l'odeur qui lui est propre. Quant au soufre que cette matière contenait, je n'en vois pas l'origine.

§ II.

Examen d'une matière qui était sous forme de petits cônes presque cylindriques.

28. Cette matière avait toutes les propriétés du succin ou de l'ambre jaune. M. Guibourt, à qui je l'ai présentée, n'a pas hésité à la considérer comme telle, après s'être convaincu qu'elle n'était ni gomme laque, ni copal.

§ III.

Matière contenue dans une grande fiole.

29. Cette matière avait subi une altération évidente, car elle répandait une odeur de moisi, et l'aspect n'en était pas homogène; des parties blanches comme effleuries, et des parties noires, apparaissaient sur un fond d'un jaune pâle ayant l'aspect de la cire.

Elle se fondait et se figeait comme elle à 64°.

Elle rougissait le papier de tournesol légèrement.

L'alcool bouillant l'a dissoute, à l'exception d'un léger résidu noir qui laissa un peu de cendre formée de chaux et d'une trace de peroxyde de fer et de potasse.

La solution alcoolique déposa, par le refroidissement, de véritable cire fusible à 64°. Elle retenait une trace de matière noire.

30. La solution alcoolique, refroidie et séparée par la filtration de la cire, retenait deux acides gras inégalement fusibles; le moins fusible cristallisa par l'évaporation spontanée d'une portion d'alcool; l'eau mère mêlée à l'eau donna une matière légèrement colorée, fusible de 41° à 42°, retenant sans doute de l'acide le moins fusible.

Ces acides, qui n'étaient qu'en petite quantité relativement à la cire, rougissaient le tournesol après avoir été dissous dans l'alcool, et l'eau, ajoutée à la liqueur rouge, la faisait repasser au bleu. Ils m'ont paru différer d'un mélange d'acides margarique et oléique.

31. Le liquide d'où ils avaient été séparés était légèrement acide. Le résidu de son évaporation ne donna qu'une trace de cendre formée de chaux et de peroxyde de fer.

La matière dont je viens de parler était donc de véritable *cire* d'abeille dont une très-faible quantité avait été altérée.

§ IV.

Préparation d'une matière contenue dans une petite fiole à fond plat.

32. Cette matière a été mise dans l'eau chaude et agitée, afin d'enlever ce qu'elle pouvait contenir de corps solubles. Elle s'est fondue, a pris une couleur brune, en exhalant une odeur de résine ou de poix. L'eau était couverte, après le refroidissement, d'une pellicule blanche; la plus grande partie de la matière n'avait pas été dissoute; aussi l'eau filtrée et

évaporée n'a laissé qu'un résidu léger, jaunâtre, acide au papier de tournesol, tenant un sel calcaire. Mais ce n'était ni un sulfate, ni un azotate, ni un chlorure.

33. La matière insoluble séchée a cédé à l'alcool bouillant de la cire, qui s'en est séparée par le refroidissement. Cette cire, fusible à 64°, n'était pas acide.

34. Quant à l'alcool filtré après le dépôt de la cire, il tenait en solution de véritable résine de pin, c'est-à-dire, la même matière que celle qui a été examinée précédemment. (Chap. II, § 1.)

35. Enfin, ce que l'alcool bouillant n'avait pas dissous avait les propriétés du résidu insoluble dans ce liquide dont il a été question précédemment au sujet de la poix (26).

36. Il n'est pas douteux que la matière dont je viens de parler ne fût un mélange de *cire* et de *résine*, destiné à l'usage de la peinture.

§ V.

Examen d'une matière noire renfermée dans une fiole à fond très-plat.

37. Cette matière, qui, comme on va le voir, était un mélange extrêmement complexe, m'a présenté un résultat bien curieux, puisqu'elle renfermait à l'état libre les acides oléique et margarique, dont la découverte ne remonte pas au delà de l'année 1811, et, suivant M. Fillon, ce serait au III^e^ siècle de l'ère chrétienne que remonterait la date du tombeau où la matière dont je vais faire connaître la nature a été trouvée.

38. Elle avait une couleur noirâtre et l'apparence d'un liquide épaissi par une matière solide qui y avait été intimement unie. A la température de 20°, elle était molle; elle rou-

gissait fortement le papier de tournesol humide, et exhalait une odeur aromatique qui n'avait rien de rance; l'ayant tenue dans l'eau bouillante, je n'ai pu recueillir assez du principe volatil pour l'examiner. L'eau n'avait rien enlevé à la matière; elle se comportait donc à l'instar d'un corps gras.

39. Elle a été successivement traitée par l'alcool froid et l'alcool bouillant.

40. L'*alcool froid* a dissous un acide gras parfaitement liquide à 20°, qui était doué de toutes les propriétés de l'*acide oléique*, retenant de l'*acide margarique*. Le terme de fusion des deux acides resta constant après leur solution dans la potasse et lorsqu'ils en eurent été isolés; cela prouve qu'ils n'étaient pas mêlés de corps gras non saponifiés.

41. L'*alcool bouillant* a laissé déposer par le refroidissement une matière neutre, fusible à 64°, douée de toutes les propriétés de la cire d'abeille; l'alcool filtré après le refroidissement retenait une matière acide fusible à 28°, formée d'acides oléique et margarique.

42. Enfin, la matière indissoute par l'alcool bouillant était du *noir de fumée*, qui ne laissa, par l'incinération, qu'une trace de chaux provenant probablement d'un savon calcaire.

43. La présence des acides oléique et margarique, de la cire et du noir de fumée dans la matière analysée, n'est donc pas douteuse d'après les expériences que je viens de rapporter. Quelle est l'origine des deux acides? Proviennent-ils de l'altération spontanée d'une huile neutre qu'on aurait mêlée à la cire et au noir de fumée, de sorte que, sous l'influence des agents atmosphériques ou de tout autre, l'huile neutre aurait été acidifiée? Ou bien viennent-ils de la décomposition d'un savon d'huile d'olive, de pavot ou de toute autre, par

un acide tel que du vinaigre, du jus de citron? C'est ce que je ne puis décider d'une manière absolue : cependant, la seconde origine me paraît plus probable que la première, par la raison suivante. On n'a trouvé aucun corps soluble dans l'eau, ni aucun corps odorant analogue à celui des corps gras saponifiables qui deviennent acides en se rancissant; et certes, si on avait examiné la matière sans en connaître l'ancienneté, on aurait conclu sans hésitation qu'elle avait été préparée directement avec un acide oléique retenant un peu d'acide margarique.

Quel emploi faisait-on de ce mélange? Il est impossible, dans l'état actuel de ce que nous savons sur les arts anciens, de le dire. Cependant, si réellement il a été d'usage en peinture sur des enduits calcaires, on devrait retrouver en ceux-ci de l'oléate et du margarate de chaux.

CHAPITRE III.

EXAMEN DE DEUX FRAGMENTS DE PEINTURE SUR MUR.

44. M. Fillon m'a envoyé deux des fragments de peintures sur mur qui ont été trouvés sous le pavé d'une salle voisine de l'*atrium* de la *villa* dont j'ai parlé plus haut.

« Les motifs de ces peintures (dit M. Fillon) sont en tout « semblables à ceux que les artistes ont employés à la déco- « ration des appartements d'Herculanum et de Pompéi. Le

« milieu des panneaux est occupé par des sujets tirés de « l'histoire, de la mythologie ou de la vie privée, entre- « mêlés de paysages. Les tableaux à figures étaient de deux « grandeurs : les personnages des uns avaient $0^{m},35$, et ceux « des autres $0^{m},14$. »

M. Fillon pense que le mortier sur lequel on a peint se composait de deux couches appliquées successivement sur la muraille et d'un enduit où la peinture n'a été faite qu'après la dessiccation du tout. « Deux raisons, dit-il, me font « adopter cet avis : les couleurs s'enlèvent par écailles très- « minces et ne font point corps avec l'enduit; elles ont été « superposées les unes sur les autres, ainsi qu'on le remarque « en les frottant. Donc, ce ne sont point des fresques ; car, « dans ce cas, les principes colorants auraient pénétré. Par « conséquent, je conclus que nos débris sont peints en dé- « trempe ou à l'encaustique ».

§ I.

Examen d'un fragment représentant une cuisse et une jambe de femme, avec un pied chaussé d'une sandale, sur un fond gris verdâtre.

45. Cette peinture couvrait un morceau de mortier de $0^{m},04$ d'épaisseur composé, dans l'origine, de chaux grasse, de sable et de gravier.

La chaux grasse était entièrement convertie en sous-carbonate Je dis que ce mortier avait été composé avec de la chaux grasse, parce que, après avoir été dissous avec effervescence par l'acide azotique, la solution séparée du sable et du gravier siliceux par la filtration, évaporée à sec, et le résidu

repris par l'eau, ne laissa pas de silice; il céda au liquide beaucoup d'azotate de chaux mêlé de très-peu d'azotate d'alumine, de peroxyde de fer et d'une trace de magnésie.

Si l'œil ne distingue pas des couches différentes dans ce mortier, il est impossible que la surface peinte ne soit pas d'une pâte plus fine que le reste du mortier. Mais comment la peinture a-t-elle été appliquée sur l'enduit? C'est une question à laquelle je vais répondre par l'examen minutieux que j'ai fait des choses, en distinguant soigneusement le résultat de l'expérience des conjectures que j'ai pu former sans pouvoir les vérifier.

46. Le fond, d'un gris verdâtre, a été probablement appliqué avec un pinceau, car on voit des traits parallèles les uns aux autres; je dis probablement, parce qu'il ne serait pas impossible que l'enduit eût été frotté avec des poussières dures qui auraient creusé des sillons à sa surface.

La couleur est évidemment la terre de Vérone dont j'ai parlé, mélangée de particules bleues distinctes à la loupe et même à la vue simple. Ces particules sont vraisemblablement le bleu égyptien.

N'ayant pu apprécier l'épaisseur de l'enduit, ni celle de la couche colorée, je ne puis affirmer si l'enduit a reçu la couleur après sa dessiccation, comme le pense M. Fillon, ou bien si l'enduit et la couleur ne font qu'un; dans ce dernier cas, le mortier aurait reçu un enduit de couleur.

47. Lorsque les figures ont été peintes, le fond était parfaitement sec; car en détachant avec précaution les couleurs rouge, rose et blanche des carnations, on retrouve dessous le fond d'un gris verdâtre; et on aperçoit dans celui-ci, mis à découvert, la terre de Vérone et le bleu dont j'ai parlé.

48. La couleur de chair était du peroxyde de fer anhydre, et le rose un mélange du même oxyde et de sous-carbonate de chaux mêlé d'alumine et d'une trace de magnésie. Il est probable que, dans l'origine, la chaux avait été mêlée à l'état caustique avec l'oxyde de fer.

49. La sandale présentait une belle couleur jaune qui avait été ajoutée sur la carnation après la dessiccation de celle-ci. Il y avait donc eu trois applications successives de couleurs superposées, le fond, la carnation et la teinte de la sandale.

50. J'avais cru un moment qu'il y avait eu du cinabre mélangé au peroxyde de fer; mais ayant traité à chaud, dans un tube de verre fermé, la matière rouge qui n'avait pas été dissoute par l'acide chlorhydrique, je n'en ai pas retiré de sublimé mercuriel.

51. Voilà donc l'emploi d'une partie des matières colorées dont la nature spécifique a été déterminée précédemment. Voyons maintenant comment elles ont pu être appliquées.

52. J'ai d'abord cherché dans la peinture séparée par le grattage du mortier la présence d'une matière soluble dans l'eau, telle que matière gommeuse, matière azotée caséeuse, albumineuse ou gélatineuse; mais je n'ai rien trouvé qui ait pu me donner à penser qu'on avait ajouté un corps de cette nature aux matières colorées.

L'alcool bouillant a enlevé aux matières colorées des carnations une très-faible quantité de matière grasse qui pouvait être de la cire ou un mélange de cire et de résine analogue à celui dont j'ai parlé précédemment; mais il n'y en avait qu'une quantité beaucoup trop faible pour en constater la nature spécifique : cette faible quantité était d'ailleurs une

conséquence des deux faits suivants : 1° c'est que la peinture ne donnait qu'une trace de produit empyreumatique odorant à la distillation ; 2° que l'eau était bue par l'enduit coloré. Or, s'il y avait eu une quantité notable de corps gras, les résultats eussent été différents.

53. Mais je ne m'en suis pas tenu à ce résultat. Après avoir traité la peinture par l'eau, l'alcool, je l'ai soumise à l'action de l'acide chlorhydrique, afin de décomposer les savons terreux ou métalliques qui auraient pu se former par l'emploi d'un corps huileux analogue à celui que j'ai examiné plus haut, § V du chapitre II (43), soit que ce corps huileux eût été dans l'origine neutre, comme le sont les huiles d'olive, de pavot, la graisse proprement dite; soit qu'il eût été acide, comme le sont les acides oléique, margarique, etc. Eh bien, l'alcool appliqué au résidu insoluble dans l'acide, et au papier dans lequel on avait filtré la solution chlorhydrique, n'a donné aucune matière grasse.

§ II.

Examen d'un fragment représentant une figure nue d'enfant à ailes vertes sur un fond rouge.

54. Évidemment la figure avait été faite sur le fond déjà sec comme dans le premier fragment, car en le grattant on mettait le fond à découvert ; en outre, les ailes vertes avaient été peintes à deux reprises et à teintes plates. La première couche était de la terre de Vérone mêlée de bleu égyptien et de sous-carbonate de chaux; et la seconde, qui faisait le clair de la première, était un mélange de terre de Vérone et de sous-

carbonate de chaux, et l'on pouvait enlever ces matières par écailles, conformément à l'apparence qu'elles présentaient d'avoir été appliquées par superposition. Le fond était composé essentiellement de peroxyde de fer et de sous-carbonate de chaux.

55. Les carnations traitées par l'eau froide n'ont donné que des traces de matière organique et de sel calcaire, probablement sous-carbonate. Traitées par l'alcool bouillant, elles ont cédé à ce liquide une trace de matière grasse semblable à celle qu'on avait séparée du premier fragment. Le résidu indissous par l'eau et l'alcool était formé de sous-carbonate de chaux, de peroxyde de fer. Il y avait en outre de l'alumine et de la magnésie, mais pas d'oxyde de manganèse : un moment on crut à la présence du cinabre, mais on reconnut qu'il n'y en avait pas.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

56. Pour apprécier le travail que je viens de présenter, il faut le juger au point de vue où je me suis trouvé placé lorsque je l'ai entrepris. Alors j'étais occupé à coordonner, sous le titre de *Considérations générales sur l'histoire de la chimie*, tous les documents que j'avais pu réunir, concernant les idées théoriques et la pratique des arts industriels et agricoles des anciens peuples. Le plan de cet ouvrage est très-simple. Une *première partie* est consacrée à l'état des

connaissances que je viens de désigner chez chaque peuple en particulier : les Chinois, les Indiens, les Assyriens, les Égyptiens, les Juifs, les Grecs et les anciens Italiens. Une *seconde partie* est consacrée à l'exposé des connaissances chimiques envisagées au double point de vue de la théorie et de l'application, en six époques; je tâche d'apprécier, conformément aux faits exposés dans la première partie, l'origine de quelques idées fondamentales qui se rattachent aux anciennes doctrines chimiques.

57. J'ai cherché dans les débris mêmes des produits des arts anciens, reconnus par les archéologues, et conséquemment parfaitement authentiques, les faits propres à éclairer la pratique de ces arts.

La première partie des considérations générales sur l'histoire de la chimie a été l'objet du cours que j'ai fait l'année dernière au Muséum d'histoire naturelle ; la seconde partie sera professée cette année (1849).

58. On voit d'après cela que les faits qui composent ce Mémoire, reçoivent un nouvel intérêt de la liaison même qu'ils ont avec des faits analogues déjà connus.

59. L'examen des feuilles de bronze de la boîte à couleur trouvée à Saint-Médard-des-Prés a donné la preuve de l'habileté des anciens à travailler mécaniquement cet alliage; car tout le monde sait que le laminage du bronze exige un soin particulier. J'ajouterai que M. Botta, auquel on doit la découverte des ruines de Ninive, m'a remis des fragments d'un vase de bronze très-mince, qui avait été travaillé au marteau. Il présentait à l'extérieur des filets convexes, et l'intérieur du vase montrait ces filets creux, et l'épaisseur en était sensiblement égale à celle du reste des parois.

60. Quoique la couleur bleue de la *villa* de Saint-Médard-des-Prés ne m'ait pas permis d'en faire une analyse parfaite, cependant, y ayant reconnu la présence de l'oxyde de cuivre, de la soude et de la silice, et l'absence du cobalt et de l'outremer, j'ai tout lieu de penser qu'elle était identique au *bleu égyptien, fritte d'Alexandrie,* matière qui a été signalée par Chaptal, Davy, et retrouvée dans plusieurs *villas gallo-romaines* de Normandie, ainsi que cela résulte de l'analyse que M. J. Girardin de Rouen en a faite.

61. On a trouvé en Normandie plusieurs débris de produits appartenant à la civilisation gallo-romaine, parmi lesquels je signalerai un vase de cristal ou verre plombeux, dont M. Girardin a fait l'analyse. Ce vase avait été découvert aux environs de Rouen, dans un tombeau gallo-romain. Ainsi, en Normandie comme en Vendée, les Romains avaient répandu l'usage du cristal : des *villas* étaient construites sur toutes les parties de la Gaule. Des peintres se servaient, pour en décorer l'intérieur, d'oxyde de fer, de terre de Vérone, de bleu égyptien, etc., etc., comme à Rome, à Pompéi, à Herculanum.

N'ayant pu découvrir, dans les deux fragments de peinture, rien qui annonçât l'emploi d'une matière gommeuse, résineuse, huileuse, gélatineuse ou caséeuse, pour appliquer la peinture sur l'enduit, j'ai cherché à voir s'il ne serait pas possible de faire cette application en ne recourant qu'à un simple mélange de la matière colorante avec de la chaux humectée. L'expérience a justifié ma prévision. Le peroxyde de fer, employé de cette manière, est extrêmement solide aux injures de l'air; lorsque la chaux, qui peut être en excès, est carbonatée, le frottement et la pluie n'enlèvent pas la ma-

tière. Le vert-de-gris donne un bon résultat, mais il n'est pas aussi solide que le peroxyde de fer. J'ai appliqué, de la même manière, et avec le même succès, le bleu égyptien, un mélange de terre de Vérone et de bleu égyptien, et enfin le vermillon. Je crois donc à la possibilité de faire des peintures murales avec des matières colorantes et de la chaux hydratée réduites en un mélange suffisamment coulant au moyen de l'eau.

RÉSUMÉ

DE

CHRONOLOGIE ASTRONOMIQUE,

PAR M. BIOT,

Présenté à l'Académie, dans la séance du 4 juin 1849.

INTRODUCTION.

Lorsque les astronomes ont occasionnellement le besoin, ou le désir, d'employer une observation faite dans l'antiquité ou dans le moyen âge, ils éprouvent, presque toujours, beaucoup de difficultés à se l'approprier. Pour le faire avec sûreté, il faut se rendre un compte exact des formes conventionnelles sous lesquelles l'auteur qui la rapporte l'a mentionnée. Il faut connaître les règles du calendrier qu'il a suivi, l'instant physique qui en constituait l'ère, les périodes de temps, constantes ou variables dans lesquelles on y rassemblait les années, les mois, les jours. Il faut encore savoir distinguer, pour ceux-ci, leurs dates civiles, employées

communément à énoncer les observations, en partant d'origines généralement variables, comme le lever ou le coucher du soleil ; et leurs dates astronomiques, ayant des origines moins inconstantes, auxquelles on doit réduire les premières, afin d'en tirer les instants précis des phénomènes observés. Ces détails minutieux sont presque toujours obscurément ou incomplétement indiqués dans les textes, parce qu'ils étaient trop usuels pour qu'il parût nécessaire d'en spécifier toutes les particularités. Mais il est indispensable aujourd'hui de les retrouver, et d'en rétablir l'expression précise, si l'on veut tirer parti d'une observation qui les suppose. A la vérité, les diverses formes des calendriers anciens ont été discutées et analysées par de savants chronologistes ; et ils ont même construit, pour plusieurs, des tables de concordance qui donnent immédiatement les relations de leurs dates civiles de jours avec les nôtres. Mais cela ne suffit pas au calcul astronomique. Il exige une tout autre précision que l'histoire ; et les données sur lesquelles il s'établit doivent avoir une rigueur de détails que le chronologiste n'a pas besoin de s'imposer. Sans doute, l'astronome qui aurait à calculer un grand ensemble d'observations, rapportées sous une même forme, saura, s'il le veut, se la rendre propre, et s'initier dans toutes les conditions de son texte. Mais, entreprendre un si pénible travail pour quelque observation isolée, qu'il trouvera peut-être finalement imparfaite ou inutile, c'est à quoi il se résoudra difficilement ; et s'il s'y hasarde sans cette préparation, en s'aidant des indications prises dans les livres, il aura beaucoup plus de chances pour se tromper que pour réussir. Dans cette alternative, il se trouvera naturellement porté à négliger des données d'une ap-

plication si pénible; ou, ce qui serait pire, il risquera de les employer inexactement.

Ayant eu trop fréquemment l'occasion d'éprouver, pour mon propre compte, les inconvénients que je viens de signaler, j'ai pensé que je ferais une chose utile si je les épargnais à d'autres. Tel est le but du travail, purement matériel et de patience, que je présente à l'Académie.

J'y expose successivement, dans autant de chapitres séparés, toutes les formes de numération du temps auxquelles des observations astronomiques ont été rattachées dans l'antiquité ou dans le moyen âge; et j'établis les règles nécessaires pour transporter exactement, dans notre calendrier julien, toutes les dates ainsi exprimées. J'ai suivi dans cette exposition un plan uniforme, qui m'a semblé le plus favorable pour allier la clarté et la rigueur. En tête de chaque chapitre je définis l'instant qui constitue l'ère du calendrier que je veux considérer, et j'y annexe la date correspondante de la période julienne, exprimée avec les détails de précision que l'astronomie exige, présentant ces conditions initiales de concordance comme des faits qui seront prouvés ultérieurement. J'expose ensuite les conventions spéciales qui ont été employées dans ce calendrier, pour l'énumération du temps civil et du temps astronomique, jusque dans leurs dernières fractions; et, de là, je déduis les règles qu'il faut suivre pour transformer les dates ainsi mentionnées dans les nôtres, en partant de la concordance initiale que j'ai d'abord énoncée. Alors, pour prouver à la fois la justesse de cette concordance et l'exactitude des principes de déduction que j'y ai rattachés, je prends, dans les textes originaux, des observations d'éclipses de lune, de soleil, ou des élongations de ces

astres, ou encore des occultations d'étoiles, qui ont été rapportées sous cette forme; et je conclus, de ces énoncés, la date julienne qui a dû y correspondre. Cette date étant connue, je cherche, par les tables abrégées de M. Largeteau, dans quelles relations de distance angulaire se trouvaient effectivement les astres observés à l'époque ainsi définie; ce qui, dans les cas en apparence les plus difficiles, ne demande qu'un calcul arithmétique de quelques minutes, tant la construction de ces tables est simple et commode. Si donc je trouve ainsi que le phénomène énoncé a eu réellement lieu à cette date, pour le jour et pour l'heure, dans les limites d'écart que l'observation pouvait comporter alors, et dont nos tables mêmes ne sont pas tout à fait exemptes, quand on les applique à des temps très-reculés, j'en conclus légitimement que la date ancienne a dû être fidèlement traduite. La réalisation soutenue de ce même accord, entre les énoncés et le calcul théorique, achève de généraliser la démonstration; surtout en choisissant, comme je le fais, les exemples, de manière à parcourir les cas les plus embarrassants, et les plus décisifs, qui puissent se présenter. Les phénomènes astronomiques que j'ai ici désignés sont les seuls que l'on puisse employer pour ces épreuves, parce que, à cause de la rapidité du mouvement de la lune, qui est un de leurs éléments déterminatifs, les observations qu'on en fait, même à la vue simple, si elles sont fidèlement rapportées, ne peuvent être au plus en erreur, pour leurs dates, que d'une fraction d'heure, et jamais d'un jour entier; au lieu que les anciennes déterminations de solstices, et même d'équinoxes, présentent des incertitudes qui rendent souvent leurs dates fautives de toute l'étendue d'un jour; de sorte qu'on ne saurait en faire usage pour établir des synchro-

nismes assurés. Mais, après que la méthode de conversion a été suffisamment prouvée par les premiers, on peut logiquement l'appliquer à ceux-ci pour apprécier leurs erreurs, et connaître le degré d'utilité que les observations qu'on en rapporte peuvent avoir aujourd'hui pour nous; du moins, en admettant que les tables modernes auxquelles on les compare sont encore fidèles à ces époques éloignées. C'est ce que je n'ai pas manqué de faire; et cela m'a donné l'occasion de varier à mon gré les exemples de calcul arithmétique qui m'étaient nécessaires, en les rattachant à des points d'astronomie ancienne qui ne sont pas sans intérêt.

Voulant rapporter toutes les dates au calendrier julien, et les placer par ordre dans la grande période chronologique que l'on a nommé Julienne, j'ai premièrement rappelé les règles et les pratiques de ce calendrier, avec des détails suffisants pour que le lecteur trouvât immédiatement, sous sa main, tous les éléments numériques des applications ultérieures que j'avais à lui présenter. Ce préliminaire étant établi, je procède, comme je l'ai dit, à l'exposition des calendriers particuliers qui ont été employés par les astronomes: d'abord ceux qui sont indépendants des mouvements de la lune, puis ceux où elle intervient. Prenant donc les premiers dans l'ordre de leur antiquité relative, je considère successivement le système des années égyptiennes de Nabonassar, et celles d'Alexandre le Macédonien qui s'y rattachent; puis les années alexandrines fixes, celles des Augustes, de Dioclétien, d'Alexandre Hilcarnain ou des Séleucides; enfin, les années persanes vagues d'Iezdegerdh. Des observations, en très-grand nombre, ont été datées sous chacune de ces formes, non-seulement aux époques où elles étaient

employées dans les usages civils, mais longtemps après, de sorte que les exemples ne manquent pour aucune. Les auteurs arabes sont particulièrement précieux sous ce rapport, et aucun ne l'est plus qu'Ebn-Iounis. Craignant sans doute les incertitudes que pouvaient jeter sur leurs résultats l'usage civil de l'année lunaire dans laquelle ils prenaient leurs dates de jour, surtout la variabilité d'origine de ces jours commençant au coucher du soleil, ils ont eu presque toujours soin de les rattacher, par des concordances nombreuses, aux calendriers étrangers, anciens ou récents, desquels on pouvait plus facilement et plus sûrement déduire la date égyptienne vague, qui servait pour comparer l'observation aux tables de Ptolémée, les seules existantes alors. Quand on discute ces concordances, on reconnaît généralement leur justesse; et, si l'on se reporte au temps où elles ont été calculées, en considérant les difficultés que l'on devait avoir alors pour se rendre propres des formes de computation si dissemblables, définies trop fréquemment d'une manière obscure, ou imparfaitement arrêtées, on ne peut qu'admirer la sagacité de critique ainsi que la patience laborieuse qu'il a fallu à des hommes placés dans des conditions pareilles pour ne se tromper presque jamais. Les éclipses, les équinoxes auxquelles ils ont ainsi attaché des dates multiples, fournissent les meilleurs exemples de concordance que l'on puisse présenter. Car, en voyant la même date julienne sortir finalement de tous ces énoncés si divers, en conformité avec le ciel, et assurée par les tables de M. Largeteau, il est impossible de méconnaître la justesse des règles de transport qui conduisent à une telle identité; et non-seulement ces règles, mais aussi les époques initiales, les ères propres

d'où elles dérivent, s'en trouvent simultanément confirmées.

Cette exposition étant terminée, j'arrive aux calendriers dans lesquels la lune intervient, avec ou sans le soleil. Considérant d'abord les premiers, que l'on nomme luni-solaires, j'établis leurs principes généraux, dont je présente comparativement les applications chez les Chinois et chez les Grecs. Pour ceux-ci, je restitue les calendriers, si longtemps employés, de Méton et de Calippe, autant qu'on peut le faire d'après les détails que Géminus nous a conservés, et au moyen du petit nombre de dates ainsi exprimées, dont Ptolémée nous a donné la concordance avec les années égyptiennes vagues de Nabonassar. Parmi ces rares documents, j'en indique un dont l'application n'avait pas été encore aperçue; et il me fournit une épreuve décisive pour confirmer, ou pour infirmer, les restitutions analogues que l'on avait tentées sans en connaître l'usage. Les doutes qui pourraient rester encore sur quelques détails de ces deux calendriers, ne jettent d'ailleurs aucun nuage sur l'interprétation des dates astronomiques rapportées sous cette forme dans l'Almageste; et la preuve de leur exactitude, qui se tire de ces rapprochements, suffit au but scientifique que je m'étais proposé.

Je termine cet ensemble par l'exposé du calendrier purement lunaire des Arabes, le seul, parmi ceux dont les astronomes ont fait usage, où les mouvements de la lune aient été employés, indépendamment de ceux du soleil. J'en établis les règles, et l'époque astronomique initiale, par les mêmes procédés rigoureux que j'ai employés pour les autres, en les légitimant de même par des dates d'éclipses mentionnées sous cette forme, que je choisis de manière à embrasser tous les cas divers qui peuvent se rencontrer dans les applications.

Par une conséquence de la simplicité et de l'uniformité du plan que j'ai suivi, un astronome qui aura occasionnellement besoin d'employer une observation dont la date sera donnée dans un quelconque des calendriers que j'ai considérés, n'aura qu'à lire isolément le chapitre qui s'y rapporte. Il y trouvera tous les documents, toutes les règles, qui lui sont nécessaires pour la transformer en date julienne rigoureuse, et pour constater, par lui-même, l'exactitude de cette transformation. Seulement, et ce n'est pas trop exiger de lui, il n'acquerra complétement cette assurance que s'il vérifie personnellement les preuves que je rapporte, par les mêmes moyens qui m'ont servi à les établir, c'est-à-dire en les vérifiant au moyen des tables de M. Largeteau. Je ne dois pas hésiter à reconnaître que, sans leur secours, le travail d'ensemble que j'ai effectué aurait été à peu près inabordable; et le calculateur qui aurait eu le courage de l'entreprendre n'aurait fait qu'une œuvre inutile, à cause des difficultés non moins fatigantes que les astronomes auraient eues à vaincre pour appliquer ses déductions, surtout pour en vérifier les principes fondamentaux. Maintenant, avec les tables abrégées de M. Largeteau, cette vérification n'exige qu'un calcul arithmétique de quelques minutes, qui sert en même temps de guide et d'exemple pour les applications. Je dois donc beaucoup de reconnaissance à leur auteur pour avoir bien voulu me permettre de les annexer à mon travail, et pour les y avoir spécialement appropriées par une rédaction nouvelle, dans laquelle il ajoute encore à leur clarté et à leur simplicité. Les personnes qui ont eu l'occasion d'étudier, et d'appliquer à leur propre usage, les essais du même genre qui avaient été faits antérieurement, pour arriver à des ap-

proximations qui pussent seulement suffire aux besoins de la science chronologique, comprendront toute l'étendue du service que M. Largeteau a ainsi rendu à l'astronomie et à l'érudition.

Tel est le sujet et la nature du travail que je présente à l'Académie. Je souhaite que l'utilité dont il peut être supplée à ce qui lui manque sous le rapport de la nouveauté, et lui obtienne de l'indulgence de l'Académie une place parmi ses Mémoires. En l'évaluant d'après le temps et la peine qu'il m'a coûté, je l'estimerais probablement fort au delà de son mérite. Mais je ne regretterai point de l'avoir entrepris, si les astronomes laborieux y trouvent assez de secours pour s'épargner des recherches de détail d'autant plus fatigantes qu'elles leur sont moins habituelles; et si, en leur facilitant le calcul des observations anciennes, il les détermine à y recourir plus souvent qu'on ne le fait aujourd'hui.

CHAPITRE PREMIER.

Règles conventionnelles du calendrier julien adopté par toutes les nations chrétiennes. Formation de la période chronologique appelée julienne, et spécification de son usage comme échelle générale des temps.

1. Les calendriers des différents peuples sont des échelles numériques, établies chez chacun d'eux suivant certaines conventions fixes, pour l'énumération continue du temps. La science que l'on appelle CHRONOLOGIE consiste d'abord à rechercher, dans les textes historiques, les particularités de ces conventions, la forme spéciale de chaque calendrier, et

à déterminer, d'après ces données, les intervalles de temps absolu qui se trouvent compris entre les événements dont les dates y sont énoncées. La série de ces dates s'obtient ainsi, rapportée à une origine commune que l'on nomme l'ÈRE, et qui est presque toujours fictive ; c'est-à-dire que l'événement particulier que la tradition y place n'a pas été fixé astronomiquement lorsqu'il s'est accompli, mais y a été transporté numériquement par une computation rétrograde. Par exemple, notre calendrier chrétien actuel, qui a pour ère la nativité du Christ, a été établi bien postérieurement à ce fait, dont l'époque absolue n'est pas même rigoureusement fixée. Car on sait qu'il fut rattaché à cette origine, sur la proposition d'un savant religieux, appelé Denys *le Petit, Dyonisius exiguus,* qui vivait sous l'empereur Justinien. Jusque-là les chrétiens avaient compté les années, comme les Romains, suivant le calendrier institué par Jules César, lequel avait pour ère historique la fondation de Rome, autre fait d'une époque incertaine ; et, pour ère usuelle, d'abord l'avénement d'Auguste à l'empire ; plus tard, celui de Dioclétien. Lorsque la discussion individuelle de chaque calendrier a été ainsi effectuée, elle ne donne encore que des échelles relatives de temps, partielles et disjointes, qu'il reste à mettre en concordance absolue. Pour cela, on choisit une d'entre elles, et l'on cherche, dans chacune des autres, quelque fait dont la date particulière puisse être identifiée dans celle-là, par la réalisation simultanée d'un phénomène céleste occasionnel, ou par un synchronisme historiquement attesté. Quand cette concordance individuelle est établie et assurée pour une seule date, toutes les autres, comprises dans la même échelle de numération, peuvent être immédiatement transportées et

placées dans l'échelle commune, d'après leurs différences reconnues d'intervalles temporaires. Un travail pareil, étendu à tous les documents fournis par l'astronomie ou par l'histoire, constitue la chronologie générale, qui rassemble, et distribue dans une même série de temps, l'universalité des faits successifs ou contemporains, dont les dates notées ont été fixées par des caractères précis, qui se sont transmis jusqu'à nous.

2. Le calendrier julien, rapporté à l'ère chrétienne, étant aujourd'hui commun aux nations les plus civilisées du monde, et les tables astronomiques les plus parfaites y étant adaptées, c'est dans ce système d'énumération du temps qu'il convient de transporter toutes les dates autrement exprimées. Je le choisirai donc, en le restreignant, pour ce but, à la forme simple qu'il avait avant la réforme qui y fut introduite par le pape Grégoire XIII, et qui a été appelée de son nom *grégorienne*. Cette simplicité ne nous apportera d'ailleurs aucun inconvénient dans l'application : car toutes les dates astronomiques dont nous aurons ici particulièrement à nous occuper, sont fort antérieures à l'époque où la réforme grégorienne fut introduite.

Le premier travail à faire sur ce calendrier, comme sur tout autre, consiste à en définir exactement les règles conventionnelles; c'est-à-dire, à spécifier comment on y désigne l'individualité des jours qui se succèdent, et quels sont les divers ordres d'unités collectives dans lesquels on les rassemble, pour en faciliter l'énumération. Son usage, devenu pour nous habituel, rendra ici cette première exposition très-simple, et elle nous servira de type pour tous les autres.

3. Il faut d'abord distinguer le jour civil et le jour astro-

nomique. Le premier comprend généralement, dans sa définition, la durée du jour visible et celle de la nuit qui lui succède. Les différents peuples ont compté, et comptent encore cette durée totale, à partir de diverses origines; par exemple, du lever du soleil au lever suivant, ou de son coucher au coucher suivant; quelques-uns de midi à midi, d'autres de minuit à minuit. L'usage a quelquefois changé chez un même peuple au gré du souverain, comme cela est arrivé à la Chine.

Le jour civil du calendrier julien commence, pour chaque méridien terrestre, à minuit vrai, et se termine au minuit vrai suivant. Sa durée est donc rendue variable par les inégalités propres du mouvement du soleil, combinées avec l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur. Mais elle l'est beaucoup moins que si l'on plaçait son origine au lever de cet astre ou à son coucher, parce que ces dernières conditions la font dépendre de la longueur de l'arc semi-diurne, qui subit des changements considérables en diverses saisons.

Les fractions du jour civil n'ont pas eu, et n'ont pas même encore aujourd'hui, chez tous les peuples, une expression uniforme; mais on peut toujours les traduire par les angles dièdres correspondants que le plan horaire du soleil vrai forme avec le méridien supérieur ou inférieur du lieu d'observation. Je les emploierai toujours sous cette forme, et converties en heures sexagésimales pour les calculs.

Le jour astronomique est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil moyen à un même méridien fixe. Tous les astronomes ne s'accordent pas pour lui donner une même origine : les uns la placent à midi, d'autres à minuit. J'adopterai cette dernière spécifica-

tion, à laquelle sont aussi adaptées les tables abrégées de la lune et du soleil, de M. Largeteau, dont je ferai un continuel usage. Elle est en effet la seule qui soit logiquement conciliable avec l'emploi du calendrier chrétien, où le jour civil commence à minuit. Car, en faisant commencer le jour astronomique à midi, un astronome européen, qui ferait une observation dans la matinée du dimanche civil, devrait, pour être conséquent avec lui-même, la dater, sur son registre, comme appartenant au samedi : à moins qu'il n'aimât mieux faire commencer son dimanche astronomique au midi précédent; auquel cas il devrait déjà dater, de ce dimanche fictif et conventionnel, les observations comprises dans la dernière moitié du jour civil qui est appelé samedi par tout le monde, et par lui-même. Il est bien plus simple, et plus commode, de dater les observations sur les registres comme on date les jours dans l'usage habituel; et cela évite aussi toutes les incertitudes que pourraient avoir ultérieurement les astronomes qui entreprendront de les calculer. On n'éprouve que trop fréquemment combien ce genre de difficultés est regrettable, quand on a besoin d'employer des observations faites dans l'antiquité ou dans le moyen âge. Car l'origine du jour civil étant alors presque toujours placée au lever ou au coucher du soleil, on est souvent embarrassé pour savoir si l'énoncé qu'on en donne a été strictement rapporté à cette origine variable, ou si le quantième de jour mentionné est pris dans un sens d'application astronomique conventionnel, qui n'est pas toujours rigoureusement défini, ni suivi fidèlement. C'est pour prévenir des embarras pareils que, sur la proposition de Laplace, le Bureau des longitudes de France s'est décidé à faire com-

mencer le jour astronomique à minuit moyen, dans les tables qu'il a publiées. Et, en effet, ce choix d'origine est parfaitement fondé en raison : car les jours civils de notre calendrier usuel commençant à minuit vrai, l'emploi des dates civiles de jour, pour noter les observations, ne peut offrir que des cas d'incertitudes extrêmement rares, puisqu'elles porteraient uniquement sur celles qui se trouveraient être faites précisément dans le court intervalle de ces deux minuits, circonstance qu'il faudrait alors avoir la précaution d'indiquer. Il serait fort à désirer que tous les astronomes qui font usage du calendrier chrétien s'accordassent généralement pour adopter, dans leurs observations, un système de dates qui s'y rattache si intimement, et qui est si conforme à la saine critique.

4. La forme du calendrier chrétien, antérieurement à la modification grégorienne, n'était autre que celle du calendrier julien adapté à une ère différente. Il était établi sur une durée moyenne de $365^{j},25$, que l'on supposait égale à celle de l'année solaire vraie. On y réalisait la fraction de jour par intermittences, en comptant trois années consécutives de 365 jours, et donnant 366 jours à la quatrième, qui s'appelait bissextile. Celle-ci se plaçait à la même époque absolue que dans le calendrier romain ; et l'instant initial d'où partent les années, c'est-à-dire l'ère, a été choisi de manière que l'année dont le rang ordinal est 1 commence une de ces périodes. D'après cela, dans la série des années postérieures à l'ère, les bissextiles sont celles dont le rang ordinal N est divisible par 4 sans reste ; ou, en langage algébrique, ce sont celles pour lesquelles N est de la forme $4m$, m étant un nombre entier positif autre que 0.

Les chronologistes ont étendu le calendrier julien aux temps antérieurs à l'époque prise pour ère, de manière que toutes les années, tant communes que bissextiles, s'y succèdent selon la même règle, et dans le même ordre, en formant avec les postérieures une série continue. Pour remplir cette condition de continuité, l'année qui précède immédiatement l'ère doit terminer la dernière période d'intercalation antérieure, et être conséquemment bissextile. Ils désignent son rang ordinal, compté de l'ère, par 1 ; et celui des précédentes, dans leur ordre rétrograde, par 2, 3, 4, en énonçant leur caractère d'antériorité. La série chronologique totale présente alors la disposition suivante, où j'ai signalé les années bissextiles par la lettre B, mise en exposant :

ANNÉES ANTÉRIEURES.					ÈRE.				ANNÉES POSTÉRIEURES.				
.....	8	7	6	5^{B}	4	3	2	1^{B}	1	2	3	4^{B}	5	6	7	8^{B}	.....

Dans la portion de la série antérieure à l'ère, les années bissextiles sont celles dont le rang ordinal N est de la forme $4m + 1$, m étant un nombre entier, positif ou nul. Dans la portion ultérieure, au contraire, leur rang ordinal N a la forme $4m$, m étant un nombre entier positif autre que o. La règle est ainsi différente avant et après l'ère.

5. Les astronomes évitent cette dissymétrie en désignant par o l'année immédiatement antérieure à l'ère ; et les signes algébriques — ou +, appliqués au nombre ordinal de chaque année, leur servent pour spécifier si elle précède ou suit cet instant. Leur échelle complète des années juliennes offre ainsi la disposition suivante :

ANNÉES ANTÉRIEURES.					ÈRE.				ANNÉES POSTÉRIEURES.			
.....	7	6	5	4^B	3	2	1	0^B	1	2	3	4^B	5	6	7	8^B	.....

Alors, le caractère général des années bissextiles, avant comme après l'ère, c'est que leur rang ordinal $\mp$ N soit de la forme $4m$, m étant un nombre entier, positif, négatif, ou nul.

Quoique cette uniformité de notation offre des avantages pour les calculs numériques, les chronologistes ont conservé leur ancien usage, déjà consacré par d'immenses travaux, dont cette innovation aurait dérangé toute l'ordonnance. Au reste, le passage d'un de ces modes dénoncés à l'autre, est bien facile. Car d'abord, pour les années postérieures à l'ère, il y a identité; pour les années antérieures, retranchez 1 du nombre ordinal des chronologistes, vous avez celui des astronomes; ou, inversement, ajoutez 1 à ce dernier, vous avez l'autre.

6. La subdivision des années en mois est restée la même dans le calendrier chrétien, avant comme après la réforme grégorienne. Elle nous vient des Romains, avec toutes les bizarreries dont nous avons hérité, sans avoir conservé aucun des motifs accidentels qui les avaient introduites. Une des plus singulières est assurément l'intercalation du jour bissextil à la fin du mois de février, rendu exceptionnellement plus court que tous les autres; mais telle est la règle, qu'une adoption universelle rend maintenant préférable à toute combinaison différente.

L'irrégularité des mois juliens embarrasserait continuellement les computations chronologiques et astronomiques, si l'on n'avait pas sous les yeux une table indiquant, pour tous

les quantièmes de chaque mois, le rang ordinal du jour que ce quantième désigne dans une année, soit commune, soit bissextile. J'ai placé, à la fin de ce chapitre, une pareille table, à laquelle nous aurons fréquemment occasion de recourir.

7. La plus courte période de temps usitée dans la chronologie est la semaine de sept jours. On les y désigne généralement par le nom de *Féries*, traduction de leur nom latin *feria;* et on les désigne individuellement par leur rang ordinal de succession, en commençant par le dimanche. On y a aussi attaché, comme caractère distinctif, les symboles astronomiques qui désignent le soleil, la lune, et les cinq planètes principales, auxquels chacun d'eux était consacré dans le calendrier romain; ce que les noms de plusieurs d'entre eux rappellent encore. L'ensemble de ces rapports se voit dans les lignes suivantes :

RANG ORDINAL DES SEPT FÉRIES.	LEURS DÉNOMINATIONS USUELLES.	SYMBOLE PLANÉTAIRE ATTACHÉ A CHAQUE JOUR.
1	Dimanche.	☉ le Soleil.
2	Lundi.	☾ la Lune.
3	Mardi.	♂ Mars.
4	Mercredi.	☿ Mercure.
5	Jeudi.	♃ Jupiter.
6	Vendredi.	♀ Vénus.
7	Samedi.	♄ Saturne.

8. Cette application des sept planètes aux sept jours de la semaine a été probablement imaginée dans des intentions astrologiques; mais on ne sait pas avec certitude dans quel pays, et à quelle époque, elle a pris naissance. Elle ne suppose pas nécessairement l'emploi de la semaine comme période civile de temps, puisque l'idée de considérer chaque planète comme présidant successivement aux différents termes de la série des jours, peut être née indépendamment d'un tel usage. Cette distinction est essentielle à établir; car, faute de la faire, on a souvent donné l'autorité d'un fait historique à ce qui peut n'avoir été qu'une spéculation astrologique. Ainsi, Montucla, Bailly, Laplace, s'accordent à considérer la semaine de sept jours comme une institution civile de la plus haute antiquité, qui a été commune à presque tous les peuples de l'ancien monde. Les deux premiers appuient cette opinion principalement, on pourrait dire uniquement, sur un passage d'Hérodote et sur un autre de Dion Cassius, qui leur semblent attester l'usage chronologique de la semaine chez les Égyptiens (1). Mais, sans avoir besoin de discuter ici ce que leur interprétation présente en elle-même d'inexact, on sait indubitablement aujourd'hui, par les monuments, que les Égyptiens subdivisaient la série des jours en périodes de dix, et non de sept. Bailly attribue également l'emploi de la semaine aux Assyriens, aux Indiens, aux Chinois, en n'apportant d'ailleurs aucune preuve de cette assertion, ce qui pouvait lui sembler superflu, puisqu'il la supposait déjà existante, avec les mêmes relations entre les jours et les pla-

(1) Hérodote, lib. II, c. 82. Dion Cassius, *Hist. Rom.*, lib. XXXVII, § 123, 124.

nètes, chez son peuple antédiluvien (1). Laplace, admettant ces opinions comme des faits assurés, en a encore étendu davantage les conséquences (2). « La semaine, dit-il, depuis « la plus haute antiquité où se perd son origine, circule sans « interruption à travers les siècles, en se mêlant aux calen- « driers successifs des différents peuples. Il est très-remar- « quable qu'elle se trouve identiquement la même sur toute « la terre, soit relativement à la dénomination de ses jours, « réglée sur le plus ancien système d'astronomie, soit par « rapport à leur correspondance au même instant physique. « C'est peut-être le monument le plus ancien et le plus incon- « testable des connaissances humaines. Il paraît indiquer « une source commune d'où elles se sont répandues. Mais le « système astronomique qui lui sert de base est une preuve de « leur imperfection à cette origine. » Le système que Laplace veut ici désigner est celui que Dion attribue aux Égyptiens concernant l'ordre des distances des planètes à la terre, ordre qu'ils auraient reproduit dans la période astrologique des rapports de ces astres avec les vingt-quatre heures du jour.

Les inductions que l'on avait voulu tirer des passages de Dion et d'Hérodote me paraissant plus que douteuses, et se trouvant particulièrement démenties quant aux Égyptiens, j'ai désiré savoir si l'antiquité de l'usage de la semaine, comme période chronologique, était prouvée, par des documents authentiques, ailleurs que chez les Hébreux, où on la voit mentionnée dès les premières pages de la Bible. J'ai consulté sur ce fait les érudits les plus spécialement versés

(1) Bailly, *Hist. de l'astr. ancienne*, livre III, § III.

(2) Laplace, *Exposition du système du monde*, chap. III.

dans l'étude des monuments littéraires ou figurés, de la Perse, de l'Inde, de la Chine, et des autres nations anciennes où l'on avait dit que cette institution existait. Tous m'ont unanimement assuré n'en avoir découvert aucune trace. Ce concours des juges les plus compétents me paraît donc devoir faire présumer, comme très-vraisemblable, que la semaine a été d'abord exclusivement propre et particulière aux Hébreux; qu'elle a été communiquée aux autres nations avec les traditions bibliques; et qu'enfin, introduite par le christianisme dans le calendrier romain, elle s'est répandue avec ce calendrier chez tous les peuples où les idées chrétiennes avaient pénétré. Ceci explique, sans nul effort, pourquoi, dans tous les pays où on la rencontre, on la trouve invariablement composée du même nombre de jours, attachés aux dénominations des sept planètes dans le même ordre de succession, et employés partout, simultanément, à désigner la même révolution physique du soleil. Au reste, cette question vient d'être discutée spécialement, avec tous les secours de l'érudition et de la critique, par un jeune savant très-distingué, M. Alfred Maury; et l'on trouvera, à la suite du présent chapitre, dans la note 1re, un extrait de son travail, qu'il a bien voulu me communiquer. La conclusion à laquelle il arrive, confirme et justifie les doutes que je viens d'exprimer.

9. J'ai dit que, dans notre calendrier chrétien, le jour civil commence au minuit vrai du méridien local. Ainsi, lorsqu'on emploie ce calendrier sous des méridiens divers, les jours de même dénomination, dans une même semaine, ont des origines différentes; d'où il suit que des heures pareilles correspondent à des instants physiques distincts. Mais les règles de leur succession locale restant identiques, ces instants ne

diffèrent entre eux que d'un intervalle constant, égal à la différence de longitude des méridiens sous lesquels on a opéré. Donc, toute observation faite dans un lieu donné, et datée en temps de ce lieu, se rapportera au temps de tout autre, en augmentant ou diminuant sa date primitive de cet intervalle constant, sans rien changer d'ailleurs à son énoncé.

10. Outre les divisions générales du temps que nous venons de définir, on emploie encore dans la chronologie certaines périodes d'années juliennes, appelées *cycles*, qui servent aux computations religieuses de l'Église chrétienne, ou qui se rapportent à d'anciens règlements de l'administration romaine, introduits par les empereurs. Il est indispensable de les spécifier, tant pour leur usage historique propre, que parce qu'on les a fait concourir à la formation d'une période plus étendue, adoptée aujourd'hui par tous les chronologistes et par les astronomes, comme échelle universelle des temps.

11. La première se nomme le *cycle solaire*. C'est une période de 28 années juliennes intercalées, après laquelle les jours de la semaine reviennent, dans le même ordre, aux mêmes jours de chaque mois. En effet, la semaine étant composée de sept jours, chaque année commune de 365 jours contient 52 semaines plus 1 jour. Si toutes les années avaient cette même durée, les jours excédants réunis formeraient une semaine complète après sept ans révolus. Mais les années bissextiles, qui reviennent de quatre ans en quatre ans, interrompent cet ordre, parce qu'elles contiennent un jour en sus des communes. Ce n'est donc qu'après sept bissextiles, ou quatre fois sept ans, que le cercle entier de ces inégalités se trouve révolu; et il en résulte ainsi une somme de 28 ans intercalés, pour la durée du cycle solaire. Dans ce calcul, on

n'a point égard à la suppression des bissextiles séculaires prescrite par la réforme grégorienne, l'emploi pratique du cycle solaire lui étant fort antérieur.

12. La deuxième période usitée en chronologie se nomme le *cycle lunaire*. C'est un intervalle de 19 années juliennes moyennes, chacune de $365^j,25$, après lequel les nouvelles lunes, et les diverses phases qui les suivent, reviennent, avec une très-petite erreur, à des jours de l'année dont le rang ordinal est le même que dans l'intervalle précédent, du moins si l'on calcule la marche de la lune d'après les seuls mouvements moyens. En effet, la révolution synodique de la lune, évaluée, par exemple, pour le siècle actuel, est, en moyenne, de $29^j,530588$; et sa durée, au temps d'Hipparque, était à peine plus longue de 6 unités sur la sixième décimale. En négligeant cette petite variation, qui n'est d'aucune importance pour des applications chronologiques, 235 révolutions pareilles comprennent $6939^j,688180$, ce qui représente, à une faible fraction de jour près, 19 années juliennes de $365^j,25$, lesquelles embrassent en somme $6939^j,75$. Le cycle lunaire est donc plus court que 19 années juliennes de $0^j,061820$ ou $1^h,29^m,1^s,25$ sexagésimales; ce qui produit un écart d'environ $\frac{1}{4}$ de jour en quatre cycles, comprenant 76 années juliennes intercalées. La période lunaire de 19 ans a été connue à la Chine depuis un temps immémorial; et je dirai plus loin comment elle y était employée en combinaison avec l'année solaire, que l'on supposait alors être exactement de $365^j\frac{1}{4}$. Elle fut aussi introduite, sous des formes à peu près pareilles, mais beaucoup plus tard, dans le calendrier luni-solaire des Grecs, comme je le dirai encore. L'Église chrétienne la leur a empruntée, et en a conservé l'usage, en

corrigeant son erreur. Elle l'emploie aujourd'hui encore pour déterminer, dans chaque année, julienne ou grégorienne, l'époque de la pleine lune vernale, à laquelle la fête de Pâques est rattachée par les règles canoniques. Mais cette dernière application sort du cadre que je me suis tracé (1).

13. Multipliez les nombres d'années du cycle solaire et du cycle lunaire l'un par l'autre, c'est-à-dire 28 par 19 : le produit sera 532. Conséquemment, si les deux cycles embrassaient en réalité des nombres complets de révolutions moyennes des deux astres, après chaque période pareille comprenant 532 années juliennes, les jours juliens d'égale dénomination reviendraient successivement en correspondance avec des phases pareilles de l'année solaire ; comme aussi les phases lunaires se trouveraient revenir aux mêmes jours de la semaine et au même quantième du mois. Ces propriétés numériques furent signalées par Denys *le Petit*, moine chrétien, renommé pour sa science chronologique, lequel vivait à Rome, au temps de l'empereur Justinien ; et il s'en appuya pour présenter les périodes de 532 ans, comme pouvant servir de grand cycle pascal. C'est le même religieux qui a introduit et fait adopter dans la chrétienté l'usage de compter les années romaines à partir de celle à laquelle on rapporte l'incarnation du Christ, comme nous le faisons aujourd'hui, au lieu de les compter à partir de l'ère de Dioclétien, c'est-à-dire de l'année où ce persécuteur des chrétiens était parvenu à l'empire, comme on le pratiquait généralement alors dans tous les pays où le calendrier julien

(1) On trouve tous les détails désirables sur cet objet dans le livre VIII de l'Astronomie de Lalande, aux articles où il traite de la réforme grégorienne.

était employé. Ces périodes de 532 ans furent appelées, du nom de leur auteur, *dionysiennes*, et aussi *victoriennes*. Mais leur usage n'a pas prévalu parmi les chronologistes. Pétau en parle avec détail dans la 2^e^ partie du *Rationarium temporum*, page 27. Je les mentionne seulement, pour qu'on ne soit pas trompé par l'apparence d'antiquité que semblerait présenter leur dénomination (1).

14. Enfin, on emploie encore dans la chronologie une troisième espèce de cycle, appelé le *cycle des indictions*, et qui embrasse quinze années juliennes consécutives, tant communes que bissextiles, dans l'ordre où l'intercalation les amène. Cette période, purement numérique, a été introduite dans l'administration romaine sous les empereurs. On ne connaît pas avec certitude le motif de son adoption; mais on présume qu'elle s'appliquait à des actes judiciaires ou administratifs, qui se faisaient à des époques ainsi réglées (2).

15. Non-seulement les trois cycles dont nous venons de parler s'emploient en chronologie comme périodes collectives, mais le rang ordinal que chaque année y occupe sert de caractère pour la désigner. Par exemple, si une année est la première, la deuxième, la troisième, etc., d'un cycle lunaire

(1) Les deux lettres écrites par Denys le Petit sur le calendrier chrétien sont insérées à la fin du tome II du traité de Pétau, intitulé *Doctrina temporum*. Toutes les particularités relatives à ce sujet sont exposées et discutées en détail au livre XII du même ouvrage.

(2) Le cycle des indictions fut aussi employé à Constantinople lorsque le siége de l'empire romain y fut transféré. Dans les fragments d'un commentaire sur les tables manuelles de Ptolémée, composé par l'empereur Héraclius, l'indiction est mentionnée à titre de caractère ordinal des années. Il l'appelle ἐπινέμησις, *distributio*.

de dix-neuf ans, on dit qu'elle a 1, 2, 3..., de cycle lunaire; et on la rapporte aux autres cycles par des expressions analogues, tirées de son rang dans chacun d'eux. Le nombre qui marque ainsi sa place dans le cycle lunaire, avait, dans les anciens calendriers luni-solaires, une application usuelle d'une importance spéciale; parce qu'il indiquait si cette année-là devait être composée de douze lunaisons ou de treize, et qu'il servait aussi pour connaître comment les nouvelles et les pleines lunes moyennes s'y trouvaient distribuées. J'aurai plus loin l'occasion de revenir sur cette application, quand j'analyserai le calendrier des Grecs. Ici je me bornerai à dire que le nombre qui marquait ainsi le rang des années dans le cycle lunaire, a été appelé LE NOMBRE D'OR; soit à cause de l'utilité qu'on lui trouvait, soit parce que l'usage avait prévalu au moyen âge d'indiquer ce nombre en lettres d'or, dans les calendriers des livres d'église.

16. Si les années de nos trois cycles partaient simultanément d'une époque commune, et qu'on y eût placé l'ère chrétienne, alors, en comptant de cette origine, on aurait eu un cycle d'indiction complet après 15 ans, un cycle lunaire complet après 19 ans, et un cycle solaire complet après 28 ans. On aurait donc pu continuer indéfiniment cette succession, en recommençant à compter 1 à la fin de chaque cycle. Alors, en divisant la somme des années écoulées depuis l'ère, par les nombres respectifs 15, 19, 28, l'opération, effectuée sans reste, aurait indiqué des cycles accomplis; et les restes, s'il en existait, auraient exprimé le rang ordinal de l'année dans chaque cycle. Mais les choses ont été arrangées différemment. Lorsque notre ère chrétienne actuelle fut adoptée, sous Justinien, le calendrier julien était

depuis longtemps établi, et en usage. Chaque jour romain avait son rang et son nom propre dans la semaine de sept jours, ce qui constituait un cycle solaire déjà en vigueur. Chaque année avait aussi son rang légal dans le cycle des indictions. Enfin, l'Église chrétienne déterminait l'époque de la Pâque, d'après un cycle lunaire de 19 ans, qui commençait, comme nous le verrons plus tard, à l'avénement de Dioclétien; et ainsi, chaque année courante avait son rang déjà réglé dans ce cycle. On ne changea rien à ces usages. On ne fit que reporter l'origine du calendrier chrétien au 1^er^ janvier de l'année romaine à laquelle la nativité du Christ était supposée correspondre, *historiquement.* Cette convention faite, et le choix de l'année étant admis, on eut seulement à remonter jusque-là, dans chaque cycle, par un calcul rétrograde, en partant des caractères de l'année courante; et il en résulta que l'année 1 du calendrier chrétien ainsi définie, avait pour cycle solaire 10, pour cycle lunaire 2, et pour cycle d'indiction 4. Sur cela, il faut remarquer, que, dans cette application rétrospective, le cycle des indictions dut être ramené ainsi fictivement fort en arrière de l'époque où il fut réellement institué. Car l'année 1 de notre ère actuelle concorde avec l'année julienne 46, et tombe sous le règne d'Auguste. Or, on ne trouve pas ce cycle mentionné alors.

Les valeurs des cycles, pour l'année + 1 de l'ère chrétienne, étant 10, 2, 4, si l'on retranche l'unité de chacun de ces nombres, on aura les constantes initiales qui, ajoutées au rang ordinal + N de toute autre année postérieure à l'ère, exprimeront son rang, compté depuis l'origine de chaque cycle. Les nombres qui lui appartiennent dans les cycles courants seront ainsi les résidus respectifs des divisions suivantes:

Pour le cycle solaire..... résidu de $\frac{N+9}{28}$;

Pour le cycle lunaire..... $\frac{N+1}{19}$;

Pour le cycle d'indiction.... $\frac{N+3}{15}$.

Lorsque la division se fera sans reste, l'année N sera la dernière du cycle dans lequel cela aura lieu.

Ces formules s'appliqueront également aux années antérieures à l'ère, en les comptant à la manière des astronomes, c'est-à-dire en y faisant d'abord N nul, puis négatif indéfiniment. Si l'année ainsi placée est désignée chronologiquement, et que son rang ordinal antérieur à l'ère soit N′, on devra prendre N égal à $-(N'-1)$.

17. On évite ces distinctions de sens et de signe, en classant la série totale des années juliennes dans une période continûment croissante, depuis une origine qui remonte au delà de tous les besoins de l'histoire. Telle est la période imaginée par Jules Scaliger, et appelée *julienne* d'après son prénom. Elle est aujourd'hui employée universellement par les chronologistes, comme échelle générale des temps.

Pour la former, effectuez le produit des trois nombres 28, 19, 15. Vous aurez ainsi une période de 7980 années juliennes complétement intercalées, où les trois cycles, le solaire, le lunaire et celui des indictions, partant de la première comme d'une origine commune, accompliront ensuite séparément leurs périodes propres, sans concorder jamais tous les trois ensemble, si ce n'est à la dernière; ce qui tient à ce que leurs trois nombres régulateurs sont premiers entre eux. Ainsi, entre ces deux termes extrêmes, ils se rencon-

treront mutuellement, dans toutes les combinaisons possibles de phases, sans qu'il y en ait deux où leur assemblage soit complétement pareil. Or, j'ai dit que l'année 1 du calendrier chrétien avait, de cycle solaire 10, de cycle lunaire 2, et de cycle d'indiction 4. Conséquemment, pour la placer dans notre période générale, il faut trouver un nombre entier, n'excédant pas 7980, et tel qu'en le divisant par 28, ou 19, ou 15, on ait respectivement pour restes 10, 2, 4. Ce problème peut se résoudre directement par une méthode algébrique qui sera exposée en note à la fin du présent chapitre. Mais ici je me bornerai à dire que l'unique nombre qui remplisse les conditions proposées est 4714, comme on peut en effet s'en convaincre *à posteriori*, en le soumettant aux trois divisions indiquées. D'après cela, si l'on écrit la série des années du calendrier chrétien conformément à la notation que les astronomes ont adoptée, leur concordance générale avec celles de la période julienne s'établira sans peine, en faisant marcher les unes et les autres par d'égales différences, à partir du terme commun que nous venons d'assigner. C'est ce que montre le tableau suivant, où les années bissextiles des deux séries sont marquées par la lettre B mise en exposant.

						ÈRE.					
Calendrier chrétien astronomique.	$-N$	-4^B	-3	-2	-1	0^B	$+1$	$+2$	$+3$	$+4^B$	$+N$
Période julienne.	$4713-N$	4709^B	4710	4711	4712	4713^B	4714	4715	4716	4717^B	$4713+N$

D'après cela, nommons P le rang ordinal d'une année quelconque dans la période julienne, et N le rang ordinal de cette même année dans le calendrier chrétien, en l'y sup-

posant inscrite conformément à l'usage des astronomes: on aura évidemment cette relation générale :

$$P = 4713 + N, \qquad \text{ou} \quad N = P - 4713;$$

N pouvant être positif, nul, ou négatif; et P invariablement positif, mais non pas nul.

En vertu de la concordance ici établie, le commencement numérique de la période julienne est antérieur à l'ère chrétienne d'un nombre d'années exprimé par la constante 4713. On peut donc faire entrer dans cette période tous les événements historiques fixés par des dates certaines. Car aucun d'eux ne remonte à plus de 4000 ans avant l'ère chrétienne, ni même à beaucoup près aussi loin. Notre tableau montre que l'année 4713 de la période est bissextile et termine une phase quatriennale d'intercalation. Or, le nombre 4713 est de la forme $4m + 1$, m étant un nombre entier positif quelconque. Toutes les autres années bissextiles de la période répondent ainsi, de quatre en quatre, aux diverses valeurs que m peut prendre. Si on le fait nul, cette forme générale se réduit à 1, ce qui montre que la période commence par une bissextile. La succession de ses premières années procède donc ainsi :

$$1^B,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5^B,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9^B \ldots\ldots \text{ etc.}$$

18. Lorsque l'on note les années antérieures à l'ère chrétienne, comme le font les chronologistes, leur transport dans la période julienne s'opère par deux règles distinctes, avant et après l'ère. Cela est rendu sensible par le tableau suivant, où l'on voit la marche simultanée des deux séries.

ÈRE.

Calendrier chrétien chronologique. N		5ª	4	3	2	1ª	1	2	3	4ª	5		
Période julienne. . . . . 4714 — N		4709ª	4710	4711	4712	4713ª	4714	4715	4716	4717ª	4718		4713 + N

Alors, si l'on nomme toujours P et N les numéros des années qui se correspondent, dans les deux séries, N devant être considéré comme positif et jamais nul, des deux côtés de l'ère, on aura:

Avant l'ère chrétienne, $P = 4714 - N$; $N = 4714 - P$.
Après l'ère chrétienne, $P = 4713 + N$; $N = P - 4713$.

Pour les années postérieures à l'ère, la réduction est la même que dans la notation astronomique; pour les antérieures, elle est différente : ce qui est au désavantage de l'uniformité. Mais les chronologistes étaient habitués à cet usage bien avant que les astronomes eussent songé à le simplifier; et ils y ont persisté depuis, non sans motif. Je devrai donc m'y conformer aussi dans les interprétations de leurs dates, et dans les énoncés qui se rattacheront à leurs travaux.

19. La période julienne que nous venons de former, n'est pas autre chose que le calendrier chrétien procédant à partir d'une ère différente. Toutes les conditions d'énumération des années, des jours, des heures y restent d'ailleurs les mêmes que dans ce calendrier. On pourra donc l'approprier également aux méridiens divers où il sera en usage; et les dates qu'il aura servi à fixer, se transporteront à tout autre méridien, en leur appliquant la correction exigée par l'intervalle des longitudes, conformément aux principes exposés dans le § 9.

20. Lorsque notre calendrier chrétien fut institué, le calendrier établi par Jules César était en vigueur à Rome,

et dans tout l'empire. On ne fit, comme je l'ai dit, que placer conventionnellement l'ère chrétienne à un de ses points, sans autre changement. On conserva ainsi la succession déjà usitée des semaines et des jours, ainsi que les noms par lesquels ceux-ci étaient désignés. Concevez donc, qu'à cette époque, on ait pris, dans le calendrier courant, une période de 28 années juliennes complètes et consécutives, dont la première se trouvait avoir 1 de cycle solaire; et qu'on ait écrit, de suite, les noms des jours par lesquels chacune de ces 28 années commençait. Ce même ordre de succession des jours se reproduira sans aucun changement dans tous les autres cycles solaires, antérieurs et postérieurs, qui auront été ou seront établis en continuité avec celui-là, soit avec le caractère d'institution sociale, soit comme procédé artificiel d'énumération chronologique. Donc, puisque notre grande période julienne commence avec un cycle solaire, la liste ainsi formée, d'après un usage actuel et contemporain, se trouvera, par une computation rétrograde, être numériquement applicable à ses 28 premières années. C'est pourquoi elle leur est respectivement annexée dans le tableau suivant qui nous sera d'un fréquent service pour vérifier et assurer les énoncés des dates que l'on trouve dans les astronomes du moyen âge. Car ils ont presque toujours indiqué le jour de la semaine auquel elles se rapportaient, faisant ainsi rétrograder l'emploi du cycle des jours, et de leurs dénominations romaines, bien au delà des temps où ils ont commencé à être employés. La dernière colonne du tableau présente une notation littérale que j'expliquerai dans un moment. Les années bissextiles y sont désignées par la lettre B mise en exposant comme je l'ai fait déjà plus haut.

et comme je . .erai toujours par la suite, sans avoir désormais besoin de le rappeler.

RANG ORDINAL DES ANNÉES du premier cycle solaire de la période julienne.	DÉSIGNATION DU JOUR DE LA SEMAINE qui les commence, ou valeur de la lettre initiale A.	LETTRES DOMINICALES propres A CHACUNE DE CES ANNÉES.
1[B]	Lundi.	G.F
2	Mercredi.	E
3	Jeudi.	D
4	Vendredi.	C
5[B]	Samedi.	B.A
6	Lundi.	G
7	Mardi.	F
8	Mercredi.	E
9[B]	Jeudi.	D.C
10	Samedi.	B
11	Dimanche.	A
12	Lundi.	G
13[B]	Mardi.	F.E
14	Jeudi.	D
15	Vendredi.	C
16	Samedi.	B
17[B]	Dimanche.	A.G
18	Mardi.	F
19	Mercredi.	E
20	Jeudi.	D
21[B]	Vendredi.	C.B
22	Dimanche.	A
23	Lundi.	G
24	Mardi.	F
25[B]	Mercredi.	E.D
26	Vendredi.	C
27	Samedi.	B
28	Dimanche.	A

On voit d'abord, dans la deuxième colonne, que le jour initial des années consécutives avance d'un rang, dans le cycle de la semaine, chaque fois que l'année qui vient de finir est commune; et qu'il avance de deux rangs lorsqu'elle est bissextile. La raison en est simple. Toute année commune contient 365 jours, que l'on peut séparer en 364 + 1. Les 364 premiers forment 52 semaines de sept jours complètes; et le dernier, recommençant une semaine nouvelle, se trouve ainsi de même nom que le premier de tous. Alors, le jour initial de l'année suivante, a le nom qui vient immédiatement après celui-là, dans la série des sept. Mais, pour les années bissextiles, le nombre des jours étant de 366, ou 364 + 2, il y a 2 jours d'excès au delà des 52 semaines; et le jour initial de l'année qui suit se trouve ainsi reporté, non pas d'un seul rang, mais de deux, après celui par lequel l'année bissextile précédente avait commencé.

Au moyen de ce tableau, il devient très-facile de résoudre le problème suivant, qui fournit un élément fort utile pour vérifier les énoncés de dates rapportées par les historiens ou les astronomes, lorsqu'on trouve l'occasion de l'appliquer.

Un jour du calendrier chrétien étant désigné par sa date d'année, de mois et de quantième du mois, trouver sa dénomination dans le cycle de la semaine?

Premier exemple. On trouve dans les auteurs orientaux beaucoup d'observations datées de l'ère d'Iezdegerdh, c'est-à-dire de l'époque à laquelle un prince de ce nom monta sur le trône de Perse, et institua un nouveau calendrier qui a été fort employé par les astronomes. Les éclipses ainsi datées prouvent que l'instant physique, d'où part cette énumé-

ration des temps, tombe dans la journée du 16 juin de l'année chrétienne 632. A quel jour de la semaine ce 16 juin se trouve-t-il répondre?

L'année 632 de notre ère coïncide avec l'année de la période julienne 4713 + 632 ou 5345. Ce nombre divisé par 28 donne au quotient 190, et pour reste 25. Cette épreuve montre qu'elle est la 25^{e} d'un cycle solaire. A ce titre, notre tableau nous apprend qu'elle commence par un mercredi.

Le tableau la présente aussi comme bissextile. Cela était déjà évident *à priori*, puisque le nombre 632 est divisible par 4 sans reste; ou encore, parce que le nombre 5345 est de la forme $4m + 1$. Dans une pareille année, le 16 juin est le 168^{e} jour, ainsi qu'on le voit dans le tableau placé à la fin du présent chapitre. Or, le nombre 168 étant divisé par 7, donne au quotient 24, sans reste. Le jour désigné 16 juin est donc le dernier d'une période hebdomadaire qui commence par un mercredi : c'est conséquemment un mardi. En effet, tous les astronomes orientaux placent l'ère d'Iezdegerdh à un mardi, ce qui est conforme avec les autres caractères par lesquels ils la définissent.

Second exemple. Ptolémée, dans l'Almageste, compte les temps à partir de l'avénement du roi chaldéen Nabonassar au trône de Babylone. Cette époque, devenue ainsi le point de départ de tous ses calculs, est appelée par les astronomes l'ère de Nabonassar. Les éclipses qu'il y a rapportées prouvent qu'elle tombe dans la journée du 26 février de l'année chrétienne proleptique 747, date chronologique. On demande à quel jour de la semaine répond ce 26 février?

L'année proleptique 747 des chronologistes coïncide avec l'année de la période julienne 4714 — 747 ou 3967. Ce nom-

bre, divisé par 28, donne au quotient 141, et pour reste 19. Elle est donc la 19^{e} d'un cycle solaire; et à ce titre notre tableau nous montre qu'elle commence par un mercredi. Elle y est aussi portée comme étant commune; c'est en effet ce qu'annonçait le nombre 3967 qui la désigne, puisqu'il est de la forme $4m + 3$ et non pas $4m + 1$.

Dans une année pareille, et même dans toute autre, le 26 février est le jour 57^{e}. Ce nombre, divisé par 7, donne au quotient 8 et pour reste 1. Le jour désigné 26 février est donc le premier d'une période hebdomadaire commençant par mercredi : c'est donc aussi un mercredi. L'astronome arabe Ebn-Iounis place en effet l'ère de Nabonassar à ce jour de la semaine, dans une table où il donne sa concordance avec plusieurs autres; ce qui montre qu'il l'a interprétée correctement.

Dans les calculs de ce genre, si la division par 28 ou par 7 s'effectue sans reste, le dividende devra être considéré comme indiquant la dernière année d'un cycle solaire, ou le dernier jour d'un cycle de sept.

21. La continuité d'application de ces deux cycles aux révolutions physiques et consécutives du soleil a été interrompue en l'an 1582 par la réforme grégorienne, qui supprima du calendrier julien, admis jusqu'alors, dix jours que l'on y aurait énumérés. Car, par le fait de cette prescription, l'année 1582, qui aurait dû embrasser 365 révolutions solaires, se trouva en comprendre seulement 355. Le même règlement occasionna aussi un saut brusque dans l'application physique de l'ancien cycle lunaire de 19 ans, et du cycle de 15 des indictions romaines. Mais les dates que nous aurons à considé-

rer, dans le présent mémoire, étant toutes antérieures à cette modification du calendrier julien, les méthodes précédentes s'y appliqueront toujours; ce qui me dispense de développer les conséquences complexes qu'elle a entraînées. J'en indiquerai seulement tout à l'heure quelques particularités fort simples, qui pourront occasionnellement nous servir. Ici, je me bornerai à faire remarquer que, malgré la restriction anomale donnée physiquement à l'année grégorienne 1582, dans son application au ciel, l'énumération des années des trois cycles, solaire, lunaire, et des indictions, a continué de se faire nominalement, dans nos éphémérides grégoriennes, comme si leur application au ciel n'avait pas éprouvé d'intermittence. Ainsi, en prenant pour exemple l'année actuelle 1849, son rang ordinal dans la période julienne, abstraction faite des jours réformés, est 4713 + 1849 ou 6562, qui, divisé par les nombres 28, 19, 15, donne pour restes 10, 7, 7. Aussi la Connaissance des temps marque-t-elle cette année-là comme ayant 10 de cycle solaire, 7 de cycle lunaire ou nombre d'or, et 7 de cycle d'indiction. La considération des jours supprimés n'intervient que dans l'emploi de ces indices.

22. J'arrive maintenant à la dernière colonne de notre tableau, qui contient ce que l'on appelle les LETTRES DOMINICALES. Elles sont ainsi nommées parce qu'elles servent à marquer, dans le calendrier de chaque année, à quelle place les dimanches se rencontrent dans la série ordinale des jours, quand on connaît la dénomination de celui qui la commence. Ce jour initial, quel qu'il soit, est toujours conventionnellement désigné par la lettre A; et les suivants le sont par les lettres subséquentes de l'alphabet dans l'étendue d'une période

hebdomadaire, comme on le voit dans les deux lignes ici tracées en correspondance.

Rang ordinal des premiers jours de l'année.	1	2	3	4	5	6	7
Lettres qui les désignent.....	A	B	C	D	E	F	G

Quand cette première période est achevée, on en recommence une seconde avec les mêmes lettres; puis une troisième, une quatrième; et l'on continue ainsi à répartir les sept lettres sur tous les jours de l'année jusqu'à la fin, sans interruption, lorsqu'il s'agit d'une année commune de 365 jours. Ce cas étant le plus simple, je le considérerai d'abord. Parmi les sept premiers jours de l'année, il s'en trouve toujours nécessairement un qui est un dimanche. Supposons que ce soit le 4ᵉ. Il sera marqué de la lettre D dans cette première période; et il reviendra constamment à cette même lettre dans toutes les périodes suivantes, puisque la notation littérale s'y continue jusqu'à la fin sans interruption. Alors D sera la lettre dominicale propre à cette année-là; et si on l'écrit à côté de son millésime, on pourra, d'après ce seul caractère, assigner non-seulement les places que les dimanches y occupent, mais trouver la dénomination d'un quelconque des jours qui la composent, quand son rang ordinal sera donné; puisque l'on connaîtra le nom du premier d'entre eux qui est toujours désigné par A. Les années 3ᵉ, 14ᵉ et 20ᵉ de notre tableau présentent des cas auxquels cet exemple s'applique. Ayant D pour lettre dominicale, elles commencent toutes par un jeudi.

Puisqu'une année commune de 365 jours contient 52 périodes hebdomadaires complètes plus 1 jour, le dernier de tous est de même dénomination que le premier. Alors le jour

initial de l'année qui suit, a la dénomination qui est immédiatement consécutive, dans le cycle de la semaine; et ainsi la lettre A, qui le représente toujours, prend une signification plus avancée d'une unité, dans la semaine, qu'elle ne l'avait dans l'année commune qui précédait. Le premier dimanche de la nouvelle année se rapproche donc aussi d'une unité du jour initial; et, conséquemment, la lettre qui le désigne, retrograde d'un rang dans la série des sept. Ce resultat peut se vérifier dans notre tableau, pour toutes les années qui succèdent à une année commune.

Les années bissextiles, ayant 366 jours, se prolongent de 2 jours par delà 52 semaines complètes. Le jour initial de l'année qui les suit avance donc, sur le leur, de deux rangs dans le cycle de la semaine; et ainsi, le premier dimanche de l'année nouvelle se trouve ramené de deux places vers son origine. La lettre qui le désigne rétrograde donc de deux rangs dans la liste des sept. C'est ce que l'on peut vérifier à tous les passages pareils que notre tableau présente: du moins si l'on s'attache seulement à la première colonne de lettres dominicales qu'on y voit annexées.

Mais chaque année bissextile y est marquée d'une double lettre; et la deuxième est précisément celle dont l'emploi, comme dominicale, se trouverait supprimé en passant de cette année à la suivante, si le cycle des sept lettres était employé continûment, depuis le commencement de l'année bissextile jusqu'à sa fin. Ceci est le résultat d'une modification particulière, apportée à la convention générale. Dans une année commune de 365 jours, le 1er mars a pour rang ordinal 60 ou 56+4. Il est donc alors le 4^{e} d'une période hebdomadaire dont le 1er jour est désigné par la lettre A:

et, à ce titre, sa lettre propre est D. Mais, dans les années bissextiles, où le jour additionnel s'intercale à la fin de février, le 1er mars devient le 61e, et à ce titre il devrait avoir la lettre E. Or, par une convention spéciale on lui conserve encore, dans ce cas, la lettre D, de même qu'aux années communes; et l'on note le 29 février exceptionnellement. La lettre D reste ainsi affectée au 1er mars de toutes les années, comme la lettre A à leur jour initial. Ce pas rétrograde qui est alors imprimé à la série des sept lettres fait nécessairement reculer aussi la lettre dominicale d'une place, à partir du 1er mars inclusivement, pour tout le reste de l'année bissextile. Elle reparaît donc à son rang, avec son caractère d'application, pour tout ce reste; et, par cet artifice, les sept lettres du cycle redeviennent dominicales tour à tour, sans interruption, comme on le voit dans notre tableau.

23. La suppression des dix jours, effectuée en 1582, par l'ordonnance grégorienne, introduisit pareillement, à cette époque, une intermittence brusque dans l'emploi du cycle des lettres dominicales. La suppression ultérieure de trois bissextiles centenaires sur quatre, qui est une des règles du nouveau calendrier, a encore produit depuis, en 1700, 1800, et 1900, des intermittences analogues, quoique plus restreintes. Mais une remarque très-simple suffit pour pouvoir renouer toujours fort aisément le fil de continuité que ces accidents viennent rompre.

Les dix jours retranchés du calendrier julien, en 1582, ont été pris sur le mois d'octobre, du 5 au 15. Le 4 de ce mois était un jeudi julien. Le lendemain aurait dû être appelé vendredi 5. On l'appela, dans le nouveau calendrier, vendredi 15, ce qui lui conservait son nom, son rang dans la

semaine, en lui attribuant seulement un autre quantième dans le mois, lequel se trouvait ainsi raccourci de dix jours. Or, dans le calendrier julien, continué sans interruption, le 15 octobre tombait un lundi. D'après cela, pour un même quantième du mois et de l'année, la dénomination de ce jour grégorien était de trois rangs en arrière de celle du jour julien, dans le cycle de la semaine. Cet écart se serait maintenu tel indéfiniment, dans tout le parallélisme ultérieur des deux calendriers, sans la suppression des bissextiles centenaires que l'ordonnance grégorienne prescrivait. Mais il dut s'accroître d'un rang à chacune d'elles, puisque le mois de février grégorien de ces années-là, n'a que 28 jours, tandis que le julien en a 29. D'après ces règles, les dénominations des jours des deux calendriers, qui correspondent aux mêmes quantièmes des mois, sont assujetties aux relations que spécifie le tableau suivant, dont la loi indéfinie est évidente :

DATES GRÉGORIENNES.	DÉSIGNATION DES PLACES RELATIVES que les jours d'égal quantième mensuel des deux calendriers occupent dans le cycle de la semaine.
Du 15 octobre 1582 au 28 février 1700 inclusivem.	Jour Grégorien = Jour Julien — 3 Rangs.
Du 28 février 1700 au 28 février 1800 inclusivem.	Grégorien = Julien — 4 ou Julien + 3.
Du 28 février 1800 au 28 février 1900 inclusivem.	Grégorien = Julien — 5 ou Julien + 2.
Du 28 février 1900 au 28 février 2100 inclusivem.	Grégorien = Julien — 6 ou Julien + 1.

Au moyen des indications que ce tableau donne, tous les problèmes relatifs à des dénominations de jours et de lettres dominicales se résolvent aussi facilement pour le calendrier

grégorien que pour le julien, en passant par celui-ci d'abord. Quelques exemples suffiront pour montrer la marche du calcul dans tous les cas; car elle est toujours identiquement la même.

1° A quel jour de la semaine a commencé l'année grégorienne 1583; et, par suite, quelle a dû être sa lettre dominicale?

L'année julienne de même dénomination a pour rang, dans la période julienne, 4713+1583 ou 6296. Ce nombre, divisé par 28, donne pour reste 24, qui marque son rang dans le cycle solaire. A ce titre, d'après le tableau de la page 240, elle commençait par un mardi julien. Le jour grégorien de même quantième était en arrière sur celui-là de 3 rangs dans le cycle de la semaine: c'était donc un samedi; et ainsi la lettre dominicale de l'année grégorienne 1583 était B.

2° A quel jour de la semaine a commencé l'année grégorienne 1748, et quelle était sa lettre dominicale?

L'année julienne de même dénomination a pour rang, dans la période julienne, 4713+1748 ou 6461. Ce nombre, divisé par 28, donne pour reste 21, qui marque son rang dans le cycle solaire. A ce titre, d'après le tableau de la page 240, elle commençait par un vendredi. Le jour grégorien de même quantième était en arrière sur celui-là de 4 rangs, ou en avance de 3, dans le cycle de la semaine: c'était donc un lundi. Ainsi l'année grégorienne 1748, qui était bissextile, avait pour double lettre dominicale G. F. Ce sont en effet les caractères qui lui sont attribués dans la Connaissance des temps de cette même époque.

3° A quel jour de la semaine a commencé l'année grégorienne 1849, et quelle était sa lettre dominicale?

L'année julienne de même dénomination a pour rang,

dans la période julienne, 4713+1849 ou 6562. Ce nombre, divisé par 28, donne pour reste 10, qui marque son rang dans le cycle solaire. A ce titre, d'après le tableau de la page 240, elle commence par un samedi. Le jour grégorien de même quantième était en arrière sur celui-là de 5 rangs dans le cycle de la semaine, ou en avance de 2 : c'était donc un lundi; et ainsi la lettre dominicale de cette année grégorienne était G. Ce sont là en effet les caractères qui lui sont attribués dans la Connaissance des temps pour 1849.

24. Pour les calculs que nous aurons ultérieurement à faire, il nous sera fréquemment nécessaire de savoir quelle place une année désignée de la période julienne occupe dans le cycle d'intercalation quatriennal. On le voit tout de suite d'après la forme du nombre P, qui exprime son rang ordinal dans la période; et ce n'est qu'une conséquence de celle que nous lui avons reconnue pour les années bissextiles. Car, P étant alors $4m + 1$, il croîtra d'une unité pour chacune des trois années communes subséquentes, comme le montre le tableau ci-dessous, dans lequel m désigne un nombre quelconque entier et positif.

FORME DU NOMBRE P.	PLACE DE L'ANNÉE DANS LE CYCLE QUADRIENNAL D'INTERCALATION.
$4m + 1$,	Année bissextile.
$4m + 2$,	1re après la bissextile.
$4m + 3$,	2e après la bissextile.
$4m + 4$, ou $4m'$,	3e après la bissextile.

25. Une année quelconque dont le rang est P étant désignée, on découvrira aisément à laquelle de ces quatre formes elle se rapporte; car il suffit de diviser P par 4, et de voir si le reste de la division est 1, 2, 3 ou 0. Cette détermination est nécessaire dans une infinité de circonstances. Elle l'est, en particulier, pour évaluer par différence, le nombre de jours, ou en général l'intervalle de temps, qui est compris entre deux dates données appartenant à des années distinctes P, P', établies pour un même méridien terrestre, ou pour des méridiens différents.

26. Afin d'établir ce calcul sur un type applicable à tous les cas qui peuvent se présenter, sans avoir besoin de faire, pour chacun d'eux, un raisonnement spécial, je dresse le tableau suivant, où j'inscris, par ordre de succession, le rang, la forme, et le caractère commun ou bissextil, des premiers groupes quatriennaux de la période générale. Leur mode de dérivation étant ainsi fixé, je place en regard, dans une troisième colonne, l'expression du nombre de jours qui se trouvent compris, entre l'instant physique pris pour origine de la période, sous un méridien désigné, et l'instant auquel commence le 1er janvier de chaque année, sous ce même méridien. Les 365 jours qui composent une année commune sont représentés symboliquement par la lettre C; et les années bissextiles sont désignées par la lettre B mise en exposant. Je suppose le mode de dérivation, ainsi que l'intercalation quatriennale, continués indéfiniment, sans égard à l'interruption, et aux modifications ultérieures, que la réforme grégorienne y a introduites en 1582. Il sera toujours facile d'appliquer ces particularités conventionnelles aux résultats obtenus dans l'hypothèse de la conti-

nuité, si le calcul devait occasionnellement s'étendre jusqu'à des temps aussi rapprochés de nous.

FORME DE L'ANNÉE considérée P.	SON RANG ORDINAL dans la PÉRIODE JULIENNE.	NOMBRE DE JOURS exprimant la distance de chaque 1er janvier au 1er janvier de l'année julienne qui commence la période.
$4(0) + 1$	1^B	0
$4(0) + 2$	2	$C + 1$
$4(0) + 3$	3	$2C + 1$
$4(0) + 4$	4	$3C + 1$
$4(1) + 1$	5^B	$4C + 1$
$4(1) + 2$	6	$5C + 2$
$4(1) + 3$	7	$6C + 2$
$4(1) + 4$	8	$7C + 2$
$4(2) + 1$	9^B	$8C + 2$
$4(2) + 2$	10	$9C + 3$
$4(2) + 3$	11	$10C + 3$
$4(2) + 4$	12	$11C + 3$
$4(3) + 1$	13^B	$12C + 3$
etc.	etc.	etc.

En nommant m le multiple de 4 qui est commun aux années d'une même période quatriennale, et désignant par x le nombre ordinal 1, 2, 3, 4 qui les distingue entre elles, la forme générale des termes contenus dans les trois colonnes du tableau peut s'écrire comme il suit :

$$4m + x \qquad P \qquad 4mC + (x-1)C + m + \gamma_x.$$

γ_x est un symbole qui doit être fait conventionnellement nul quand $x = 1$, ce qui arrive dans les années bissextiles ; et il doit être fait égal à $+1$ dans tous les autres cas. Avec

cette convention très-simple, l'expression algébrique ici formée est générale; et elle peut se vérifier par son application immédiate à chacun des termes du tableau, pour lesquels les nombres m et x sont donnés dans la première colonne.

Je suppose maintenant que la date d'un événement ou d'une observation soit fixée, dans une certaine année, au n^e jour, heure h. Sa distance au 1er janvier commençant de cette même année, exprimée en jours et heures, sera $(n-1)+h$. Donc, si l'on a deux dates distinctes ainsi exprimées, prises dans deux années P, P', celle-ci postérieure à l'autre, leurs distances respectives à l'origine de la période seront telles qu'on le voit ici.

FORME des années désignées.	DATE donnée dans l'année.	DISTANCE de chaque date a l'origine de la période, en jours et heures.
$4m+x$	Jour n^e, heure h	$4m\,C+(x-1)\,C+m+\gamma_x+n-1+h$
$4m'+x'$	Jour n'^e, heure h'	$4m'C+(x'-1)\,C+m'+\gamma_{x'}+n'-1+h'$

La différence de ces deux distances est l'intervalle de temps I, compris entre les deux dates désignées, toutes deux étant supposées établies pour le même méridien terrestre. Son expression générale, en jours et heures, sera donc :

(I) $I=(m'-m)(4C+1^j)+(x'-x)\,C+\gamma_{x'}-\gamma_x+n'-n+h'-h.$

Et il ne restera plus qu'à donner aux symboles algébriques leurs valeurs actuelles. Dans l'évaluation numérique du premier terme, le facteur $4C+1^j$ représente 1461 jours, ou 4 J, J désignant les $365^j,25$ dont se compose l'année julienne

moyenne non intercalée. Si l'on veut que l'intervalle de temps I soit exprimé en fonction de cet élément, comme cela est d'usage dans un grand nombre de calculs astronomiques et chronologiques, on fera symboliquement :

$$C = J - \frac{I}{4};$$

et, en remplaçant C par cette valeur, on obtiendra le résultat demandé.

27. Comme exemple d'application je prendrai la question suivante.

En calculant par nos tables astronomiques les époques absolues des éclipses que Ptolémée a mentionnées, et dont il a donné les distances à l'ère de Nabonassar, on trouve que l'instant physique, ainsi désigné comme point de départ de tous ses calculs, tombe dans l'année chrétienne proleptique 747, date chronologique ; au 26^{e} jour de février, à midi vrai du méridien d'Alexandrie, ou 12 heures vraies : ce qui, à l'époque ainsi désignée, coïncidait avec 10^{h} 26^{m} de temps moyen au méridien de Paris, l'origine de numération des jours étant à minuit.

Cette donnée étant admise, on demande combien il s'est écoulé de jours, d'heures et de minutes entre l'ère de Nabonassar et le 1er janvier de l'année + 1 de l'ère chrétienne, à 0^{h} de temps moyen sous le méridien de Paris, ce temps étant aussi compté de minuit.

28. Je transporte d'abord dans la période julienne les deux années désignées. La plus ancienne, — 747, est *antérieure* à l'ère chrétienne et datée chronologiquement. D'après cela, conformément à la règle établie § 18, il faut *retrancher* 747

de 4714. La différence 3967 exprimera son rang ordinal dans la période. En divisant ce nombre par 4, et séparant le reste, on voit qu'il a pour forme $4(991) + 3$ ou $4m + 3$. Il désigne donc une année commune, qui est la deuxième après une bissextile. Suivant la composition des mois juliens qui est mise en tableau à la fin du présent chapitre, le 26 février en est le 57^{e} jour.

Si cette même année eût été datée conformément à l'usage des astronomes, elle aurait dû être écrite -746. Mais alors, selon la règle établie § 17, pour la transporter dans la période julienne, il aurait fallu *retrancher* ce nombre de 4713, ce qui aurait donné pour reste 3967, comme précédemment.

Notre deuxième date d'année, $+1$, est *postérieure* à l'ère chrétienne. Il faut donc, dans un mode de notation comme dans l'autre, ajouter $+1$ à 4713. La somme 4714 exprimera son rang ordinal dans la période julienne. Ce nombre a pour forme $4(1178) + 2$ ou $4m' + 2$. Il désigne ainsi une année commune, qui est la première après une bissextile : le 1er janvier en est le 1er jour.

D'après ces identifications, les éléments symboliques de notre formule (I) auront les valeurs suivantes :

FORME des ANNÉES DÉSIGNÉES.					
$4(991) + 3$	$m = 991$	$x = 3$	$\gamma_x = 1$	$n = 57$	$h = 10^{h},26^{m}$
$4(1178) + 2$	$m' = 1178$	$x' = 2$	$\gamma_{x'} = 1$	$n' = 1$	$h' = 0$

Ceci étant substitué dans la formule (I), elle donne, pour l'intervalle des deux dates, en jours et heures :

$$187\,(4\mathrm{C} + 1^{j}) - \mathrm{C} - 56^{j} - 10^{h}\,26^{m},$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées, et les réductions auxquelles les produits se prêtent, de manière à rendre tous les termes du résultat positifs :

$$747\,\mathrm{C} + 130^{j} + 13^{h}\,34^{m}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer la lettre C par le nombre 365 qu'elle représente, et dont les unités, comme celles du nombre 130, sont des jours de 24 heures moyennes.

Si l'on veut exprimer ce même intervalle en années juliennes moyennes de $365^{j},25$, désignées par J, on fera

$$\mathrm{C} = \mathrm{J} - \frac{1^{j}}{4};$$

et comme $\frac{747^{j}}{4}$ font $186^{j},75$, c'est-à-dire $186^{j}\,18^{h}$, il deviendra

$$747\,\mathrm{J} - 56^{j}\,4^{h}\,26^{m},$$

ou, en s'arrangeant pour le composer de quantités toutes additives :

$$746\,\mathrm{J} + 309^{j}\,1^{h}\,34^{m}.$$

29. Ayant ainsi complétement expliqué l'emploi de la période julienne pour la notation continue des temps, je vais apprendre à y transporter les autres formes d'énumération qui ont le plus servi dans l'antiquité et dans le moyen âge pour dater les événements ou les observations astronomiques. La marche que je suivrai dans l'exposé de ces rapports sera toujours la même. Je commencerai par énoncer la date julienne avec laquelle coïncide l'instant initial, ou l'ère, du ca-

lendrier que je veux considérer, me réservant de justifier plus tard cette identification. Je dirai ensuite quelle a été, dans ce calendrier, l'origine conventionnelle du jour civil, ainsi que le mode d'assemblage des jours en mois, des mois en années. Passant alors de son emploi usuel à son application scientifique, j'exposerai les règles spéciales que les astronomes du temps se sont prescrites, pour y fixer les dates de leurs observations, par des énoncés qui les rendissent indépendants de la variabilité d'origine attribuée presque partout aux jours civils. Ayant ainsi fait connaître tous ces détails de conventions et d'usages, tels qu'on les a pratiqués, je prendrai quelques dates astronomiques originairement exprimées sous cette forme; en choisissant celles qui s'appliquent à des phénomènes célestes dont l'apparition est trop soudaine, et la durée trop courte, pour que leur observation puisse comporter une erreur d'un jour, même étant faite sans théorie, et à la vue simple. Telles sont les éclipses de soleil, de lune, et les élongations angulaires de ces deux astres l'un à l'égard de l'autre. Je transporterai ces dates dans la période julienne, d'après les principes généraux de concordance précédemment annoncés. Puis, appliquant nos tables astronomiques modernes à l'époque absolue ainsi définie, nous chercherons si le phénomène céleste a dû effectivement se produire à cette époque, au jour assigné, dans la portion de ce jour indiquée par l'observateur, sinon à l'heure précise qu'il avait marquée, du moins assez près de cette heure pour que l'écart puisse être légitimement attribué aux erreurs de ses déterminations, combinées avec les petites incertitudes que comportent nos tables elles-mêmes dans leur application rétrospective. Lorsqu'un accord pareil se réalisera pour toutes

les épreuves analogues que nous pourrons effectuer, nous acquerrons ainsi la certitude que l'ère ancienne d'où nous sommes partis a été fidèlement transportée dans la période julienne par nos définitions premières, et que toutes les autres particularités d'énumération du temps, propres au calendrier considéré, ont été réellement telles que nous les avions exposées d'abord.

3o. Parmi ces anciennes formes d'énumération, celle qui comprend la série des années égyptiennes datées de l'ère de Nabonassar est de beaucoup la plus riche; tant par le grand nombre d'observations que Ptolémée y a rattachées, que par sa connexion avec plusieurs autres calendriers dont l'usage a été très-répandu postérieurement, et qui en diffèrent seulement par quelques modifications conventionnelles. Je dois donc m'attacher d'abord à en exposer l'arrangement propre ainsi que la concordance avec notre période julienne générale. Mais auparavant, je compléterai le présent chapitre par les additions que j'ai annoncées dans le cours de sa rédaction, pages 225, 228, et 236.

TABLEAU DU RANG ORDINAL DES JOURS QUI COMPOSENT CHACUN DES DOUZE MOIS D'UNE ANNÉE JULIENNE.

JANVIER.			FÉVRIER.			MARS.		
ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.
1	1	1	1	1	32	1	0	60
2	2	2	2	2	33	2	1	61
3	3	3	3	3	34	3	2	62
4	4	4	4	4	35	4	3	63
5	5	5	5	5	36	5	4	64
6	6	6	6	6	37	6	5	65
7	7	7	7	7	38	7	6	66
8	8	8	8	8	39	8	7	67
9	9	9	9	9	40	9	8	68
10	10	10	10	10	41	10	9	69
11	11	11	11	11	42	11	10	70
12	12	12	12	12	43	12	11	71
13	13	13	13	13	44	13	12	72
14	14	14	14	14	45	14	13	73
15	15	15	15	15	46	15	14	74
16	16	16	16	16	47	16	15	75
17	17	17	17	17	48	17	16	76
18	18	18	18	18	49	18	17	77
19	19	19	19	19	50	19	18	78
20	20	20	20	20	51	20	19	79
21	21	21	21	21	52	21	20	80
22	22	22	22	22	53	22	21	81
23	23	23	23	23	54	23	22	82
24	24	24	24	24	55	24	23	83
25	25	25	25	25	56	25	24	84
26	26	26	26	26	57	26	25	85
27	27	27	27	27	58	27	26	86
28	28	28	28	28	59	28	27	87
29	29	29		29	60	29	28	88
30	30	30				30	29	89
31	31	31				31	30	90
							31	1

SUITE DU TABLEAU DE L'ANNÉE JULIENNE.

AVRIL.			MAI.			JUIN.		
ANNÉE commune. — Quantième du mois	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.
1	0	91	1	0	121	1	0	152
2	1	92	2	1	122	2	1	153
3	2	93	3	2	123	3	2	154
4	3	94	4	3	124	4	3	155
5	4	95	5	4	125	5	4	156
6	5	96	6	5	126	6	5	157
7	6	97	7	6	127	7	6	158
8	7	98	8	7	128	8	7	159
9	8	99	9	8	129	9	8	160
10	9	100	10	9	130	10	9	161
11	10	101	11	10	131	11	10	162
12	11	102	12	11	132	12	11	163
13	12	103	13	12	133	13	12	164
14	13	104	14	13	134	14	13	165
15	14	105	15	14	135	15	14	166
16	15	106	16	15	136	16	15	167
17	16	107	17	16	137	17	16	168
18	17	108	18	17	138	18	17	169
19	18	109	19	18	139	19	18	170
20	19	110	20	19	140	20	19	171
21	20	111	21	20	141	21	20	172
22	21	112	22	21	142	22	21	173
23	22	113	23	22	143	23	22	174
24	23	114	24	23	144	24	23	175
25	24	115	25	24	145	25	24	176
26	25	116	26	25	146	26	25	177
27	26	117	27	26	147	27	26	178
28	27	118	28	27	148	28	27	179
29	28	119	29	28	149	29	28	180
30	29	120	30	29	150	30	29	181
	30	121	31	30	151		30	182
				31	152			

SUITE DU TABLEAU DE L'ANNÉE JULIENNE.

JUILLET.			AOUT.			SEPTEMBRE.		
ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.
1	0	182	1	0	213	1	0	244
2	1	183	2	1	214	2	1	245
3	2	184	3	2	215	3	2	246
4	3	185	4	3	216	4	3	247
5	4	186	5	4	217	5	4	248
6	5	187	6	5	218	6	5	249
7	6	188	7	6	219	7	6	250
8	7	189	8	7	220	8	7	251
9	8	190	9	8	221	9	8	252
10	9	191	10	9	222	10	9	253
11	10	192	11	10	223	11	10	254
12	11	193	12	11	224	12	11	255
13	12	194	13	12	225	13	12	256
14	13	195	14	13	226	14	13	257
15	14	196	15	14	227	15	14	258
16	15	197	16	15	228	16	15	259
17	16	198	17	16	229	17	16	260
18	17	199	18	17	230	18	17	261
19	18	200	19	18	231	19	18	262
20	19	201	20	19	232	20	19	263
21	20	202	21	20	233	21	20	264
22	21	203	22	21	234	22	21	265
23	22	204	23	22	235	23	22	266
24	23	205	24	23	236	24	23	267
25	24	206	25	24	237	25	24	268
26	25	207	26	25	238	26	25	269
27	26	208	27	26	239	27	26	270
28	27	209	28	27	240	28	27	271
29	28	210	29	28	241	29	28	272
30	29	211	30	29	242	30	29	273
31	30	212	31	30	243		30	274
	31	213		31	244			

SUITE DU TABLEAU DE L'ANNÉE JULIENNE.

OCTOBRE.			NOVEMBRE.			DECEMBRE.		
ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.	ANNÉE commune. — Quantième du mois.	ANNÉE bissextile. — Quantième du mois.	RANG ordinal du jour.
1	0	274	1	0	305	1	0	335
2	1	275	2	1	306	2	1	336
3	2	276	3	2	307	3	2	337
4	3	277	4	3	308	4	3	338
5	4	278	5	4	309	5	4	339
6	5	279	6	5	310	6	5	340
7	6	280	7	6	311	7	6	341
8	7	281	8	7	312	8	7	342
9	8	282	9	8	313	9	8	343
10	9	283	10	9	314	10	9	344
11	10	284	11	10	315	11	10	345
12	11	285	12	11	316	12	11	346
13	12	286	13	12	317	13	12	347
14	13	287	14	13	318	14	13	348
15	14	288	15	14	319	15	14	349
16	15	289	16	15	320	16	15	350
17	16	290	17	16	321	17	16	351
18	17	291	18	17	322	18	17	352
19	18	292	19	18	323	19	18	353
20	19	293	20	19	324	20	19	354
21	20	294	21	20	325	21	20	355
22	21	295	22	21	326	22	21	356
23	22	296	23	22	327	23	22	357
24	23	297	24	23	328	24	23	358
25	24	298	25	24	329	25	24	359
26	25	299	26	25	330	26	25	360
27	26	300	27	26	331	27	26	361
28	27	301	28	27	332	28	27	362
29	28	302	29	28	333	29	28	363
30	29	303	30	29	334	30	29	364
31	30	304		30	335	31	30	365
	31	305					31	366

NOTE PREMIÈRE.

DE L'EMPLOI DE LA SEMAINE

COMME PÉRIODE CHRONOLOGIQUE DANS L'ANTIQUITÉ.

PAR M. ALFRED MAURY.

L'abbé Sallier, dans une dissertation sur la fête du septième jour, insérée au tome IV des Mémoires de l'ancienne Académie des inscriptions et belles-lettres, a été conduit, en recherchant les traces de l'existence du sabbat qui pouvaient se rencontrer chez les anciens, à reconnaître qu'on n'observait ailleurs que chez les Juifs, rien d'analogue à la férie du septième jour. Il a seulement fait voir que quelques analogies éloignées pouvaient être saisies entre les usages grecs et égyptiens, et ceux que la loi mosaïque consacrait à l'égard du sabbat. Quoique l'abbé Sallier n'eût pas traité la question de savoir si d'autres peuples que les Hébreux s'étaient servis de la semaine comme période chronologique, son travail renfermait cependant des faits qui étaient de nature à élever des doutes sérieux dans les esprits au sujet de l'opinion qu'avaient soutenue quelques pères de l'Église, et d'après laquelle la semaine aurait été en usage chez tous les peuples. Il faut croire que Bailly, Montucla, et Laplace, s'en étaient tenus aux assertions de J. Selden, reproduites par D. Calmet, et n'avaient pas consulté le mémoire du savant académicien, puisqu'ils ont admis, sans discussion préalable, la doctrine que ce travail avait occasionnellement ébranlée.

Pour compléter les résultats qui découlent du mémoire de l'abbé Sallier, il suffit de soumettre à un nouvel examen les témoignages qu'il a recueillis, et de rechercher ce qu'ils nous apprennent touchant la question que cet érudit avait négligée, l'emploi de la semaine comme période chronologique.

J'ai poursuivi cette discussion, à laquelle j'ai joint le résultat de mes propres recherches. Je vais en présenter ici les points principaux.

C'est sur le témoignage d'Hérodote et de Dion Cassius que se sont fondés ceux qui font remonter l'usage de la semaine chez les différents peuples à une haute antiquité. Ce témoignage ne nous offre cependant rien de concluant à cet égard, rien même qui se rapporte précisément à la question. Le premier de ces auteurs nous dit qu'*entre autres choses que les Égyptiens ont inventées, ils ont imaginé à quel dieu chaque mois et chaque jour du mois est consacré.* Or, dans cette phrase, on ne voit pas qu'il soit parlé le moins du monde, ni de la période de sept jours, ni même de la consécration des jours aux sept planètes. Hérodote se borne à relater un fait qui nous est confirmé par les monuments, c'est que les Égyptiens plaçaient chaque mois et chaque jour sous l'invocation d'un dieu particulier. Et conformément à une opinion que lui avaient sans doute inculquée les prêtres de cette nation, lesquels s'attribuaient toutes les inventions, il admet que cet usage avait pris naissance en Égypte. De semaine, il n'en dit pas un mot; et ce qui est particulier, c'est qu'il ne parle pas même des génies qui présidaient aux divisions décadaires dans lesquelles l'année égyptienne était subdivisée.

Dion Cassius est plus explicite. Voici comment il s'exprime à propos des Juifs, dont il vient d'esquisser les institutions :

« Pour ce qui est de l'usage de consacrer les jours aux sept astres qu'on appelle planètes, il a été établi par les Égyptiens et s'est répandu depuis peu, à ce que je crois, chez tous les hommes. Car, autant que je sache, il était entièrement inconnu aux anciens Grecs; mais depuis, il s'est nationalisé chez presque tous les autres peuples où il est reçu aujourd'hui, et jusque chez les Romains eux-mêmes, etc. »

On le voit, il n'est ici question que de l'attribution des jours aux sept planètes, mais nullement de la période de sept jours. Dion Cassius convient d'ailleurs que cette attribution n'est devenue si générale que depuis un temps peu reculé, οὐ πάλαι ποτέ, et il dit positivement que les anciens Grecs ne la connaissaient pas. Ainsi, on ne doit rien inférer de ce passage sur l'existence de la semaine; et, de plus, la conséquence qu'on avait cru pouvoir tirer d'un passage d'Hésiode (*Dies*, v. 6), qui dit qu'Apollon

avait été engendré le septième jour par Latone, tombe par là forcément. Ce dernier fait demeure isolé, et reste tout à fait distinct d'une attribution des six premiers jours aux dieux des six planètes, dont on ne trouve d'ailleurs aucune trace chez les Grecs antérieurement à la domination romaine. Notons ensuite qu'à l'époque à laquelle écrivait Dion, c'étaient presque toujours les Alexandrins que l'on entendait par ce mot Αἰγυπτίοι ; en sorte que nous n'avons pas d'autorité positive qui prouve l'existence chez les véritables Égyptiens de l'usage plus astrologique qu'astronomique de consacrer les jours aux planètes. L'écrivain de Nicée nous a donné simplement une conjecture de lui, comme il le dit lui-même, et par l'expression *chez tous les hommes*, ἐπὶ πάντας ἀνθρώπους, on ne doit, conformément aux habitudes de langage de cet auteur et de son siècle, entendre que les habitants des diverses provinces de l'empire.

Une remarque vient confirmer en outre le fait de l'introduction récente de la période de sept jours chez les peuples de l'empire, c'est qu'il n'existait, ni chez les Grecs ni chez les Romains, de mot destiné à désigner cette période. Or, si la semaine eût constitué, comme le jour, le mois, l'année, un élément, un mode de supputation chronologique, nul doute qu'elle n'eut reçu un nom particulier, à l'instar des autres divisions du temps. Le mot ἑβδομάς, par lequel les Juifs alexandrins rendaient l'hébreu שָׁבוּעַ, *schâbouah*, semaine, signifiait seulement une succession de sept choses, un ensemble de sept êtres, de sept objets, une *heptade*, mais point exclusivement une période de sept jours. Les Grecs n'avaient pas même, à l'époque du polythéisme, le mot ἑπταημερία, qui eût été naturellement usité, à défaut d'un mot spécial, pour rendre la période de sept jours, tandis qu'ils avaient le mot τριημερία pour exprimer une succession de trois jours. Dans la langue latine, le mot *septimana* apparaît pour la première fois dans le Code théodosien, c'est-à-dire sous les premiers empereurs chrétiens. Si donc l'usage de consacrer les jours aux sept planètes était déjà répandu dans tout l'empire du temps de Dion Cassius, c'est-à-dire à la fin du second siècle de notre ère, la semaine proprement dite n'entrait point encore à cette époque dans le comput chronologique.

Ceux qui ont soutenu que la semaine avait été connue universellement bien avant l'établissement du christianisme, ont soigneusement recherché

tous les témoignages qui constatent qu'un caractère sacré était attribué, depuis la plus haute antiquité, au septième jour. Mais ces témoignages ne font que confirmer un fait qui était déjà d'ailleurs suffisamment connu, c'est que le nombre sept était regardé comme sacré. Ce nombre n'était pas d'ailleurs le seul auquel on attachât cette idée ; le caractère qu'on lui attribuait ne fit jamais qu'on le distinguât d'une manière spéciale dans le calendrier. C'était en décades et non en semaines que se divisaient les mois helléniques. Enfin, une preuve formelle que la célébration du septième jour était inconnue aux païens, c'est que les auteurs anciens sont unanimes pour nous représenter l'observation du sabbat comme étant l'un des usages qui singularisaient davantage la nation juive. C'est ce que l'abbé Sallier a très-bien fait observer dans son mémoire.

En général, les premiers auteurs qui ont cru retrouver la semaine chez tous les peuples du monde, se sont laissé entraîner par une préoccupation étrangère à la question. En montrant que la consécration du septième jour avait laissé des traces chez toutes les nations, ils pensaient ajouter une preuve nouvelle au témoignage de la Bible, qui donne le sabbat comme d'institution divine, et remontant à l'origine du monde. Si l'on examine attentivement les passages de Philon, de Josèphe, d'Eusèbe, et en particulier celui de Clément d'Alexandrie, sur lequel on s'est appuyé davantage comme plus explicite, on se convaincra que ces écrivains ne produisent aucun fait à l'appui de leur assertion, qui d'ailleurs n'a pas toujours, ainsi que l'a fait voir l'abbé Sallier, la généralité qu'on lui prête.

Les Juifs étaient-ils le seul peuple de l'Orient, de l'Asie, qui eût adopté la semaine comme période chronologique ? Nous ne saurions l'affirmer absolument, parce que nous manquons de données à l'égard des Phéniciens et des Assyriens. Tout ce que nous pouvons faire remarquer, c'est qu'on n'en découvre aucune trace chez les Chinois, les Égyptiens et les Perses.

D'après les notes que M. Ed. Biot a eu l'obligeance de me communiquer, il n'est question dans les livres chinois que d'une division décadaire du mois, et ce que l'on avait pris pour des mentions de la célébration du septième jour se rapporte tout simplement, comme pour les Grecs, aux idées superstitieuses que l'on attachait au nombre sept. C'est sous l'empire de la préoccupation dont nous parlions tout à l'heure que le père Gaubil

a dit qu'il était fait allusion à une ancienne révolution de sept jours, dans un passage du livre des sorts, l'*Y-King*. Le texte indique simplement une opération importante pour laquelle il faut réfléchir trois jours avant d'agir, et dont le succès est certain trois jours après le jour où l'on a agi : ce qui fait en tout sept jours. Prémare, dans ses recherches sur les temps mythologiques de la Chine, s'est trompé en citant la note jointe par Confucius à ce même passage : il a traduit *tchi-ji*, le jour du solstice, par le grand jour, le jour le plus important ; et il en a fait le septième jour de la semaine.

Chez les Égyptiens, les mois se subdivisaient en trois décades, de même que chez les Grecs, et les textes hiéroglyphiques ne parlent nulle part d'une période de sept jours. Chez les Perses, la même période ne figure pas davantage parmi les systèmes de supputation chronologique énoncés dans les livres sacrés. En Perse, ainsi qu'en Égypte, des génies ou dieux présidaient aux différentes divisions du temps. Or, il n'est question dans aucun passage du *Zend-Avesta* des génies de la période de sept jours, quoique ceux de toutes les autres divisions chronologiques soient invoqués. (*Zend-Avesta*, t. II, p. 324 ; E. Burnouf, *Commentaire sur la Yaçna*, p. 363.) Anquetil-Duperron a remarqué, il est vrai, que le VIII^e^, le XV^e^ et le XXIII^e^ jour de chaque mois étaient consacrés à Ormuzd (*Zend-Avesta*, t. II, p. 316). Mais cette division, qui par son irrégularité ne pouvait servir dans la computation des années, et qu'on ne voit d'ailleurs jouer aucun rôle, dérive beaucoup plutôt de la subdivision du mois en trois décades que de l'emploi de la semaine.

Les recherches d'Ottfried Müller sur le système chronologico-religieux des Étrusques ont montré que la semaine leur était totalement inconnue. Ce peuple divisait simplement ses mois lunaires en deux parties par les ides.

Comme les derniers travaux entrepris sur la religion babylonienne ont fait voir qu'il existait une assez grande ressemblance entre cette religion et celle de Zoroastre, il est naturel de supposer que l'astrologie, à laquelle l'astronomie était si intimement liée, et qui constituait une des sciences sacrées, avait également un caractère à peu près identique chez les Assyriens et les Perses. On a donc, par le *Zend-Avesta*, un indice que la semaine n'était point en usage chez les Assyriens. D'ailleurs, dans le système

chronologique que le *Syncelle* nous a donné comme ayant été adopté chez les Chaldéens (*G. Syncell.*, ed. G. Dindorf, p. 58), on ne trouve point que le nombre sept entre comme facteur d'aucune des divisions du temps. Le sosse comprend 60 jours, le nêre 10 sosses, et le sare 6 nêres. Les Chaldéens distinguaient positivement le soleil et la lune des cinq planètes. La réunion des sept corps célestes date d'une époque comparativement récente. Si donc ce peuple eût réglé les jours sur la succession des planètes, leur période eût été composée non de sept jours, mais de cinq. (Voyez Letronne, *Journal des Savants*, an. 1839, p. 579, 580.) Rien ne nous autorise, en conséquence, à voir dans la semaine une invention de l'astronomie chaldéenne.

Les recherches que j'ai faites sur l'introduction de la semaine en Occident, m'ont conduit à admettre que la connaissance de cette période chronologique avait passé des Juifs aux Alexandrins, et qu'elle s'était déjà propagée dans tout l'empire à l'époque de Philon et de Josèphe. Mais toute connue qu'elle fût, la semaine demeurait complétement étrangère à la chronologie civile. Ce furent les premiers empereurs romains qui l'y rattachèrent, non en vertu d'un édit spécial, mais par suite de l'introduction dans l'administration des usages ecclésiastiques. Les Juifs me semblent donc en réalité avoir été le seul peuple qui ait divisé le temps par périodes de sept jours.

NOTE RELATIVE A LA PAGE 236.

Connaissant les trois nombres qui expriment le rang ordinal d'une année julienne parmi les 28 du cycle solaire, les 19 du cycle lunaire, les 15 du cycle des indictions, trouver son rang ordinal dans la période julienne de 7980 années.

Soit x le nombre cherché. Supposons qu'en le divisant par 28, il donne q pour quotient et r pour reste; qu'en le divisant par 19, il donne pour

quotient q' et pour reste r' ; enfin, qu'en le divisant par 15 le quotient soit q'' et le reste r'', on aura ces trois équations :

$$x = 28q + r,$$
$$x = 19q' + r',$$
$$x = 15q'' + r''.$$

Les restes r, r', r'' sont donnés : ce sont les nombres entiers qui expriment les cycles de l'année désignée. q, q', q'' sont des nombres entiers indéterminés. On peut leur donner telle valeur que l'on voudra. Il s'agit de trouver pour x le plus petit nombre entier qui satisfasse à ces trois conditions.

Or, les trois égalités précédentes donnent :

$$19q' + r' = 28q + r ; \qquad 15q'' + r'' = 28q + r.$$

Il faut résoudre ces équations, de manière que tous les symboles littéraux qu'elles contiennent se trouvent traduits par des nombres entiers. Considérant d'abord la première, on en déduit :

$$q' = q + \frac{9q + r - r'}{19} ; \text{ soit donc } \frac{9q + r - r'}{19} = n ;$$

il faudra que n soit un nombre entier. De là on tire :

$$9q = 19n - r + r' \text{ ou } q = 2n + \frac{n - r + r'}{9} ;$$

par conséquent, si l'on fait :

$$\frac{n - r + r'}{9} = n' ; \qquad \text{d'où } n = 9n' + r - r',$$

il faudra encore que n' soit un nombre entier. Remplaçant donc n par cette expression, dans la valeur trouvée de q, il en résulte :

$$q = 19n' + 2r - 2r' ;$$

c'est la forme la plus simple de q qui satisfasse à la première condition.

Venons maintenant à la seconde. Cette valeur de q donne

$$28q + r = 532n' + 57r - 56r' ;$$

substituant ceci dans l'équation en q'', on en tire :

$$15q'' + r'' = 532n' + 57r - 56r' ;$$

par conséquent,

$$q'' = 35n' + 3r - 3r' + \frac{7n' + 12r - 11r' - r''}{15}.$$

Il faut donc qu'en faisant

$$\frac{7n' + 12r - 11r' - r''}{15} = n'',$$

n'' soit aussi un nombre entier. De là on tire :

$$7n' = 15n'' - 12r + 11r' + r'';$$

par conséquent,

$$n' = 2n'' - r + r' + \frac{n'' - 5r + 4r' + r'''}{7}.$$

Ainsi, en faisant

$$\frac{n'' - 5r + 4r' + r''}{7} = n'''.$$

ce qui donne,

$$n'' = 7n''' + 5r - 4r' - r'',$$

n''' devra être un nombre entier. On ne peut pas pousser plus loin cette réduction, puisque la division est effectuée autant que possible. Cette expression de n'' étant substituée dans la valeur trouvée pour n', il en résulte :

$$n' = 15n''' + 9r - 7r' - 2r'',$$

et, par suite,

$$q = 19n' + 2r - 2r' = 285n''' + 173r - 135r' - 38r''.$$

Or, l'une des conditions primitives de x est :

$$x = 28q + r;$$

on aura donc finalement :

$$x = 7980n''' + 4845r - 3780r' - 1064r''.$$

En donnant à n''' toutes les valeurs entières que l'on voudra, on obtiendra autant de nombres qui satisferont aux trois conditions exigées. Mais la plus petite de ces valeurs est la seule nécessaire dans l'état actuel de la durée des événements historiques ; il s'agit de la déterminer.

Pour cela, on prendra les valeurs r, r', r'' des trois cycles, qui sont données ; et l'on formera la valeur numérique de la quantité

$4845r - 3780r' - 1064r''$. Ce sera la partie connue de la formule.

Si cette quantité est négative, on la divisera par 7980, pour savoir combien de fois elle contient ce nombre. Supposons qu'elle le contienne Q fois, avec un reste R; on aura donc alors

$$x = 7980n''' - 7980.Q - R.$$

Dans ce cas, la plus petite valeur positive de x se trouvera en supposant $n''' = Q + 1$; ce qui donne:

$$x = 7980 - R.$$

Si, au contraire, la quantité $4845r - 3780r' - 1064r''$ est positive, on la divisera encore par 7980, pour savoir combien de fois elle contiendra ce nombre; et, en supposant qu'elle le renferme Q fois avec un reste R, on aura, en général,

$$x = 7980n''' + 7980Q + R;$$

dans ce cas, la plus petite valeur positive de x se trouvera en supposant $n''' = -Q$; ce qui donne

$$x = +R.$$

Ces deux règles peuvent se réduire en une seule. Formez la valeur numérique de la quantité $4845r - 3780r' - 1064r''$. Rejetez-en, par la division, tous les multiples de 7980 qu'elle peut contenir, et ne conservez que le reste. S'il est positif, il indique le rang de l'année dans la période julienne; s'il est négatif, prenez-en le complément à 7980.

On demande, par exemple, quel est, dans la période julienne, le rang de l'année qui avait 1 de cycle solaire, 1 de cycle lunaire, 1 de cycle d'indiction. Ici on a $4845r - 3780r' - 1064r'' = +1$; par conséquent, $x = 7980n''' + 1$. La plus petite valeur de x répond à $n''' = 0$; ce qui donne $x = 1$. C'est le commencement de la période.

Autre exemple. On demande le rang de l'année qui avait 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire, et 4 de cycle d'indiction. Ici on a $4845r - 3780r' - 1064r'' = +36634$. Ce nombre, divisé par 7980, donne 4 pour quotient et 4714 pour reste. C'est le rang de l'année désignée, qui est précisément la première de l'ère chrétienne, comme je l'ai annoncé p. 236.

CHAPITRE II.

Calendrier égyptien de Ptolémée, ayant pour ere l'avénement du roi Nabonassar au trône de Babylone.

ÈRE. 1^ère^ ANNÉE, 1^er^ JOUR DU MOIS ÉGYPTIEN THOT; A MIDI VRAI SOUS LE MÉRIDIEN D'ALEXANDRIE.

DE LA PÉRIODE JULIENNE ANNEE 3967, MERCREDI 26 FÉVRIER, JOUR 57^e^; A 12 HEURES VRAIES AU MÉRIDIEN D'ALEXANDRIE, LE TEMPS ÉTANT COMPTÉ DE MINUIT (*).

31. Le jour civil, employé dans l'énoncé des dates, commence au lever du soleil, sous le méridien d'Alexandrie. Son

(*) Il y a dissentiment parmi les personnes qui ont étudié l'Almageste, sur la question de savoir si l'instant de midi, auquel Ptolémée place l'ère de Nabonassar, doit s'entendre d'un midi vrai ou d'un midi moyen. Laplace, dans son mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la lune (*Mémoires de l'Institut national*, tome II, page 134), emploie l'indication en midi moyen, comme un fait qu'il admet sans controverse. Mais, par cela même qu'il ne le discute pas, son choix ne décide nullement l'alternative; puisqu'on peut croire avec beaucoup de vraisemblance qu'il lui a été inspiré par l'idée très-naturelle que c'était le seul mode d'énoncé qui convînt à un astronome exact. Ptolémée ne s'explique pas nettement sur ce point, quoiqu'il lui eût peu coûté de le faire. Car, d'après ce qu'il dit

origine et sa durée sont par conséquent variables en différentes saisons. Mais, pour les calculs astronomiques, Ptolémée compte les jours solaires à partir d'une origine moins in-

---

au chapitre VIII du livre III, on voit qu'il connaissait très-bien les principes de l'équation du temps, comme nous les employons aujourd'hui, sauf qu'il croyait l'apogée du soleil immobile. Contrairement à Laplace, le savant chronologiste Ideler regarde comme indubitable que Ptolémée a établi son ère de Nabonassar, en coïncidence avec le midi vrai d'Alexandrie, et non pas avec le midi moyen du même jour. Je partage pleinement cette opinion, mais par des motifs indépendants de ceux sur lesquels Ideler s'appuie, et je vais les exposer en peu de mots.

Dans le chapitre VII du livre III de l'Almageste, Ptolémée explique comment on devra, à l'aide de ses tables, calculer le lieu vrai et le lieu moyen du soleil, pour un instant quelconque marqué en temps d'Alexandrie, lorsque l'on connaîtra l'intervalle qui sépare cet instant de celui qu'il assigne à l'ère de Nabonassar; mais il ne dit nullement s'il suppose cet intervalle donné en temps vrai ou en temps moyen. D'après le mode de computation qu'il prescrit, et d'après la manière dont il s'exprime dans plusieurs endroits du même livre, surtout au chapitre VIII, il paraît considérer cette distinction comme indifférente, *quand il s'agit du soleil seul.* En effet, l'équation du temps, exactement calculée, ne s'élève jamais jusqu'à 20^m de temps ou $\frac{1}{3}$ d'heure, pendant lesquelles le soleil parcourt dans l'écliptique moins de $1'$ en arc. Ses influences extrêmes sur l'appréciation d'un intervalle de temps ne pouvaient donc jamais produire, sur le lieu de cet astre, un effet qui fût appréciable dans les observations de solstices ou d'équinoxes faites par Ptolémée ou par ses prédécesseurs. Il était tout au plus nécessaire d'en tenir compte dans la détermination des lieux de la lune, dont la marche est environ 13 fois plus rapide que celle du soleil. Encore, dans cette application même, Ptolémée l'a-t-il souvent négligée.

A la fin de ce chapitre VIII, les conditions qui déterminent son ère fondamentale sont résumées dans les termes suivants : « A l'instant que nous « prenons pour époque (de nos tables), c'est-à-dire l'an 1^{er} de Nabonassar,

constante; et il les rattache aux jours civils par une convention spéciale, que j'exposerai plus loin.

32. Les années égyptiennes, tant civiles qu'astronomiques,

« selon les Égyptiens, le 1er thot à midi (d'Alexandrie), le soleil était, par « son mouvement moyen, en 0° 45′ des Poissons (long. 330° 45′); et, par « son mouvement inégal, en 3° 8′ (aussi) des Poissons (long. 333° 8′), « à très-peu près. »

Si l'on calcule les deux ascensions droites a, qui correspondent à ces deux longitudes l, par la formule connue

$$\text{tang } a = \text{tang } l \cos \omega,$$

en prenant l'obliquité de l'écliptique égale à $\frac{11}{83}$ de la demi-circonférence, ou, en nombre rond, 23° 51′ 20″, comme Ptolémée la suppose, on trouvera en arc :

L'ascension droite vraie	= 335° 8′ 27″
L'ascension droite moyenne	= 332 52 45
Différence, ou équation du temps à l'époque de Nabonassar. . . . . en arc	= 2° 15′ 42; en temps, $9^m 2^s,8$.

La table des différences ascensionnelles calculée par Ptolémée pour la sphère droite, livre II, chap. VII (page 103, éd. de Halma), donnerait, par l'application des quantités proportionnelles, $4^s,37$ en temps, de moins que cette évaluation.

On voit, d'après ces nombres, qu'à l'instant ici défini par Ptolémée comme l'époque de ses tables, ses calculs lui donnaient l'équation du temps assez petite pour qu'il pût se permettre de la négliger, dans les déterminations relatives au soleil seul. C'est ce qu'il a fait. Mais on ne doit pas dire, avec Ideler, qu'il la supposait nulle à cette époque; puisque les éléments qu'il lui assigne, et la théorie qu'il en donne, prouvent qu'il ne pouvait pas ignorer son existence, non plus que sa valeur.

Toutefois, les expressions que je viens de citer ne décident point si, à l'instant du midi qu'il veut prendre pour époque, il entend que ce fût le soleil moyen ou le soleil vrai qui se trouvait dans le méridien d'Alexandrie. Je regarde comme indubitable que, dans sa pensée, c'était le soleil

se composent uniformément de 365 jours, sans aucune intercalation. Elles sont subdivisées en 12 mois de 30 jours chacun, à la fin desquels on place 5 jours complémentaires,

---

vrai. En effet, si c'eût été le soleil moyen, comme l'emploi du midi de cet astre fictif était une spéculation purement astronomique, étrangère à toutes les notions usuelles, il lui aurait été absolument nécessaire de spécifier cette particularité ; au lieu qu'il n'avait aucun besoin de le faire, s'il entendait parler du midi vrai, marqué par le passage au méridien du soleil réel, comme il se conçoit habituellement. En outre, s'il avait fixé sa date initiale en temps moyen, il n'aurait pas pu dire qu'il la place au 1^er^ thot de l'an 1^er^ de Nabonassar, *selon les Égyptiens*, puisque cette indication la présente comme rattachée à l'usage vulgaire. Dans ce même chapitre VIII, après avoir exposé, avec une parfaite exactitude, les caractères ainsi que les durées relatives des nychthemères vrais et des nychthemères moyens, ce que nous appelons aujourd'hui des jours de vingt-quatre heures, il dit en termes formels que « *dans les époques* (de ses tables), ἐν ταῖς ἐποχαῖς, il a établi les commencements des nychthemères aux instants des passages par le méridien, ἀπὸ τῶν μεσουρανήσεων, pour leur donner des origines *moins variables* que s'il les eût fait commencer au lever ou au coucher du soleil. » Or, ceci encore ne peut s'entendre que des passages vrais, et des midis vrais, puisque des jours qui commenceraient et finiraient au midi moyen auraient leurs origines, non pas *à peu près*, mais rigoureusement constantes. Enfin, dans sa table chronologique, appelée le Canon des Rois, dont il fait sans cesse usage pour évaluer les intervalles de temps compris entre les observations datées en années des règnes de chaque souverain, tous les commencements de ces règnes sont rapportés au midi du 1^er^ thot sous le méridien d'Alexandrie, comme celui de Nabonassar qui ouvre la liste. Si donc on voulait que cette première époque ne fût pas un midi vrai, il faudrait que toutes les autres fussent aussi autant de midis moyens, qu'il aurait substitués spéculativement aux dates vulgaires, sans en avertir. Cela est tout à fait invraisemblable. Mais il est au contraire très-naturel et très-simple qu'ayant placé toutes ces origines à des midis vrais, et ayant donné, pour la première, la longitude du soleil vrai, ainsi que la longitude

appelés, en grec, ἐπαγόμεναι, épagomènes, c'est-à-dire additionnels. Les noms de ces douze mois égyptiens sont présentés, dans le tableau suivant, par ordre de succession, avec l'indication du rang ordinal occupé dans l'année entière, par le jour qui commence chacun d'eux.

RANG ORDINAL DES MOIS ÉGYPTIENS.	LEURS NOMS TRADUITS DES ÉNONCÉS GRECS.	RANG ORDINAL DU JOUR QUI LES COMMENCE.
1	Thot.	1
2	Phaophi.	31
3	Athyr.	61
4	Choiak.	91
5	Tybi.	121
6	Méchir.	151
7	Phaménoth.	181
8	Pharmouti.	211
9	Pachôn.	241
10	Payni.	271
11	Épiphi.	301
12	Mésori.	331
Épagomènes.	1er.	361
	2^{e}.	362
	3^{e}.	363
	4^{e}.	364
	5^{e}.	365

33. Les peuples anciens qui ont été soumis au régime monarchique, principalement les Orientaux, ne dataient pas

---

du soleil moyen, il ait entendu qu'on se servirait des méthodes qu'il expose, pour corriger les effets de leurs faibles inégalités sur l'évaluation des intervalles de temps, dans le très-petit nombre de cas où l'on croirait nécessaire de recourir à une telle rigueur. Voilà pourquoi, en tête de ce chapitre, je me suis décidé à présenter, de même qu'Ideler, l'ère de Nabonassar comme placée à un midi vrai, et non pas à un midi moyen.

comme nous les événements et les observations à partir d'une ère fixe, en les classant dans une série continue d'années. L'avénement de chaque souverain d'une même nation devenait pour elle une ère nouvelle, d'où l'on recommençait à compter les temps; de sorte que les rivalités des princes qui, à une même époque, s'y sont disputé ou partagé l'empire, ont occasionné, dans leurs dates historiques, des interruptions et des confusions maintenant irremédiables. En conséquence, pour rattacher à une même série continue d'années égyptiennes les observations éparses de différents temps et de différents peuples qu'il a pu recueillir, Ptolémée s'est servi d'un tableau chronologique, où l'on voit rangées, par ordre de dates, les époques d'avénement de tous les rois, assyriens, mèdes, persans, grecs, qui, après Nabonassar, ont successivement occupé l'empire de Babylone, en y comprenant les empereurs romains, jusqu'au premier Antonin inclusivement. C'est ce qu'on appelle communément le *Canon des Rois*. Chose singulière! Ptolémée ne mentionne pas une seule fois ce tableau dans l'Almageste, quoiqu'il s'y réfère constamment pour classer les dates des observations qu'il emprunte et qu'il emploie. Mais on l'a retrouvé annexé aux *tables manuelles,* qui sont aussi son ouvrage, dans un manuscrit de son commentateur Théon. Il est construit en années égyptiennes de 365 jours, comme les tables de l'Almageste; et, suivant un autre usage conventionnel de l'Égypte, on y attribue à chaque prince l'année entière dans laquelle il a commencé à régner, de sorte que son avénement est toujours reporté au 1er jour du mois thot de cette année-là. Cela simplifie la computation des intervalles de temps, en supprimant les fractions d'année qui complètent la durée réelle des

règnes. Mais il faut être prévenu de cette circonstance, pour identifier correctement les dates du Canon, à celles des calendriers étrangers à l'Égypte, où elles peuvent être mentionnées différemment. Avec cette précaution, une multitude de faits historiques, d'ères chronologiques, et de calendriers propres à différents peuples, se rattachent à ce précieux document. Comme on ne saurait vérifier les calculs de l'Almageste, ni même les comprendre, sans y avoir à chaque instant recours, je le mets ici sous les yeux du lecteur, en lui donnant la forme qui m'a semblé la plus commode pour en faciliter l'usage.

NOMS DES ROIS.	RANG ORDINAL de l'année de leur avénement.	NOMS DES ROIS.	RANG ORDINAL de l'année de leur avénement.	NOMS DES ROIS.	RANG ORDINAL de l'année de leur avénement.	NOMS DES ROIS.	RANG ORDINAL de l'année de leur avénement.
Nabonassar.	1	Iluarodam.	187	Philippe Aridée.	425	Auguste.	719
Nadius.	15	Niricassolassar.	189	Alexandre Ægus.	432	Tibère.	762
Chozirus et Porus.	17	Nabonadius.	193	Ptolémée Lagus.	444	Caius Caligula.	784
Jugæus.	22			Ptol. Philadelphe.	464	Claude.	788
Mardocempal.	27	Cyrus.	210	Ptol. Évergète I^er^.	502	Néron.	802
Arcian.	39	Cambyse.	219	Ptol. Philopator.	527	Vespasien.	816
Premier interrègne.	44	Darius I^er^.	227	Ptol. Épiphane.	544	Titus.	826
Belibus.	46	Xercès.	263	Ptol. Philometor.	568	Domitien.	829
Apronadius.	49	Artaxerce I^er^.	284	Ptol. Évergète II.	603	Nerva.	844
Rigebelus.	55	Darius II.	325	Ptol. Soter.	632	Trajan.	845
Mesessrimordac.	56	Artaxerce II.	344	Dionisius.	668	Hadrien.	864
Deuxième interrègne.	60	Ochus.	390	Cléopâtre.	697	Antonin.	885
Assaradin.	68	Arogus.	411				
Saosducheus.	81	Darius III.	413				
Chiniladan.	101	Alexandre le Macédonien.	417				
Nabopolassar.	123						
Nabocolassar.	144						

La première division de ce tableau comprend les souverains assyriens et mèdes; la deuxième, les Perses; la troisième, les Grecs; la dernière, les Romains.

RANG ORDINAL des années de NABONASSAR.		RANG ORDINAL des années de NASSAR.	DATE JULIENNE du premier jour de THOT VAGUE.	ANNÉES de la période JULIENNE.	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR.	DATE JULIENNE du premier jour de THOT VAGUE.	ANNÉES de la période JULIENNE.
1	26	208	30 avril.....	5173	1452	20 février....	5417
4	25						

TABLE DE CONCORDANCE DES ANNÉES VAGUES DE NABONASSAR, AVEC LES ANNÉES INTERCALÉES DE LA PÉRIODE JULIENNE.

RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE	RANG ORDINAL des années de NABONASSAR	DATE JULIENNE du premier jour de l'ANNÉE VAGUE	ANNÉES de la période JULIENNE
1	26 février.	3967	228	31 décembre.	4193	472	31 octobre	4417	716	31 août. . .	4681	964	30 juin. . .	4929	1208	30 avril. . .	5173	1452	29 février....	5417
4	25	3970	232	30. . . .	4197	476	30 . . .	4421	720	30. . . .	4685	968	29.	4933	1212	29.	5177	1453	28.	5418
8	24.	3974	236	29. . . .	4201	480	29.	4425	724	29.	4689	972	28.	4937	1216	28.	5181	1457	27.	5422
12	23.	3978	240	28.	4205	484	28	4449	728	28.	4693	976	27.	4941	1220	27.	5185	1461	26.	5426
16	22.	3982	244	27.	4209	488	27.	4453	732	27.	4697	980	26.	4945	1224	26.	5189	1462	26.	5427
20	21 . . .	3986	248	26. . . .	4213	492	26	4457	736	26.	4701	984	25.	4949	1228	25.	5193	1463	26.	5428
24	20	3990	252	25. . . .	4217	496	25	4461	740	25.	4705	988	24.	4953	1232	24	5197	1464	26.	5429
28	19 . .	3994	256	24	4221	500	24	4465	744	24.	4709	992	23.	4957	1236	23.	5201	1465	25	5430
32	18.	3998	260	23.	4225	504	23.	4469	748	23.	4713	996	22.	4961	1240	22	5205			
36	17.	4002	264	22.	4229	508	22.	4473	752	22.	4717	1000	21.	4965	1244	21	5209			
40	16.	4006	268	21.	4233	512	21.	4477	756	21.	4721	1004	20.	4969	1248	20.	5213			
44	15 . . .	4010	272	20.	4237	516	20	4481	760	20.	4725	1008	19.	4973	1252	19.	5217			
48	14 . . .	4014	276	19.	4241	520	19.	4485	764	19.	4729	1012	18.	4977	1256	18	5221			
52	13	4018	280	18.	4245	524	18	4489	768	18.	4733	1016	17.	4981	1260	17.	5225			
56	12	4022	284	17	4249	528	17	4493	772	17. . . .	4737	1020	16.	4985	1264	16.	5229			
60	11	4026	288	16	4253	532	16	4497	776	16 . . .	4741	1024	15	4989	1268	15.	5233			
64	10	4030	292	15. . . .	4257	536	15	4501	780	15. . . .	4745	1028	14.	4993	1272	14	5237			
68	9 . .	4034	296	14	4261	540	14. . . .	4505	784	14. . . .	4749	1032	13.	4997	1276	13.	5241			
72	8 . .	4038	300	13	4265	544	13 . . .	4509	788	13. . . .	4753	1036	12.	5001	1280	12	5245			
76	7 . .	4042	304	12	4269	548	12 . . .	4513	792	12. . . .	4757	1040	11.	5005	1284	11.	5249			
80	6.	4046	308	11.	4273	552	11.	4517	796	11.	4761	1044	10.	5009	1288	10.	5253			
84	5.	4050	312	10.	4277	556	10.	4521	800	10.	4765	1048	9.	5013	1292	9	5257			
88	4.	4054	316	9.	4281	560	9.	4525	804	9.	4769	1052	8.	5017	1296	8.	5261			
92	3.	4058	320	8.	4285	564	8.	4529	808	8.	4773	1056	7.	5021	1300	7.	5265			
96	2.	4062	324	7.	4289	568	7.	4533	812	7.	4777	1060	6.	5025	1304	6.	5269			
100	1.	4066	328	6.	4293	572	6.	4537	816	6.	4781	1064	5.	5029	1308	5.	5273			
104	31 janvier. . .	4070	332	5.	4297	576	5.	4541	820	5.	4785	1068	4.	5033	1312	4.	5277			
108	30.	4074	336	4.	4301	580	4.	4545	824	4.	4789	1072	3.	5037	1316	3	5281			
112	29.	4078	340	3.	4305	584	3.	4549	828	3.	4793	1076	2.	5041	1320	2.	5285			
116	28.	4082	344	2.	4309	588	2.	4553	832	2.	4797	1080	1.	5045	1324	1	5289			
120	27.	4086	348	1.	4313	592	1.	4557	836	1.	4801	1084	31 mai.	5049	1328	31 mars.	5293			
124	26.	4090	352	30 novembre.	4317	596	30 septembre.	4561	840	31 juillet. . . .	4805	1088	30.	5053	1332	30.	5297			
128	25.	4094	356	29.	4321	600	29.	4565	844	30.	4809	1092	29.	5057	1336	29.	5301			
132	24.	4098	360	28.	4325	604	28.	4569	848	29.	4813	1096	28.	5061	1340	28.	5305			
136	23.	4102	364	27.	4329	608	27.	4573	852	28.	4817	1100	27.	5065	1344	27.	5309			
140	22.	4106	368	26.	4333	612	26.	4577	856	27.	4821	1104	26.	5069	1348	26.	5313			
144	21.	4110	372	25.	4337	616	25.	4581	860	26.	4825	1108	25.	5073	1352	25.	5317			
148	20.	4114	376	24.	4341	620	24.	4585	864	25.	4829	1112	24.	5077	1356	24.	5321			
152	19.	4118	380	23.	4345	624	23.	4589	868	24.	4833	1116	23.	5081	1360	23.	5325			
156	18.	4122	384	22.	4349	628	22.	4593	872	23.	4837	1120	22.	5085	1364	22.	5329			
160	17. . . .	4126	388	21.	4353	632	21.	4597	876	22.	4841	1124	21.	5089	1368	21.	5333			
164	16. . .	4130	392	20.	4357	636	20. . .	4601	880	21.	4845	1128	20.	5093	1372	20.	5337			
168	15 . .	4134	396	19.	4361	640	19. . . .	4605	884	20.	4849	1132	19.	5097	1376	19.	5341			
172	14.	4138	400	18.	4365	644	18. . . .	4609	888	19.	4853	1136	18.	5101	1380	18	5345			
176	13.	4142	404	17.	4369	648	17.	4613	892	18.	4857	1140	17.	5105	1384	17.	5349			
180	12.	4146	408	16.	4373	652	16.	4617	896	17.	4861	1144	16.	5109	1388	16.	5353			
184	11.	4150	412	15.	4377	656	15.	4621	900	16.	4865	1148	15.	5113	1392	15.	5357			
188	10.	4154	416	14.	4381	660	14.	4625	904	15.	4869	1152	14.	5117	1396	14.	5361			
192	9.	4158	420	13.	4385	664	13.	4629	908	14.	4873	1156	13.	5121	1400	13.	5365			
196	8.	4162	424	12.	4389	668	12.	4633	912	13.	4877	1160	12.	5125	1404	12.	5369			
200	7.	4166	428	11.	4393	672	11.	4637	916	12.	4881	1164	11.	5129	1408	11.	5373			
204	6 . . .	4170	432	10.	4397	676	10.	4641	920	11.	4885	1168	10.	5133	1412	10.	5377			
208	5. . .	4174	436	9.	4401	680	9.	4645	924	10.	4889	1172	9.	5137	1416	9.	5381			
212	4.	4178	440	8.	4405	684	8.	4649	928	9.	4893	1176	8.	5141	1420	8.	5385			
216	3	4182	444	7.	4409	688	7.	4653	932	8.	4897	1180	7.	5145	1424	7.	5389			
220	2.	4186	448	6.	4413	692	6.	4657	936	7.	4901	1184	6.	5149	1428	6.	5393			
224	1	4190	452	5.	4417	696	5.	4661	940	6.	4905	1188	5.	5153	1432	5.	5397			
225	1.	4191	456	4.	4421	700	4.	4665	944	5.	4909	1192	4.	5157	1436	4.	5401			
226	1.	4192	460	3.	4425	704	3.	4669	948	4.	4913	1196	3.	5161	1440	3.	5405			
227	1.	4193	464	2.	4429	708	2.	4673	952	3.	4917	1200	2.	5165	1444	2.	5409			
			468	1.	4433	712	1.	4677	956	2.	4921	1204	1.	5169	1448	1.	5413			
									960	1.	4925									

34. L'ère de Nabonassar, et la liste de rois qui se rattachent ici par ordre de succession immédiate à ce prince chaldéen, ne constituent pas des documents originairement établis avec cette continuité de dérivation, en vertu d'une institution politique ou sociale qui les aurait ainsi mentionnés et conservés. A l'exception des Chinois, aucune nation de l'antiquité n'a possédé, ou du moins ne nous a transmis, des annales historiques d'une application si générale, et prolongées sans intermittence pendant un si grand espace de temps. La suite des rois assyriens et mèdes peut avoir été directement tirée des annales chaldéennes, que Bérose avait traduites en grec. Car plusieurs de ses termes consécutifs s'accordent identiquement, pour les noms et pour les intervalles des règnes, avec ce qu'on lit dans quelques fragments de cet historien qu'Eusèbe nous a conservés. Mais le reste, composé de matériaux beaucoup plus disjoints, doit avoir été une œuvre de critique très-difficile, qu'Hipparque d'abord, puis Ptolémée, sembleraient avoir été seuls capables de continuer et de parfaire, en ayant d'ailleurs un besoin indispensable pour régulariser leurs calculs.

35. Ayant établi la concordance du commencement de la première année de Nabonassar avec le calendrier julien, on obtiendra la concordance analogue pour les commencements de toutes les années égyptiennes suivantes, en ajoutant continuellement, à la première date julienne, le nombre de jours complets dont chacune d'elles se compose. Le résultat de ces additions successives se voit tout fait, pour une étendue de temps quelconque, dans la table qui est annexée ici en regard :

Explication et usage de la table précédente.

36. Cette table donne immédiatement la date julienne du premier jour de thot vague, pour chacune des années de Nabonassar, comprises dans la période julienne, entre 3967 et 5430. Cet intervalle, renfermant plus de 1460 ans juliens, embrasse une révolution complète de l'année vague dans la julienne. De sorte, qu'en s'appuyant sur cette périodicité, on peut prolonger les mêmes successions de concordance indéfiniment, comme je vais tout à l'heure l'expliquer. Mais je dois d'abord dire comment la table est faite.

Les concordances qu'elle exprime sont établies, de même que la concordance initiale, pour l'instant du midi vrai au méridien d'Alexandrie. Ce midi correspond à 12 heures vraies du jour indiqué par la date julienne, dans laquelle les jours sont supposés commencer à minuit, sous le même méridien. On devra donc appliquer, par la pensée, ces conditions complémentaires de synchronisme, à tous les nombres de la table qui se correspondent.

Toutes les années égyptiennes contiennent 365 jours; mais les années juliennes en contiennent occasionnellement 366. Cette addition quatriennale d'un jour fait rétrograder, par une période pareille, la date julienne du premier jour de thot, que j'appellerai simplement le thot, pour abréger. La table indique spécialement ces dates pour chaque année julienne où elles changent; et on les conclut facilement pour les années intermédiaires, puisqu'elles y restent constantes.

Le thot de l'année égyptienne 1 concourt avec le 26 février de l'année julienne 3967. Celle-ci est commune, ainsi que la

suivante 3968. Le thot y reste donc au 26 février. Il persiste encore à cette date dans l'année 3969, quoique bissextile, le jour intercalaire n'y intervenant qu'après le 28 février. Mais l'addition de ce jour recule d'une unité la date du thot dans l'année suivante 3970, et le porte au 25 février. C'est pourquoi on l'a marquée à celle-ci, en l'omettant aux précédentes, où la date au thot restait la même que dans la première.

La mutation revient ensuite de quatre en quatre ans juliens; et, jusqu'à l'année 4190 inclusivement, toutes celles où elle s'opère sont, comme 3970, exprimées par un nombre de la forme $4m+2$; de sorte qu'elles sont immédiatement postérieures à la bissextile de chaque période quatriennale. Mais, quand on arrive à l'année 4193, qui est bissextile, le thot de la 227^{e} année égyptienne se trouve concorder avec son 1er janvier; et, comme elle a 366 jours, le thot suivant, celui de la 228^{e}, s'y trouve également compris, et concorde avec son 31 décembre. C'est ce que la table montre avec un détail exceptionnel.

Quand on est arrivé à ce terme, la mutation du thot s'opère dans les années bissextiles mêmes, dont la forme est $4m+1$; et cela se soutient dans toute la suite de la table jusqu'à l'année 5417 inclusivement. Mais, dans celle-ci, le thot de la 1452^{e} année égyptienne concorde avec le jour intercalaire même, 29 février; ce qui porte le thot suivant au 28 février, dans l'année julienne 5418, qui est commune. La table indique cette transition exceptionnelle. Depuis lors, la mutation recommence à s'opérer dans les années juliennes de la forme $4m+2$, comme au commencement de la table; et l'on a indiqué en détail la marche du thot dans les premiers termes de cette nouvelle succession, pour montrer qu'elle y revient identiquement aux mêmes dates juliennes que dans la précédente.

37. J'arrive maintenant aux applications. Pour les années juliennes ou égyptiennes, textuellement comprises dans la table, aucune explication n'est nécessaire : son usage est évident. Pour l'étendre hors de ces limites, il faut s'appuyer sur ce fait, que 1460 années juliennes intercalées, comprenant 365 tétrades de 1461 jours, équivalent identiquement à 1461 années égyptiennes, chacune de 365 jours. Dans cette extension de concordances, on n'a pas égard à la réforme grégorienne; on conserve à la période julienne son cours régulier.

Premier exemple. On demande la date julienne du thot de l'an de Nabonassar 2554? Ce nombre dépasse les bornes de la table; pour l'y faire rentrer, j'en retranche 1461. Le reste, 2554-1461, ou 1093 s'y trouve compris; et le thot y est marqué au 29 mai. L'année de la période julienne qui correspond à ce reste est 5058. En y ajoutant 1460, on obtient pour somme 6518; c'est l'année de la période julienne qui contient effectivement le thot calculé. Elle est commune, et concourt avec l'année de l'ère chrétienne 6518 — 4713 ou 1805. La concordance demandée sera donc telle qu'il suit :

Année de Nabonassar 2554 : 1er jour de Thot, à midi vrai du méridien d'Alexandrie.

Année de la période julienne 6518, de l'ère chrétienne 1805, 29 mai, jour 149^{e} (vieux style), à 12 heures vraies, comptées de minuit, sous le même méridien.

38. Si l'année de l'ère chrétienne, ou de la période julienne était donnée, on procéderait par une voie inverse : on retrancherait de celle-ci 1460 autant de fois que cela serait nécessaire pour la faire rentrer dans la table. On connaîtrait ainsi l'année de Nabonassar à laquelle appartient le thot transporté. Alors, en y ajoutant le même nombre de

fois 1461, on aurait le rang de l'année de Nabonassar dont le thot avait été désigné par sa date julienne.

Ainsi, en intervertissant la question traitée tout à l'heure, supposons que l'on demande quelle est l'année de Nabonassar, dont le thot tombe dans l'année de la période julienne 6518. Comme ce dernier nombre dépasse les bornes de notre table, on en retranchera une fois 1460 pour l'y faire rentrer, ce qui le réduira à 5058. Alors la table nous montre que, dans cette année julienne 5058, le thot égyptien est arrivé le 29 mai; et, qu'en outre, il y a été unique. L'année de Nabonassar correspondante est 1093: donc, celle que nous cherchons sera 1093+1461 ou 2554.

39. Ceci nous conduit à cette autre question plus générale: Une date égyptienne *quelconque* étant donnée dans une année de Nabonassar, avec l'indication du jour et de l'heure, trouver sa concordance dans le calendrier julien, ou inversement? On y parvient encore par le secours de notre table, en établissant d'abord la concordance pour le thot de l'année désignée, puis y ajoutant les nombres de jours et d'heures écoulés postérieurement. Mais ce complément de l'opération ne peut se faire, qu'en tenant compte des origines différentes attribuées aux jours et aux heures, dans les deux calendriers que l'on veut mettre en rapport. Un peu plus loin, avant de passer aux applications, je donnerai ces derniers éléments conventionnels des calculs, et je traiterai alors le problème général de la concordance des dates égyptiennes et juliennes, tel que je viens de l'énoncer. Mais je dois d'abord achever d'exposer quelques préliminaires, dont la connaissance est indispensable pour avoir la possession complète du sujet.

40. Une foule de documents attestent que l'année vague de 365 jours a été d'usage en Égypte longtemps avant l'époque jusqu'à laquelle Ptolémée a pu la suivre, en l'assujettissant à une numération chronologique continue. Des recherches d'histoire, et même d'astronomie, exigent fréquemment que l'on en prolonge le fil numérique vers ces temps antérieurs, soit pour retrouver sa concordance avec la période julienne, soit pour découvrir quelle relation absolue elle se trouvait avoir avec l'année solaire à telle époque désignée. Comme les monuments ne nous fournissent pas d'ère fixe, antérieure à celle de Nabonassar, pour y rapporter les computations, nous les ferons partir de cette ère même, par une notation rétrograde, comme on le fait pour rapporter à l'ère chrétienne les événements qui l'ont précédée. Alors il sera pareillement nécessaire d'établir cette notation de manière que les années égyptiennes négatives se maintiennent en concordance avec celles de la période julienne dont l'énumération est continue. C'est à quoi nous conduira le problème suivant.

Comment devra-t-on noter l'année égyptienne, dont le 1er jour de thot tombe dans l'année de la période julienne 3966?

Ce nombre n'étant pas compris dans notre table, j'y ajoute 1460 pour l'y faire rentrer; il devient ainsi 5426, pour lequel la table indique le thot au 26 février, comme on pouvait immédiatement le prévoir. L'année correspondante de Nabonassar est 1461; d'où retranchant 1461 pour remonter d'une égale quantité dans leur série, le reste est 0. Ainsi, l'année égyptienne immédiatement antérieure à l'ère de Nabonassar devra être marquée 0, comme l'année immédiatement antérieure à l'ère chrétienne dans la notation as-

tronomique. Si l'on veut l'écrire chronologiquement on pourra la désigner par —1 ; mais alors on devra ajouter cette même constante — 1, à tous les autres nombres négatifs, que l'on déduira de notre table par le transport direct.

41. Je donnerai de cette règle trois exemples, qui offrent un intérêt d'application spécial.

1° Quelle est l'année de Nabonassar qui a commencé dans l'année de l'ère chrétienne — 1322, date chronologique? et quelle était alors la date julienne du thot vague?

L'année désignée — 1322 concorde avec — 1322 + 4714, ou 3392 de la période julienne. En ajoutant à ce nombre 1460, il devient 4852, et rentre dans notre table. Elle y indique le thot au 20 juillet, jour du lever héliaque de Sirius sous le parallèle moyen de l'Égypte. L'année égyptienne correspondante est + 887. En retranchant de ce nombre 1461, on a pour reste, l'année de Nabonassar — 574, date astronomique ; ou — 575, date chronologique.

2° On demande de résoudre le même problème pour les deux années de l'ère chrétienne — 1780 et — 3285, dates chronologiques. Les années correspondantes de la période julienne sont 2934 et 1429. Le premier de ces nombres rentre dans notre table en y ajoutant 1460, et il devient 4394; le second en y ajoutant 2 fois 1460, ou 2920, et il devient 4349. Alors le calcul s'achève comme il suit :

Pour 4394 de la période julienne, la table marque le thot au 11 novembre. L'année de Nabonassar, correspondante à la date donnée, est + 429 — 1461 ou — 1032, date astronomique ; équivalente à — 1033, date chronologique.

Pour 4349 de la période julienne, la table marque le thot au 22 novembre. L'année de Nabonassar, correspondante à

la date donnée, est : 384 — 2922, ou —2538, date astronomique; équivalente à — 2539, date chronologique.

Ces deux époques juliennes, — 1780 et — 3285, offrent cette circonstance annuelle remarquable, que le solstice d'été vrai, ou la crue du Nil commence, y coïncidait avec le 1er jour du mois pachôn, lequel est désigné, dans la notation sacrée de l'Égypte, comme le commencement de la saison des eaux. Toutes les parties de l'année vague, que cette notation désignait par des symboles représentant la succession annuelle des cultures, se trouvaient alors en concordance parfaite avec leur signification.

L'année — 1780 a de plus cette particularité, que l'année lunaire vraie s'y trouve encastrée dans l'année vague avec des conditions de symétrie tellement exactes, qu'il semble presque impossible qu'elles n'aient pas été arrangées ainsi intentionnellement. Je viens de dire que, dans cette même année, le solstice d'été se trouvait coïncider avec le premier jour du mois pachôn. Cette phase solaire a toujours été pour l'Égypte un objet spécial d'attention et de culte, comme lui annonçant l'arrivée des eaux qui la fécondent. Or, c'est précisément autour de ce mois, de ce jour, que l'année lunaire est répartie, et l'on pourrait dire équilibrée. Ainsi, à ce même mois pachôn, à celui-là seul, la nouvelle lune, visible sur l'horizon de Thèbes, coïncide avec le premier jour du mois, et s'y montre solsticiale comme le soleil. C'est également à celui-là que la pleine lune vraie tombe juste au milieu du mois. Enfin, par une combinaison singulière, unique, des valeurs qu'eurent alors les mouvements vrais, la nouvelle lune suivante arrive précisément à son trentième jour; d'où l'on voit que toutes les phases lunaires de l'année se

trouvent symétriquement distribuées autour de lui. Je me borne à mentionner ce fait. Quant aux conséquences que l'on en peut tirer sur la forme du calendrier usuel de l'ancienne Égypte, elles ont été discutées dans plusieurs mémoires que j'indique ici en note (*).

42. Il me reste maintenant à faire voir, comment on doit opérer, pour transformer en dates juliennes comptées de minuit, les dates égyptiennes de jours et d'heures données par Ptolémée. Pour cela je dois prévenir qu'il désigne généralement les jours, conformément à l'usage civil de l'Égypte qui les faisait commencer au lever du soleil; leur donnant ainsi une origine variable en différents temps de l'année solaire. Mais, pour les calculs astronomiques, l'instant initial de l'ère d'où il les fait partir est un midi vrai au méridien d'Alexandrie. Il les énumère d'abord, depuis cette ère, de midi en midi; après quoi il complète la désignation absolue du temps par des heures et fractions d'heures moyennes ou équinoxiales, qu'il compte continûment de 0 à 24, depuis le dernier midi auquel il est parvenu. Alors l'interprétation astronomique de ses énoncés s'obtiendra toujours exactement par les deux règles suivantes.

43. Si l'instant physique qu'il veut définir coïncide avec le midi du jour civil désigné, ou lui est postérieur, conservez ce même quantième de jour, et ajoutez-y les heures écoulées depuis son midi.

(*) *Recherches sur l'année vague des Égyptiens;* Académie des sciences, tome XIII. *Exposition et application des tables abrégées de la lune,* publiées par M. Largeteau; *Journal des savants* pour 1843, cahiers de juillet et août. *Recherches sur divers points d'astronomie ancienne;* Académie des sciences, tome XX.

Si l'instant qu'il veut définir est antérieur au midi du jour civil désigné, prenez le quantième de jour immédiatement précédent; et ajoutez-y les heures écoulées depuis son midi, jusqu'à l'instant qu'il s'agit de fixer.

44. Un petit nombre d'exemples convenablement choisis suffira pour mettre la justesse de ces règles en évidence.

1° La plus ancienne des éclipses de lune rapportées par Ptolémée, fut observée à Babylone dans la 1re année de Mardocempal, la 27e de Nabonassar, pendant la nuit du 29e au 30e jour (civil) du mois égyptien thot. Cette éclipse fut totale. Le milieu, évalué en temps d'Alexandrie, est fixé par Ptolémée à 3 heures équinoxiales et $\frac{1}{2}$ avant minuit. (Almageste, livre IV, page 245, édit. de Halma.)

Le phénomène étant postérieur au midi du jour civil egyptien, il appartient au jour astronomique de même dénomination. Celui-ci commence à midi. La date astronomique, comptée du midi initial pris pour ère, sera donc:

De Nabonassar année 27e, 29e jour du mois Thot, à $8^h\frac{2}{3}$, comptées de midi.

Maintenant, notre table générale de concordance, établie sur le même système de conventions astronomiques, donne pour le méridien d'Alexandrie:

Année de Nabonassar 27e, 1er Thot à midi = 3993^B, 20 février 12^h comptées de minuit;

Ce qui équivaut à.....	3993^B,	jour 51e,	12^h.
Or, du 1er Thot, à midi, au 29 Thot $8^h\frac{2}{3}$, l'intervalle est.....		jours 28,	$8^h,40^m$.
Sommes additives au 1er janvier...		79j,	$20^h,40^m$.
La date julienne du milieu de l'éclipse, pour Alexandrie, sera donc.....	3993^B	jour 79e	$20^h,40^m$.

Et comme l'année 3993 est bissextile, ainsi que je l'ai marqué, on devra écrire :

3993^{B}, 19 mars, à $20^{h},40^{m}$, temps d'Alexandrie, compté de minuit.

Si l'on veut réduire cette date en temps de Paris, on en retranchera $1^{h}\ 50^{m}\ 10^{s}$, dont Paris est plus occidental qu'Alexandrie; et, en négligeant les 10^{s}, qui sont ici sans importance, puisque l'observation est bien loin d'atteindre des quantités si petites, elle deviendra pour Paris:

3993^{B}, 19 mars, $18^{h},40^{m}$, le temps étant toujours compté de minuit.

45. Pour vérifier ce résultat, en toute rigueur, il faudrait calculer complétement, par nos tables astronomiques les plus précises, le lieu du soleil et celui de la lune pour l'instant ainsi assigné. On en conclurait l'instant exact du milieu de l'éclipse; et l'on verrait s'il ne s'écarte de l'indication de Ptolémée que dans les limites d'erreurs comportées par l'observation chaldéenne, combinée avec les réductions qu'il lui a fait subir pour la réduire au méridien d'Alexandrie. Mais, si l'on veut seulement obtenir une vérification chronologique, qui assure l'exactitude du transport de la date égyptienne dans le calendrier julien, ce qui est surtout ici mon but, on peut l'avoir en quelques instants, et sans aucune peine, au moyen des tables approximatives que M. Largeteau a composées pour calculer les syzygies, et que j'annexe au présent Mémoire. Car, si l'on prend pour élément d'essai, l'année, le jour et l'heure, ici indiqués pour Paris, on trouve que l'opposition vraie s'est réalisée effectivement à cette même date, vers $17^{h}\ 49^{m}$ de temps moyen. De sorte que l'écart est seulement de $0^{h}\ 51^{m}$, imputable à la fois, à la différence du temps moyen au temps vrai, à l'erreur possible de l'observation chal-

déenne, et à celle que les tables approximatives peuvent elles-mêmes comporter. Les interprétations et les concordances dont nous avons fait usage pour transformer la date égyptienne en date julienne se trouvent donc ainsi indubitablement démontrées (*).

(*) Devant, dans ce qui va suivre, recourir fréquemment aux tables abrégées du soleil et de la lune que M. Largeteau a composées, tables que l'on trouvera jointes au présent ouvrage, il est essentiel que j'indique les amplitudes des erreurs que peuvent comporter les résultats qu'on en déduit.

Pour les apprécier, M. Largeteau a comparé ces résultats à ceux que le calcul complet, fait avec les tables réputées les plus exactes, donne dans les circonstances les plus défavorables aux siennes; c'est-à-dire lorsque les quantités qu'il y a négligées seraient toutes de même sens, et auraient atteint chacune leur maximum individuel. Il est arrivé ainsi aux conclusions suivantes :

1° Les dates des équinoxes et des solstices, déduites des tables abrégées, ne peuvent pas différer, de plus de 25^m, de celles que donnerait le calcul complet des lieux du soleil, effectué avec les tables de Delambre, et en adoptant les formules de la précession établies dans la *Mécanique céleste*.

2° En supposant que l'on cherche les dates des phases lunaires, pour des époques qui remontent jusqu'à 1200 ans avant l'ère chrétienne, l'erreur des tables abrégées, évaluée par comparaison avec les tables rigoureuses de Damoiseau ou de Burkardt, ne peut pas dépasser $1^h\ 45^m$.

Ces limites de précision suffisent de reste pour les recherches purement chronologiques. Elles suffiront aussi à la préparation des études d'astronomie ancienne. Souvent même, l'emploi des tables abrégées servira pour les conduire aussi loin qu'elles peuvent aller; et la facilité, la rapidité, la sûreté des épreuves que l'on pourra tenter ainsi en peu de temps, permettront de traiter une multitude de questions qui auraient été à peine abordables sans cet utile secours.

J'ai exposé cet exemple avec tous les détails nécessaires pour que l'on pût clairement voir la raison des opérations qu'il faut successivement effectuer. Je serai plus bref pour les suivants, où la marche du calcul est toujours presque exactement la même.

46. 2° Différence des longitudes de la lune et du soleil, mesurée à Alexandrie par Ptolémée avec l'astrolabe, dans la 2ᵉ année d'Antonin, la 886ᵉ de Nabonassar, le 25ᵉ jour (civil) du mois égyptien phamenoth, après le lever du soleil, 5 heures équinoxiales et $\frac{1}{4}$ avant midi. (Almageste, livre IV, page 294, éd. de Halma.)

L'instant ici désigné étant antérieur au midi du 25 phamenoth civil, est compris dans le 24 phamenoth astronomique, commençant à midi. La date égyptienne astronomique sera donc :

Année de Nabonassar 886ᵉ, 24 Phanemoth, à $18^h\frac{3}{4}$, compté de midi.

Ou encore :

Année de Nabonassar 886ᵉ, jour 204ᵉ, $18^h\frac{3}{4}$
La date de l'ère est : } le temps étant
Année de Nabonassar 1ʳᵉ, jour 1ᵉʳ, 0^h } compté de midi.

L'intervalle de temps écoulé
depuis l'ère est donc : 885 C, 203ʲ, $18^h\frac{3}{4}$.

Je désigne par C, l'année de 365 jours, comme je l'ai fait précédemment. L'évaluation donnée par ce calcul est précisément celle de Ptolémée. Seulement, il écrit $18^h.\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$, selon l'usage qu'avaient les Grecs d'exprimer les quantités fractionnaires par des sommes de fractions dont le numérateur fût l'unité.

47. La date égyptienne de l'observation se transforme en date julienne, par le calcul suivant :

Année de Nabonassar 886^{e}, 1er Thot, à midi = 4851^{e}, 20 juillet, à 12^{h} comptées de minuit.

Ou, comme cette année est commune, ainsi que je le marque.....	4851^{e}, jour 201^{e},	12^{h}.
Du 1er Thot astronomique, à midi, au 24 Phamenoth, jour 204^{e}, à 18$^{h}\frac{3}{4}$, l'intervalle est...	jours 203,	18$^{h}\frac{3}{4}$.
Sommes additives au 1er janvier...	404^{j},	30$^{h}\frac{3}{4}$.

La somme des heures surpasse 24; extrayez-en ce nombre, que vous ajouterez comme une unité à la somme des jours. Elle deviendra 405. Extrayez-en 365, composant l'année commune 4851, vous aurez finalement pour la date julienne de l'observation :

Année 4852^{e}, jour 40^{e}, à 6$^{h}\frac{3}{4}$, temps vrai d'Alexandrie, compté de minuit.

Ou encore.....	Année 4852^{e}, 9 février, jour 40^{e},	6$^{h}\frac{3}{4}$.
L'ère de Nabonassar dans ce même système est.....	Année 3967^{e}, 26 février, jour 57^{e},	12^{h}.

48. Si ces dates sont justes, et d'accord entre elles, leur intervalle en jours et heures, doit se trouver le même qu'on le déduit des énoncés égyptiens. Cette vérification est facile à faire par notre formule générale de la page 253. Les éléments symboliques du calcul seront tels qu'il suit:

FORME des ANNÉES DÉSIGNÉES.					
$3967=4(991)+3$	$m=991$	$x=3$	$\gamma_x=+1$	$n=57$	$h=12$
$4852=4(1212)+4$	$m'=1212$	$x'=4$	$\gamma_{x'}=+1$	$n'=40$	$h'=6\frac{3}{4}$
Conséquemment.	$m'-m=221$	$x'-x=+1$	$\gamma_{x'}-\gamma_x=0$	$n'-n=-17$	$h'-h=-5\frac{1}{4}$

Or l'expression de l'intervalle des deux dates juliennes est :

$$I = (m' - m)(4C + 1) + (x' - x)C + \gamma_{x'} - \gamma_x + n' - n + h' - h,$$

la lettre C désignant, selon nos conventions, une année julienne commune de 365 jours. Cet intervalle devient donc ici :

$$884\,C + 221 + C - 17^j - 5^h\tfrac{1}{4};$$

ou, en s'arrangeant pour ne le composer que de quantités positives :

$$885\,C + 203^j,\ 18^h\tfrac{3}{4}.$$

précisément comme nous l'avions déduit des dates égyptiennes, d'accord avec Ptolémée. L'exactitude de ce retour confirme donc la justesse de nos règles de transport.

49. Parmi les phénomènes célestes que les anciens ont observés, les éclipses de lune, de soleil, ou d'étoiles, et les élongations de la lune au soleil sont les seuls que l'on puisse employer pour établir ou confirmer des concordances absolues de dates, sans avoir jamais à y craindre une incertitude d'un jour; parce que les éléments de ces phénomènes varient avec trop de rapidité pour que les erreurs supposables des observations, réunies à celles des tables astronomiques auxquelles on les compare, puissent atteindre une pareille limite, ou même en approcher de fort loin. Mais on ne saurait, par exemple, se fier ainsi aux observations d'équinoxes ou de solstices. Car les premières mêmes, qui sont les moins incertaines, peuvent être facilement en erreur d'un quart de jour, d'un demi-jour, et quelquefois d'un jour entier. Comme ce fait importe beaucoup à l'histoire de l'astronomie, j'en citerai trois exemples, qui achèveront en outre de confirmer nos règles de transport.

50. 1° Équinoxe automnal observé par Hipparque dans la 32^{e} année de la 3^{e} période calippique, peut-être à Rhodes, peut-être à Alexandrie. (Almageste, livre III, pag. 161, édit. de Halma.) La date égyptienne donnée par Ptolémée, après la rectification d'une faute de manuscrit dont je parlerai plus loin, est :

Année de Nabonassar 601, dans la nuit du 3^{e} épagomène, à minuit d'Alexandrie.

Ce qui, exprimé astronomiquement, équivaut à :

Année de Nabonassar 601, jour 363^{e}, à 12^{h}, temps d'Alexandrie, compté de midi.

La conversion en date julienne s'effectue par les opérations suivantes :

De Nabonassar 601^{e}, 1er Thot, à midi d'Alexandrie = 4566^{e}, 29 septembre, à 12^{h}, compté de minuit.

Ou, parce que l'année julienne est commune.	4566^{e}, jour 272^{e},	12^{h}.
De là au 363^{e} jour égyptien, 12^{h}, l'intervalle est	362,	12^{h}.
Somme additive au 1er janvier....	635^{e},	0^{h}.

Ce qui donne pour la date transformée :

Année 4567^{e}, jour 270^{e}, à 0^{h}, temps d'Alexandrie, compté de minuit.

Ou, comme l'année julienne 4567 est commune :

Année 4567^{e}, 27 septembre, 0^{h}.

En retranchant 1^{h}. 50^{m}., le résultat sera rapporté au méridien de Paris ; et l'on aura finalement

Équinoxe automnal observé par Hipparque : année 4567^{e}, 26 septembre, jour 270^{e}, à 22^{h}. 10^{m}., temps vrai à Paris, compté de minuit.

Les tables abrégées de M. Largeteau, calculées aussi pour le méridien de Paris, placent ce même équinoxe au . . ., 26 septembre, $16^{h}.13^{m}$, temps moyen à Paris, compté de minuit.

En négligeant la différence du temps vrai au temps moyen, qui n'atteint jamais 20 minutes, ainsi que la petite incertitude des tables approximatives, la date d'Hipparque serait donc trop tardive de $5^{h}.,57^{m}.$.

51. La réfraction atmosphérique a dû, indépendamment de toute autre cause, introduire ce sens d'erreur dans toutes les déterminations d'équinoxes d'automne, observés aux armilles. Car, élevant toujours le soleil au-dessus de sa hauteur vraie, elle retarde son retour dans le plan des armilles, quand il redescend du solstice d'été vers le solstice d'hiver ; et elle hâte au contraire l'instant de son arrivée dans ce plan, lors de l'équinoxe vernal, quand il remonte du solstice d'hiver au solstice d'été. Sans doute, l'instant de l'équinoxe automnal que nous venons de calculer n'a pas pu être fixé immédiatement par une observation de ce genre, puisque le passage du soleil dans l'équateur s'y est opéré pendant la nuit. Mais Hipparque a dû le conclure des époques, antérieures et postérieures, où cet astre a paru s'écarter également de ce plan, en sens opposés ; et la réfraction, affectant dans un même sens les deux positions comparées, devait encore donner une époque moyenne de passage, plus tardive que n'aurait été la vraie. Au reste, d'autres causes d'erreurs, non moins influentes que celle-là, se mêlaient sans doute avec elle, comme je le dirai dans un moment.

52. 2° Durant cette même année calippique, Hipparque observa encore l'équinoxe vernal suivant. (Almageste, l. III, ch. II, p. 154.) Il offrit cette circonstance remarquable, que

le soleil, d'abord amené dans le plan des armilles vers la cinquième heure du jour, descendit ensuite au-dessous, et y fut ramené de nouveau vers la onzième heure. On voit ici l'effet du décroissement des réfractions à d'inégales hauteurs, combiné avec le progrès continu du mouvement propre de l'astre vers le pôle. Dans la première phase, la plus basse, l'énergie de la réfraction élevait le centre apparent du disque jusque dans le plan des armilles, avant qu'il dût s'y trouver en réalité. Plus tard, quand il s'éloigna davantage de l'horizon, la réfraction, devenue moindre, le laissa voir en-dessous des armilles, plus près de son lieu vrai; et enfin, il y rentra la deuxième fois, élevé par son propre mouvement polaire, combiné avec ce qui restait encore de la réfraction, à cette plus grande hauteur. La seconde phase de l'observation est donc la meilleure, et c'est à elle qu'il faut s'arrêter. L'époque que Ptolémée lui assigne est :

Année de Nabonassar 602, le 27 Mechir (civil), à 11^h du matin, ou 1^h avant midi. (Almageste, livre III, p. 154, éd. de Halma.)

L'observation étant antérieure au midi du jour civil désigné, il faut la rapporter au jour astronomique immédiatement précédent; ce qui donne pour sa date astronomique :

Année de Nabonassar 602, 26 Mechir, à 23^h, comptées de midi.

Ou encore :

Année de Nabonassar 602, jour 176^e, à 23^h.

Maintenant, notre table générale de concordance donne pour Alexandrie :

Année de Nabonassar 602, 1^{er} Thot, à midi = 4567^e, 29 septembre, à 12^h, temps compté de minuit.

ou encore :

	4567^{c}, jour 272^{e},	12^{h}.
De là jusqu'au 26 Mechir, 23^{h}, l'intervalle est :	jours 175,	23^{h}.
Somme.....	448^{j},	11^{h}.

La date julienne sera donc :

Année 4568^{c}, jour 83^{e}, 11^{h};

ou encore :

Année 4568^{c}, 24 mars, à 11^{h}, temps d'Alexandrie, compté de minuit.

En retranchant $1^{h}\ 50^{m}$, le temps correspondant pour Paris sera $9^{h}\ 10^{m}$.

Les tables abrégées de M. Largeteau placent ce même équinoxe au 24 mars, à $13^{h}\ 32^{m}\ 29^{s}$, temps moyen à Paris, compté de minuit.

En négligeant les petites incertitudes de ces tables, ainsi que la différence du temps moyen au temps vrai, la détermination d'Hipparque serait encore trop tardive de $4^{h}\ 22^{m}$.

53. Ce retard ne peut pas être attribué au reste d'influence de la réfraction, puisqu'il devrait au contraire hâter le passage apparent du soleil dans le plan des armilles. Mais des causes d'erreurs bien plus graves ont pu être introduites, par l'inexacte direction de leur plan, par ses variations sous la vive influence de la radiation solaire, par le peu de délicatesse du mode d'observation ; enfin, quoique dans une proportion moindre, par l'incertitude de la fixation du temps absolu.

54. Quelque imparfaites que semblent être ces déterminations d'équinoxes, elles le sont beaucoup moins que celles que Ptolémée dit avoir obtenues par lui-même, pour les leur comparer, et en déduire la durée de l'année solaire. Pour en donner la preuve, je prendrai comme exemple l'équinoxe d'automne, qu'il dit avoir observé *avec le plus grand soin*, dans la 3^{e} année d'Antonin, la 887^{e} de Nabonassar, dans l'intention

expresse de le comparer au premier des deux que nous venons de calculer. (Almageste, liv. III, ch. II, page 161.) La date qu'il lui assigne est, dans cette 887^{e} année, le 9 athyr (civil), une heure après le lever du soleil, à très-peu près. Les heures temporaires étant égales aux heures équinoxiales à ces époques de l'année, la date astronomique sera :

De Nabonassar année 887, 8 Athyr, 19^{h}, comptées de midi;

ou encore :

Année 887, jour 68^{e}, 19^{h}.

Pour l'équinoxe correspondant d'Hipparque, la date était :

Année 601, jour 363^{e}, 12^{h}.

L'intervalle temporaire des deux observations est donc 285 ans 70^{j} 7^{h}.

C'est précisément la valeur que Ptolémée lui attribue. Seulement, au lieu de 7^{h}, il dit $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{20}$ de jour, *à très-peu près*. Ainsi, nos deux énoncés de date sont les mêmes qu'il a employés.

Maintenant, notre table générale de concordance donne pour Alexandrie :

Année de Nabonassar 887, 1er Thot, à midi = 4852^{e}, 20 juillet, à 12^{h}, compté de minuit;

ou encore :

	Année 4852^{e}, jour 201^{e},	12^{h}.
De là au 8 Athyr, jour 68^{e}, 19^{h}, l'intervalle est :	jours 67,	19^{h}.
	Sommes additives au 1er janvier..... 269^{j},	7^{h}.

La date julienne de cet équinoxe sera donc :

Année 4852^{e}, jour 269^{e}, 7^{h};

ou encore :

Année 4852^{e}, 26 septembre, 7^{h}, temps vrai d'Alexandrie, compté de minuit.

En retranchant de là 1^{h} 50^{m}, le temps vrai pour Paris sera :

26 septembre, 5^{h}10^{m}, compté aussi de minuit.

Or, les tables abrégées de M. Largeteau placent ce même équinoxe au 24 septembre, à $19^h\ 24^m$, temps moyen à Paris, compté de minuit.

Négligeant donc les petites incertitudes de ces tables, ainsi que la différence du temps vrai au temps moyen, la détermination de Ptolémée se trouve être trop tardive de $1^j\ 9^h\ 46^m$.

55. Il ne peut pas s'être glissé d'erreur dans nos conversions. Car l'intervalle des dates juliennes des deux équinoxes ici comparés s'accorde exactement avec l'intervalle de leurs dates égyptiennes calculées tout à l'heure. C'est ce que l'on peut vérifier en leur appliquant la formule de la page 253. En effet, nous avons ici :

Pour l'équinoxe automnal d'Hipparque, p. 294: année 4567, jour 270^e, 0^h.
Pour l'équinoxe automnal de Ptolémée : année 4852, jour 269^e, 7^h.

Le type du calcul se formera donc comme il suit :

FORME des ANNÉES DÉSIGNÉES.					
$4567=4(1141)+3$	$m=1141$	$x=3$	$\gamma_x=+1$	$n=270$	$h=0$
$4852=4(1212)+4$	$m'=1212$	$x'=4$	$\gamma_{x'}=+1$	$n'=269$	$h'=7$
Conséquemment.	$m'-m=71$	$x'-x=+1$	$\gamma_{x'}-\gamma_x=0$	$n'-n=-1$	$h'-h=+7$

Or, l'expression de l'intervalle des dates juliennes est

$$I=(m'-m)(4C+1)+(x'-x)C+\gamma_{x'}-\gamma_x+n'-n+h'-h.$$

la lettre C désignant une année commune de 365 jours, équivalente à l'égyptienne vague. Cet intervalle deviendra donc ici

$$I=284C+71^j+C-1^j+7^h=285C+70^j+7^h.$$

Résultat identiquement tel que les dates égyptiennes nous l'avaient donné.

56. Or, c'est précisément de cet équinoxe automnal si défectueux que Ptolémée tire la confirmation de l'année solaire trouvée par Hipparque. Pour reproduire son calcul, mettons l'intervalle égyptien sous la forme suivante, en y remplaçant les 7^h par $\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ de jour, comme il l'a fait, l'expression de cet intervalle deviendra :

$$285\,C + 71^j\frac{1}{4} - 1^j\frac{1}{4} + \frac{1}{4}^j + \frac{1}{20}^j.$$

Alors, en réduisant, nous aurons :

$$285\,C + 71^j\frac{1}{4} - \frac{19}{20}^j.$$

Dans cet intervalle il s'est opéré 285 retours de l'équinoxe automnal, comprenant autant d'années solaires vraies. On obtiendra donc la durée moyenne d'une de ces années en le divisant par 285. Or $71\frac{1}{4}$ est égal à $\frac{285}{4}$; et $\frac{19}{20.285}$ équivaut précisément à $\frac{1}{20.15}$ ou $\frac{1}{300}$. L'année résultante est donc

$$C + \frac{1}{4}^j - \frac{1}{300}^j \quad \text{ou} \quad 365^j\frac{1}{4} - \frac{1}{300}^j,$$

identique avec celle qu'Hipparque avait trouvée. Mais on voit, avec quel artifice numérique d'approximation, les 7^h sont transformées en $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{20}$ de jour, au lieu de $\frac{1}{24}$, pour arriver si juste à cette même fraction $\frac{1}{300}$. Cela, joint à l'imperfection grossière du deuxième équinoxe pris pour terme de comparaison, indique, avec une extrême vraisem-

blance, que Ptolémée ne l'a pas observé réellement, mais qu'il l'a fabriqué par computation, de manière qu'il reproduisît rigoureusement l'année d'Hipparque dont il voulait qu'on lui attribuât la confirmation. Malheureusement, ce cas n'est pas le seul où Ptolémée donne légitimement lieu à des soupçons pareils.

57. Il ne me reste plus qu'à montrer comment on peut transformer une date julienne dans la date correspondante du calendrier de Nabonassar. Cette application inverse des précédentes est également facile, et s'effectue d'après des principes pareils.

Je prends pour exemple la date julienne de l'équinoxe automnal de Ptolémée, que nous avons trouvé être :

Année de la période julienne 4852, 26 septembre, jour 269^e, à 7^h vraies au méridien d'Alexandrie, le temps étant compté de minuit.

Je cherche d'abord la date julienne du thot vague qui s'est réalisé dans l'année de la période julienne 4852. Pour cela je consulte notre tableau général des époques des thots, qui nous donne immédiatement la concordance suivante :

Année de Nabonassar 887, 1^{er} Thot, à midi vrai, ou 0^h = de la période julienne 4852^e, 20 juillet, jour 201^e, à 12^h vraies, sous le méridien d'Alexandrie, le temps étant compté de minuit.

D'après la table, le thot a été unique dans l'année julienne assignée. Il s'est réalisé en outre antérieurement à la date que nous voulons transporter. Il ne reste donc qu'à lui ajouter l'intervalle de temps qui s'est écoulé depuis sa date julienne propre jusqu'à celle-là. Or, cet intervalle est l'excès de la seconde sur la première. Prenant donc, dans l'année julienne 4852 :

la date à transporter... jour 269ᵉ, 7ʰ
celle du Thot vague.... jour 201ᵉ, 12ʰ
} l'origine du jour étant comptée de minuit pour toutes deux,

on aura pour différence l'intervalle cherché, qui sera... 67ʲ, 19ʰ.

Ceci, ajouté à l'époque du thot de l'année de Nabonassar 887, jour 1ᵉʳ, donnera la date transportée qui sera :

Année de Nabonassar 887, jour 68ᵉ, 8 Athyr, 19ʰ, temps vrai d'Alexandrie, compté de midi.

C'est précisément celle d'où nous sommes partis, et que nous avions prise dans l'Almageste.

La même méthode de conversion servira invariablement dans tous les cas pareils. Quoique je l'eusse déjà indiquée p. 282, j'ai dû la présenter ici avec tout le détail des opérations qu'elle nécessite, parce que nous aurons plusieurs fois besoin de l'appliquer.

58. Je terminerai cet exposé par une remarque qui me semble n'être pas sans importance. Les époques des équinoxes et des solstices se fixent astronomiquement par la condition que la longitude du soleil, comptée à partir du nœud ascendant de l'écliptique sur l'équateur, dans les positions respectives où ces plans se trouvent alors, ait une des quatre valeurs absolues 0°, 90°, 180°, 270°. Or, ce nœud se déplace continuellement sur l'écliptique mobile, en vertu du phénomène de la précession. Conséquemment, lorsque nous déterminons, d'après nos tables astronomiques actuelles, les instants où ces longitudes absolues ont dû se réaliser, dans des temps fort éloignés de nous, toute erreur sur le mouvement de précession se reporte entière sur le résultat ainsi calculé. Or, l'évaluation de ce mouvement qui a été donnée

par Laplace, et que Delambre a admise dans la confection de ses tables solaires, s'écarte sensiblement de celle qui s'obtient aujourd'hui par des recherches plus précises. Pour des époques antérieures à l'ère chrétienne de deux siècles, ce qui répond à peu près au temps d'Hipparque, la position absolue du point équinoxial sur l'écliptique mobile se trouve de 5′ 35″ plus distante de son lieu actuel qu'elle ne l'est par les formules de Laplace. Or, la marche moyenne du soleil sur cette écliptique étant de 59′ 8″ $\frac{1}{3}$, par jour de 24 heures, le temps qu'il emploie pour décrire ces 5′ 35″ est $2^h\ 15^m\ 57^s$. L'instant absolu d'un équinoxe ou d'un solstice, calculé d'après nos tables, pour cette distance de nous, différera donc de cette quantité selon la précession que l'on adoptera; et ainsi, quand nous apprécions l'exactitude de la détermination faite par Hipparque d'un tel phénomène, nous ne pouvons répondre de la comparaison que dans cette limite d'exactitude, tant que nous ne sommes pas plus assurés de la valeur de la précession. Heureusement, les doutes qui peuvent rester sur l'évaluation de cet élément astronomique, n'influent pas, à beaucoup près, au même degré, sur les instants absolus des éclipses anciennes calculés d'après nos tables; parce que la précession employée étant la même pour la lune que pour le soleil, les élongations de ces astres, d'où les éclipses dépendent, n'en sont que peu ou point affectées. Les incertitudes qui peuvent aussi rester encore sur le déplacement séculaire du plan de l'écliptique, relativement à l'équateur terrestre, sont également sans influence dans ces calculs, parce que le plan de l'orbe lunaire participe à ce déplacement de l'écliptique, en se maintenant toujours dans une inclinaison moyenne constante relativement à lui. Mais les éléments propres du

mouvement de la lune présentent d'autres indéterminations qui affectent notablement les époques des anciennes éclipses, lorsqu'on les conclut de nos tables modernes; et peut-être les observations de ces phénomènes, que Ptolémée nous a transmises, n'ont-elles pas été suffisamment prises en considération pour évaluer les constantes théoriques sur lesquelles reposent les tables employées aujourd'hui.

59. Ayant ainsi fait complétement connaître le système des années de Nabonassar, et leurs rapports avec le calendrier julien, je vais tout de suite exposer divers autres modes de numération des temps qu'on y a rattachés, et qui ont été employés pour exprimer les dates des observations ainsi que des événements, non-seulement dans l'antiquité, mais jusque dans le moyen âge.

CHAPITRE III.

Années égyptiennes de 365 jours, commençant à la fin du règne d'Alexandre le Macédonien, et à l'avénement de Philippe Aridée.

ÈRE : DE NABONASSAR, ANNÉE 425^{e}, 1^{er} JOUR DE THOT, A MIDI VRAI OU 0^{h} AU MÉRIDIEN D'ALEXANDRIE ;

DE LA PÉRIODE JULIENNE, ANNÉE 4390, DIMANCHE 12 NOVEMBRE, JOUR 316^{e}, A 12^{h}, TEMPS VRAI D'ALEXANDRIE, COMPTÉ DE MINUIT.

60. C'est identiquement la série des années de Nabonassar, comptées d'une origine plus tardive. Ce second mode d'énumération des années égyptiennes vagues est habituellement employé par Ptolémée, pour dater les observations postérieures à la conquête de Babylone et de l'Égypte par les princes grecs. Indépendamment des motifs politiques qui ont pu déterminer l'introduction d'une nouvelle ère chez les astronomes alexandrins, elle avait, sur la chaldéenne, l'avantage d'exiger de moindres nombres pour exprimer les dates qui n'étaient pas très-anciennes. Au reste, leur réduction à celle-là est facile. Soit n le rang ordinal d'une année quelconque ainsi désignée, et N le rang ordinal de celle qui

coïncide avec elle en partant de l'ère de Nabonassar. On aura toujours :

$$N = 424 + n, \qquad \text{et réciproquement} \qquad n = N - 424.$$

Les dates de jour et d'heures resteront d'ailleurs les mêmes dans les deux notations.

61. Par exemple : l'équinoxe vernal observé par Hipparque, que nous avons plus haut calculé, § 52, est rapporté par Ptolémée à la 178ᵉ année d'Alexandre, 26 méchir, 23ʰ, date astronomique. Or, 178 + 424 font 602. La date astronomique comptée de Nabonassar sera donc

Année 602, 26 Méchir, 23ʰ, temps compté de midi,

comme nous l'avons employée.

Tous les énoncés de ce genre se ramèneront ainsi à l'ère de Nabonassar, après quoi on les tranformera en dates juliennes par notre table de concordance générale, comme précédemment.

62. Quand Ptolémée mentionne des années rapportées à cette nouvelle origine, il les désigne presque toujours comme comptées à partir *de la fin* d'Alexandre, ἀπὸ τῆς Ἀλεξάνδρου τελευτῆς. Cette expression ne signifie point, ou du moins ne suppose pas nécessairement, qu'Alexandre fût effectivement décédé le jour même 1ᵉʳ thot, auquel la 425ᵉ année de Nabonassar commence. Elle implique seulement qu'il est mort dans le courant de cette année-là. Car, quel que fût le jour, on a dû, selon l'usage égyptien, la lui ôter tout entière, et l'attribuer à son successeur. Ceci est une règle générale du canon de Ptolémée, et il faut ne pas la perdre de vue quand on veut l'identifier avec l'histoire.

63. On doit se garder de confondre ce système d'années

égyptiennes vagues avec celui que l'on trouve fréquemment employé par les écrivains arabes, sous la dénomination analogue d'années d'Alexandre, ou de la mort d'Alexandre. Ce nom s'applique alors à un autre prince, le premier de la dynastie des Séleucides, qu'ils désignent par la qualification de Dhilkarnain (ayant deux cornes). Le système d'années qu'on en fait procéder est tout différent des égyptiennes, comme on le verra plus loin quand nous l'exposerons.

CHAPITRE IV.

Années alexandrines fixes, commençant avec la 5ᵉ année vague du règne d'Auguste.

ÈRE : DE NABONASSAR, ANNÉE 724, 1ᵉʳ THOT, A 0^h OU MIDI VRAI AU MÉRIDIEN D'ALEXANDRIE ;

DE LA PÉRIODE JULIENNE 4689, VENDREDI 29 AOUT, JOUR 242ᵉ, A 12^h VRAIES, COMPTÉES DE MINUIT, SOUS LE MÊME MÉRIDIEN.

64. Ce sont des années de $365^j \frac{1}{4}$, rendues fixes, comme les juliennes, par une intercalation quatriennale, mais avec une dissemblance dans le placement de la bissextile, qui sera tout à l'heure expliquée. Elles sont d'ailleurs distribuées, comme les années égyptiennes vagues, en 12 mois de 30 jours, désignés par les noms anciens, à la suite desquels on place habituellement 5, et occasionnellement, 6 épagomènes. L'usage de cette année fixe commença chez les Alexandrins avec le 1ᵉʳ jour de la 5ᵉ année vague d'Auguste, qui était la 724ᵉ de Nabonassar. Théon atteste expressément cette condition, ou plutôt ce fait de concordance, à la fin du chap. 1 de son Exposition des tables manuelles de Ptolémée (pag. 30 et 32, édit. de Halma); et Ptolémée lui-même a exprimé sous cette nouvelle

forme les dates qu'il rapporte dans son traité sur les apparitions des fixes. Mais la forme ancienne demeura encore longtemps populaire en Égypte. De sorte qu'il y eut depuis lors, chez les Égyptiens, deux mois thot distincts; l'un vulgaire, continuant sa marche vague dans l'année solaire, comme précédemment; l'autre propre aux Alexandrins, et fixé par une intercalation quatriennale. Aussi Théon, dans l'ouvrage que je viens de citer, a-t-il exposé avec beaucoup de détail la manière de convertir les dates alexandrines fixes en dates égyptiennes vagues; ces dernières pouvant seules servir pour effectuer les computations astronomiques avec les tables de Ptolémée. Comme cette conversion ne nous est presque jamais nécessaire, je ne m'en occuperai que secondairement. Mais, par le même motif d'utilité que Théon avait en vue, je devrai exposer, avec le même soin, la transformation des dates alexandrines fixes en dates juliennes, afin que l'on puisse appliquer immédiatement nos tables astronomiques modernes au calcul des observations anciennes ou du moyen âge, qui ont été en fort grand nombre consignées sous cette forme, sauf une simple différence d'origine. Lorsqu'une pareille date aura été ainsi transportée dans le calendrier julien, on pourra, si l'on veut, retrouver sa concordance dans l'année égyptienne vague, en lui appliquant la méthode de conversion expliquée pour ce but au § 57.

65. Nous avons vu que l'année égyptienne vague se composait de 12 mois de 30 jours, suivis de 5 jours appelés par les Grecs *épagomènes*, c'est-à-dire additionnels. Lorsque les Alexandrins voulurent la rendre fixe, ils ajoutèrent à l'une des années de chaque tétrade, un sixième épagomène; ce qui portait la somme de quatre années consécutives à 1461 jours.

au lieu de 1460 qu'elle contenait auparavant. En cela, ils s'accordaient avec l'évaluation julienne. Mais ils en différèrent dans le mode d'insertion du jour supplémentaire, qu'ils placèrent à la fin de la troisième année de la 1re tétrade ; de sorte que la quatrième année se trouvait commencer ainsi, un jour plus tard qu'elle n'aurait fait, sans cette addition à la précédente. Le même retard initial d'un jour fut ensuite appliqué à la 8e année, à la 12e, et ainsi de suite, par l'addition d'un 6e épagomène à celle qui les précédait. Partant donc de la concordance initiale avec la période julienne, que j'ai mentionnée plus haut, les deux séries d'années, julienne et alexandrine fixe, procèdent parallèlement l'une à l'autre, comme le montre le tableau suivant, où la lettre B désigne celles de chaque série qui comprennent 366 jours, toutes celles qui ne portent point cette marque n'en ayant que 365.

CONCORDANCE DU COMMENCEMENT DES ANNÉES ALEXANDRINES, avec les années et les jours de la période julienne.

ALEXANDRINES.	JULIENNES.
1ere, 1er Thot, à midi vrai.	4689B, 29 août, à 12h vraies, compt. de minuit.
2.	4690, 29 août.
3B.	4691, 29 août.
4.	4692, 30 août.
5.	4693B, 29 août.
6.	4694, 29 août.
7B.	4695, 29 août.
8.	4696, 30 août.
9.	4697B, 29 août.
etc.	etc.

L'inspection de ce tableau découvre les conséquences suivantes :

1° Soit n le rang ordinal d'une année alexandrine quelconque. L'année de la période julienne dans laquelle son commencement est compris a toujours pour expression générale :

$$4688 + n.$$

2° Les années alexandrines qui commencent exceptionnellement à un 30 août julien, sont celles dont le rang ordinal n est divisible par 4, sans reste. Les années de la période julienne qui y correspondent se distinguent par ce même caractère numérique; c'est-à-dire que leur rang ordinal est exactement divisible par 4. Ainsi elles précèdent immédiatement les années bissextiles du calendrier julien.

3° Toute année alexandrine, commençant au 29 ou au 30 août julien, concourt nécessairement, dans son premier tiers, avec les quatre derniers mois d'une certaine année julienne, et dans le reste avec les huit premiers de celle qui la suit. Mais la différence d'origine rend le détail de ces concordances dissemblable. Je le présenterai donc ici séparément, pour les unes et pour les autres, afin que l'ayant sous les yeux, dans les deux cas, on puisse toujours choisir, sans équivoque, celui qui conviendra dans chaque application.

66. Le voici d'abord pour les années alexandrines, qui, *n'étant pas de la forme* $4m$, commencent au 29 août.

Tableau A.

DÉSIGNATION des jours égyptiens dont la concordance est exprimée.	LEUR RANG ordinal dans l'année alexandrine.	DATE qui leur correspond dans l'année julienne.	*Nota.* La concordance a lieu pour midi vrai du jour égyptien désigné ; et 12^h vraies du jour julien placé en regard.
1er Thot.	1	29 août.	1re portion, concourant avec les 4 derniers mois, d'une année de la période julienne P, occasionnellement commune ou bissextile.
1er Phaophi.	31	28 septembre.	
1er Athyr.	61	28 octobre.	
1er Choiak.	91	27 novembre.	
1er Tybi.	121	27 décembre.	
1er Méchir.	151	26 janvier.	2^e portion, concourant avec les huit premiers mois, de l'année de la période julienne P + 1, toujours commune.
1er Phaménoth.	181	25 février.	
4^e Phaménoth.	184	28 février.	
5^e Phaménoth.	185	1er mars.	
1er Pharmouti.	211	27 mars.	
1er Pachôn.	241	26 avril.	
1er Payni.	271	26 mai.	
1er Épiphi.	301	25 juin.	
1er Mésori.	331	25 juillet.	
1er des cinq ou six Épagomènes.	361	24 août.	

L'explication qui accompagne les deux accolades du tableau se justifie aisément. Car la règle qu'elle exprime n'est que la conséquence manifeste de la correspondance des deux séries d'années, établies dans le tableau précédent. Que l'année P soit commune ou bissextile, cela ne change point la relation des dates prises dans ses cinq derniers mois, puisque la bissextile qu'elle pourrait occasionnellement contenir, s'insère à la fin de février. Quant à l'année P + 1, elle ne peut pas être bissextile. Car, si elle l'était, l'année alexandrine, qui s'y termine, serait de la forme $4m$; et ainsi elle commencerait, non pas au 29, mais au 30 août. C'est

pour mettre sous les yeux l'effet de cette circonstance, que j'ai spécifié particulièrement les concordances du 4 et du 5 Phaménoth, dans la classe d'années alexandrines que nous considérons en ce moment, lesquelles ne peuvent jamais contenir un 29 février julien. Toutes ces concordances doivent d'ailleurs être prises dans les mêmes conditions que l'initiale, c'est-à-dire pour midi vrai, ou 0^h du jour égyptien astronomique; et pour 12^h du jour julien commençant à minuit, l'un et l'autre au méridien d'Alexandrie.

67. Voici, maintenant, un tableau analogue pour les années alexandrines, qui, *étant de la forme 4m*, commencent au 30 août.

TABLEAU B.

DÉSIGNATION des jours égyptiens dont la concordance est exprimée.	LEUR RANG ordinal dans l'année alexandrine.	DATE qui leur correspond dans l'année julienne.	*Nota.* La concordance a lieu pour le midi vrai du jour égyptien désigné, et 12^h vraies du jour julien placé en regard.
1er Thot.	1	30 août.	1re portion, concourant avec les quatre derniers mois d'une année julienne P, toujours commune.
1er Phaophi.	31	29 septembre.	
1er Athyr.	61	29 octobre.	
1er Choiak.	91	28 novembre.	
1er Tybi.	121	28 décembre.	
1er Méchir.	151	27 janvier.	
1er Phaménoth.	181	26 février.	
4e Phaménoth.	184	29 février.	2e portion, concourant avec les huit premiers mois de l'année julienne P + 1, toujours bissextile.
5e Phaménoth.	185	1er mars.	
1er Pharmouti.	211	27 mars.	
1er Pachôn.	241	26 avril.	
1er Payni.	271	26 mai.	
1er Épiphi.	301	25 juin.	
1er Mésori.	331	25 juillet.	
1er des cinq Épagomènes.	361	24 août.	

L'explication annexée aux accolades, se justifie comme précédemment. La comparaison des deux tableaux montre que, dans ce dernier, toutes les dates égyptiennes, jusqu'au

4 Phaménoth inclusivement, ont leur correspondante julienne plus tardive d'un jour que dans le tableau A. Mais, au 4 Phaménoth, l'insertion de la bissextile julienne rétablit ultérieurement l'identité; et, depuis le 5 Phaménoth, qui répond toujours au 1^er^ mars, les concordances sont pareilles jusqu'à la fin. Les conditions de correspondance relatives aux heures, sont d'ailleurs les mêmes, et telles que la concordance initiale les établit.

68. La fixation de l'année alexandrine ne changea rien au mode d'énumération des jours antérieurement usité. Le jour égyptien, désigné dans les énoncés de dates, est encore le jour civil, commençant au lever du soleil; tandis que le jour astronomique, de même dénomination, commence au midi vrai qui suit ce lever, et se compte continûment depuis ce point jusqu'à 24 heures. Les deux règles que nous avons établies, § 43, d'après ces mêmes conventions, pour les dates égyptiennes vagues, s'appliquent donc aussi aux dates alexandrines. Théon le dit expressément dans l'Exposé des tables manuelles; et les résultats qu'on obtient en suivant ces règles, sont conformes aux siens.

69. Avec ces préparations, il est très-facile de transformer une date alexandrine en date julienne. Pour cela le rang ordinal n de l'année alexandrine étant donné, on connaîtra l'année julienne $4688 + n$, dans laquelle elle commence. Si n *n'est pas de la forme* $4m$, ce commencement aura lieu au 29 août; et le premier tableau, coté A, indiquera toutes les concordances ultérieures des jours égyptiens qui la composent. Si l'année alexandrine désignée *est de la forme* $4m$, elle commencera au 30 août, et il faudra consulter le second tableau, coté B, pour connaître les concordances des jours

qu'elle contient. Dans un cas comme dans l'autre, les heures se transporteront conformément à leur concordance initiale; c'est-à-dire que le midi vrai, ou 0^h du jour astronomique égyptien, s'identifiera avec 12^h du quantième de jour julien correspondant, ce dernier commençant à minuit sous le méridien d'Alexandrie.

On ne trouve aucune observation qui ait été immédiatement rapportée à l'ère alexandrine. Mais la 309^e année de cette ère offre un point de départ, auquel un grand nombre de résultats astronomiques ont été postérieurement rattachés. Dans le courant de cette même année, le 17 septembre 284 de notre ère, de la période julienne 4997, Dioclétien avait été reconnu empereur. Bientôt après, il était venu combattre les rébellions qui s'étaient déclarées en Égypte; et il n'avait pas tardé à ramener cette contrée sous la domination romaine, ayant pris, dans Alexandrie même, Achilléus, qui s'était porté son compétiteur à l'empire. Les Alexandrins, selon leur usage, reportèrent dans leurs annales l'avénement du vainqueur au 1^{er} jour de l'année fixe où il était devenu leur maître; et ils en firent une ère nouvelle qu'ils appelèrent de son nom, en continuant d'ailleurs à compter les années depuis cette origine, suivant la forme fixe qu'ils avaient adoptée sous Auguste. L'époque de jonction se trouva même placée de telle sorte, que l'ordre de succession des bissextiles n'en fut pas interrompu. C'est ce que l'on verra dans ce qui va suivre.

70. Mais auparavant je dois prémunir le lecteur contre une similitude d'énoncés qui, bien qu'étrangère aux astronomes, et propre aux chronologistes, pourrait jeter de la confusion dans l'esprit et dans les calculs, si l'on n'en

avait pas l'explication. Suivant le canon des rois, rapporté page 278, l'avénement d'Auguste, comme souverain de l'Égypte, est fixé à l'année 719 de Nabonassar, 1^er^ jour de Thot, à midi vrai sous le méridien d'Alexandrie ; ce qui, par notre table de concordance, coïncide avec l'année de la période julienne 4684 ou — 30 de notre ère, 31 août, à midi vrai sous le même méridien, en faisant commencer le jour julien à minuit. L'histoire place en effet dans le cours de cette 719^e^ année égyptienne la prise d'Alexandrie, suite de la bataille d'Actium, qui rendit Auguste entièrement maître de l'Égypte. C'est pourquoi les chronologistes ont appelé cette époque l'*ère actiaque*. Ptolémée ne la définit que par le 1^er^ Thot vague qui la caractérise ; et il l'emploie une seule fois occasionnellement, comme origine particulière d'années vagues, au livre III, chap. VI, de l'Almageste (page 204, éd. de Halma). Les Alexandrins n'adoptèrent l'intercalation que cinq ans plus tard, au commencement de l'an de Nabonassar 724, le 1^er^ Thot vague étant arrivé en concordance avec le 29 août julien ; et ce fut là le point de départ des années alexandrines fixes, comme je l'ai spécifié en les annonçant. Il y eut dès lors deux séries d'années de formes distinctes, partant toutes deux de l'ère actiaque : l'une entièrement vague, usitée seulement pour les calculs astronomiques ; l'autre mixte, dont les cinq premières années seules sont vagues, les suivantes étant des années alexandrines fixes. Celle-ci a été employée dans la chronologie, sous la dénomination d'*années égyptiennes d'Auguste*, et aussi *des Augustes*, lorsqu'elle s'étendit au temps où ce nom était devenu un attribut commun des empereurs. Théon, qui était Alexandrin, a rapporté à ce système mixte les années qu'il date de l'ère

d'Auguste dans ses Fastes consulaires, comme on le voit par les nombres de jours intercalaires qu'il y attache ; et il faut y rapporter également une concordance de dates exprimée par Censorin, dans un passage que j'aurai plus loin occasion de citer. Quand une année de ce genre est désignée par son rang ordinal, compté de l'ère actiaque, pour trouver sa place exacte dans l'ordre des temps, il faut en retrancher 5 et prendre le reste comme des alexandrines fixes, comptées de leur ère propre. Enfin il y a encore une troisième sorte d'années, appelées aussi années d'Auguste, ou des Augustes, qui ont été spéciales aux Romains. Elles sont juliennes, et partent du 1^er^ janvier de l'année, où le titre d'Auguste fut décerné à Octave par le sénat de Rome. D'après cette condition, leur ère est placée dans la période julienne au 1^er^ janvier de l'année 4687, la 27^e^ avant l'ère chrétienne. Mais l'usage de celles-ci est spécialement historique. On ne connaît pas d'observations astronomiques qui y soient rattachées. Il est très-essentiel de ne pas confondre ces trois systèmes d'années, dites des Augustes, quand on les trouve mentionnées dans les textes latins ou grecs, sous cette commune dénomination. C'est pourquoi j'ai jugé nécessaire de spécifier exactement leurs formes diverses, ainsi que les ères diverses d'où elles dérivent.

71. L'ère de Dioclétien ne resta pas propre aux Alexandrins, et sans application civile, comme l'avait été leur ère d'Auguste. Letronne a parfaitement prouvé, par les inscriptions trouvées en Égypte, que son usage se répandit dans l'intérieur de ce pays, avec le calendrier alexandrin qui s'y rattachait. Il explique avec une grande vraisemblance cette adoption, par la popularité que Dioclétien se fit chez les

Égyptiens, en ordonnant au gouverneur romain, Arminius, de rétablir les anciens temples de leurs dieux, et de détruire ceux des chrétiens. Ceux-ci finirent également par employer l'ère de Dioclétien, leur persécuteur, en l'appelant l'*ère des martyrs*. Mais, comme le remarque encore Letronne, ils le firent par la nécessité où ils se trouvaient d'emprunter les méthodes et les calculs des savants alexandrins, pour l'établissement de leur cycle pascal. Cet usage, qui répugnait à leur sentiment, ne cessa qu'après l'introduction de notre ère chrétienne actuelle. Ce fut un des motifs décisifs qui la firent proposer et adopter.

L'ère de Dioclétien est fréquemment employée par les astronomes arabes conjointement avec le calendrier alexandrin fixe, rattaché à cette origine. Ils la désignent sous le nom d'*ère des Coptes*, parce que ceux-ci, descendants des anciens Égyptiens, ont persisté longtemps à l'employer après s'être convertis au christianisme.

Ces avertissements étant donnés, j'arrive à ce renouvellement d'origine, après lequel les années alexandrines fixes ont été effectivement employées en astronomie.

CHAPITRE V.

Années de Dioclétien.

ÈRE : ANNÉE ALEXANDRINE FIXE, 309^{e}, 1^{er} THOT, A MIDI VRAI AU MÉRIDIEN D'ALEXANDRIE :

DE LA PÉRIODE JULIENNE 4997^{B}, VENDREDI 29 AOÛT, JOUR 242^{e}, A 12^{h} DE TEMPS VRAI COMPTÉ DE MINUIT, SOUS LE MÊME MÉRIDIEN.

72. L'année 309 ou 308 + 1, qui sert ici d'origine, est séparée de l'ère alexandrine primitive par 77 tétraétérides complètes. Les dates juliennes du 1^{er} jour de Thot recommencent donc à s'y succéder dans un ordre exactement pareil, comme le montre en effet le tableau suivant :

RANG ORDINAL des ANNÉES DE DIOCLÉTIEN.	DATE DE LEUR COMMENCEMENT	
	DANS LES ANNÉES ALEXANDRINES.	DANS LA PÉRIODE JULIENNE.
1, 1^{er} Thot.	309^{e}, 1^{er} Thot.	4997^{B}, 29 août.
2	310	4998, 29 août.
3^{B}	311^{B}	4999, 29 août.
4	312	5000, 30 août.

Ce tableau nous découvre immédiatement les conséquences suivantes.

1° Soit n le rang ordinal d'une année dioclétienne quelconque. L'année alexandrine qui concorde complétement avec elle, a pour rang ordinal :

$$308 + n ;$$

et l'année de la période julienne dans laquelle son commencement est compris, a pour expression générale :

$$4996 + n.$$

2° Le mode d'intercalation est identiquement le même que dans les années alexandrines. La bissextile s'y représente également par un sixième épagomène, placé à la suite du 365^e jour. Les années pour lesquelles le nombre ordinal n est un multiple de 4 commencent le 30 août julien, les autres, le 29. L'interprétation des dates égyptiennes, et leur conversion en dates juliennes, se font donc exactement suivant les mêmes règles que pour les années alexandrines.

73. Par exemple : Théon, dans son Commentaire sur l'Almageste, expose le calcul d'une éclipse de lune qu'il dit avoir été observée très-exactement à Alexandrie, dans l'année 81 de Dioclétien. Il en fixe le milieu au 29 athyr, à $16^h \frac{3}{4}$ équinoxiales, après le midi du 29. Cette année 81 a commencé dans l'année de la période julienne 4996 + 81 ou 5077 ; de l'ère chrétienne + 364. Le nombre 81 n'est pas divisible par 4 ; l'année dioclétienne qu'il désigne a donc eu son 1er thot au 29 août, ce qui nous renvoie au 1er tableau A de la page 312. L'année P qui le commence est, ainsi que nous venons de le reconnaître, 5077 ; et le 29 athyr y est compris. Le 1er athyr, à midi ou 0^h, y répond au 28 octobre à 12^h,

comptées de minuit. Par conséquent, le 29, ou 30 — 1 athyr, y concorde avec le 27 — 2 ou 25 novembre, dans les mêmes conditions d'heures. L'addition ultérieure des $16^h \frac{5}{4}$ nous conduit au 25 novembre $28^h \frac{5}{4}$, ou 26 novembre $4^h \frac{5}{4}$. La date complète de l'observation sera donc :

Année de la période julienne 5077, de l'ère chrétienne + 364, 26 novembre, à $4^h\ 45^m$, temps vrai d'Alexandrie, compté de minuit.

En retranchant de là $1^h\ 50^m\ 10^s$, on aura, pour Paris, le 26 novembre à $2^h\ 55^m$ de temps vrai, compté de minuit. Or, en effet, on trouve, par les tables abrégées de M. Largeteau, qu'il y a eu une opposition écliptique dans cette même année 5077 ou + 364, le 26 novembre, à $1^h\ 39^m$, temps moyen à Paris, compté de minuit; c'est-à-dire $1^h\ 16^m$ avant l'époque de temps vrai que l'observation de Théon donne, pour ce même méridien. Cet écart n'excède pas ce que l'on peut attribuer, en somme, aux incertitudes des tables abrégées, à la différence du temps vrai au temps moyen, et à l'erreur même que l'observation comportait. Sa petitesse confirme ainsi, par une épreuve décisive, toutes les concordances et toutes les réductions que nous avons établies.

74. Quoique l'exemple qui précède puisse suffire pour servir de guide dans les transformations analogues que l'on aurait à effectuer, je crois devoir y joindre les trois suivants, qui nous seront ultérieurement utiles.

L'astronome arabe Ebn-Jounis mentionne une éclipse de soleil observée par lui au Caire en l'an 720 de Dioclétien, dans l'après-midi du 28 Tybi. Les circonstances du phénomène ne sont pas fixées par des indications d'heures comme dans Ptolémée. Mais il est dit qu'au moment où l'éclipse

commença d'être perceptible, le soleil était à 18° 30′ de hauteur sur l'horizon vers l'occident. (Notices des manuscrits, publiées par l'Académie des inscriptions, tome VII, page 194.) De là, par un calcul approximatif, dont je donne ici les principes en note, on conclut que l'angle horaire occidental du soleil devait être à peu près alors 55° 5′, ou, en temps vrai du Caire, $3^h\,40^m\,20^s$, *après* le midi du 28 Tybi, jour désigné (*). En ajoutant à la date dioclétienne

---

(*) L'angle horaire P, qui détermine l'heure, est donné par la formule établie au tome II de mon *Traité d'astronomie*, 3e édition, page 401; j'en ai présenté un exemple de calcul numérique à la page 482 du tome III. Pour en faire ici l'application, il faut trouver les valeurs des trois arcs Z, D, Δ, qui en sont les éléments. Z est la distance zénithale vraie de l'astre au moment de l'observation; D, la distance du pôle au zénith, complément de la latitude du lieu; Δ, la distance angulaire de l'astre au pôle élevé. Ici, la hauteur observée, 18° 30′, nous donne, par complément, la distance zénithale apparente 71° 30′; et, en y ajoutant la réfraction correspondante, évaluée d'après les circonstances météorologiques moyennes du Caire, vers la fin de janvier, on aura Z. La latitude du Caire est 30° 2′ 4″ boréale; son complément, 59° 57′ 56″, sera la valeur de D. Pour avoir Δ, on devra d'abord calculer par les tables du soleil la longitude l de cet astre et l'obliquité ω de l'écliptique qui se rapportent à la date donnée. Le produit $\sin\omega \sin l$ exprimera le sinus de la déclinaison actuelle d; et en prenant son complément $90° - d$, on aura Δ. On pourra donc évaluer $\sin\frac{1}{2}P$ par son expression d'après la formule citée, et en conclure l'angle P, qui, converti en temps, donnera l'heure solaire vraie.

N'ayant besoin ici que d'une évaluation approximative, j'ai suppléé au calcul de l par le procédé suivant, qui suffira dans tous les cas pareils. J'ai cherché, par les tables abrégées de M. Largeteau, à quel jour de l'année 5716 de la période julienne avait lieu le solstice d'hiver. Cette détermination s'obtient en quelques instants. J'ai trouvé qu'il tombait au 16 décembre. De

cette désignation de l'heure, son énoncé astronomique sera :

Année de Dioclétien 720, 28 Tybi, à $3^h\ 40^m\ 20^s$, comptées de midi.

Alors la conversion en date julienne se fera comme il suit.

Le nombre 720 est un multiple de 4. Ainsi l'année dioclétienne 720 commence au 30 août, ce qui nous ramène au tableau B de la page 313. Ce commencement est placé dans l'année de la période julienne 4996 + 720, ou 5716^e,

---

là jusqu'au 24 janvier 5717, jour de l'observation d'Ebn-Jounis, la distance est 39 jours. Alors, prenant les Connaissances des temps de deux années consécutives, par exemple 1847 et 1848, j'en ai tiré le mouvement de déclinaison du soleil, depuis le solstice d'hiver, pendant le même nombre de jours. Je l'ai trouvé de 5° 38′ 40″. En retranchant cet arc de 23° 34′ 12″, obliquité de l'écliptique en l'an + 1004 d'après l'expression de ω', formée au tome IV de mon astronomie, page 337, le reste 17° 55′ 32″, ou, en nombres ronds, 17° 56′, exprimera la valeur approchée de la déclinaison, qui, étant australe, donnera Δ égal à 107° 56′. J'ai joint à cet élément la distance zénithale apparente 71° 30′, non corrigée de la réfraction ; et je l'ai prise pour Z. Puis, avec la valeur de D donnée plus haut, j'ai obtenu, par la formule citée, l'angle P égal à 55° 5′, ou en temps $3^h\ 40^m\ 20^s$, comme je l'ai rapporté dans le texte. Bouvard a trouvé $3^h\ 40^m\ 24^s$ par un calcul que l'on doit supposer avoir été fait sur les données rigoureuses. (*Mémoires de l'Institut*, tom. II, pag. 10.) Mais, pour une simple vérification de date, telle que nous voulions ici l'obtenir, on voit qu'on peut se borner à la méthode approximative dont nous venons de faire usage, laquelle dispense de calculer la longitude du soleil par les tables rigoureuses. Cette circonstance rendant son application immédiate très-facile, et presque toujours suffisante, j'ai pensé qu'il était utile d'en exposer ici le détail. Dans cet exemple, j'ai calculé le mouvement de déclinaison à partir du solstice d'hiver. Dans l'exemple qui va suivre, je l'ai calculé en partant de l'équinoxe vernal, parce que l'observation précédait de peu cette phase. En général, il faut partir de la phase cardinale la plus proche.

qui est commune. C'est la valeur de P, pour ce tableau. Mais le 28 Tybi égyptien y tombe dans l'année suivante P + 1, ou 5717^B, qui est bissextile. Il faut donc le rapporter à celle-là. Or le 30 Tybi y arrive en regard du 26 janvier. Par conséquent le 28 Tybi devra être mis en regard du 26 — 2 ou 24 janvier, dans les conditions de concordance que notre tableau exprime. C'est-à-dire qu'on aura

Année dioclétienne 720, 28 Tybi, à midi vrai. = Année 5717^B, 24 janvier, à 12^h vraies, temps compté de minuit.

En ajoutant des deux parts $3^h\,40^m\,20^s$, on reproduira la date dioclétienne de l'observation; et son équivalente julienne sera

Année 5717^B, 24 janvier, à $15^h\,40^m\,20^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Si l'on retranche de là $1^h\,55^m\,41^s$, longitude du Caire à l'orient de Paris, le temps vrai, correspondant pour Paris, sera $13^h\,44^m\,39^s$, comptées pareillement de minuit. Or, en effet, les tables abrégées de M. Largeteau indiquent une conjonction écliptique pour ce même jour 24 janvier 5717, ou 1004 de notre ère; et elles l'y placent, pour Paris, à 13^h de temps moyen, compté de minuit. Les détails ultérieurs de l'application demanderaient un calcul rigoureux. Mais celui-ci, que l'on peut faire en quelques instants, suffit pour prouver que la date dioclétienne du phénomène a été bien donnée par l'astronome arabe, et que nous l'avons transportée dans le calendrier julien avec fidélité, tant pour la désignation du jour que pour celle de l'heure, approximativement conclue de ses indications.

75. L'exemple suivant est également tiré des observa-

tions d'Ebn-Jounis (Notice des manuscrits, tome VII, p. 190). Il s'agit encore d'une éclipse de soleil, qu'il dit avoir observée en l'an 709 de Dioclétien, *dans la matinée* du 27 Mésori (civil). L'heure n'est pas indiquée. Mais il la supplée en ajoutant qu'au commencement de l'éclipse la hauteur du soleil était de 27° à l'orient du méridien; et dans l'instant de la plus grande phase, de 45° du même côté de ce plan. De là, par le calcul approximatif dont j'ai exposé les principes dans la note de la page 322, on déduit aisément que les angles horaires, comptés du méridien supérieur, qui correspondaient à ces circonstances, étaient respectivement 64° 57′ et 43° 51′ 20″; ou, en temps solaire vrai, $4^h\,18^m\,18^s$ et $2^h\,55^m\,25^s$, avant midi. Les deux observations étant antérieures au midi du 27 Mésori (civil), il faut les rapporter astronomiquement au midi du 26. Cela donne pour les dates égyptiennes astronomiques:

Année de Dioclétien 709, 26 Mésori, $19^h\,41^m\,42^s$, et $21^h\,4^m\,35^s$, temps vrai, compté de midi au méridien du Caire.

La conversion en date julienne se fait comme il suit.

Le nombre 709 n'est pas un multiple de 4. Ainsi l'année dioclétienne 709 commence au 29 août, ce qui nous ramène au tableau A de la page 312. Ce commencement est placé dans l'année julienne 4996 + 709 ou 5705. C'est la valeur de P, pour ce tableau. Mais le 26 Mésori égyptien y tombe dans l'année suivante P + 1, qui sera 5706. Le 26 Mésori astronomique, commençant à midi, ou 0^h, y coïncide avec le quantième d'août 24 — 5, ou 19 août 12^h comptées de minuit. Ajoutant de part et d'autre $19^h\,41^m\,42^s$ et $21^h\,4^m\,35^s$, écoulées depuis le midi du 26, nous aurons pour les dates

juliennes :

Année 5706, 20 août, $7^h\,41^m\,42^s$, et $9^h\,4^m\,35^s$, temps vrai, compté de minuit au méridien du Caire.

Si l'on retranche de là $1^h\,55^m\,41^s$, longitude du Caire à l'orient de Paris, les heures correspondantes, pour Paris, seront respectivement $5^h\,46^m\,1^s$ et $7^h\,8^m\,54^s$, temps vrai, compté aussi de minuit.

En effet, les tables abrégées de M. Largeteau indiquent une conjonction écliptique dans cette même année 5706 ou + 993 de notre ère; et elles l'y placent au 20 août vers $8^h\,43^m$ de temps moyen à Paris, compté de minuit. Cette concordance exacte pour le jour, et très-approchée pour l'heure de la plus grande phase, vérifie donc la date dioclétienne donnée par Ebn-Jounis, ainsi que sa conversion en date julienne, telle qu'on la conclut des principes que nous avons établis.

On peut remarquer que, dans ce dernier exemple, l'observation du commencement de l'éclipse, et même l'observation de sa plus grande phase, sont *antérieures* à l'époque assignée par les tables pour la conjonction centrale. Le contraire avait lieu dans l'exemple précédent. Le commencement de l'éclipse y a été observé *après* l'époque indiquée par les tables pour la conjonction centrale. La parallaxe de la lune, indépendamment de toute autre cause, agissait, dans les deux éclipses, de manière à y produire cette opposition d'effets. Celle de l'année 5717 s'opérait à l'occident du méridien. L'observateur placé à la surface de la terre voyait la lune plus près de l'horizon qu'un observateur placé au centre : elle devait donc lui cacher le soleil *plus tardivement* qu'à l'observateur central. L'éclipse de l'année 5706, au contraire, s'opérait à l'orient

du méridien. La parallaxe, en abaissant la lune, l'amenait sur le soleil, pour l'observateur placé à la surface, *avant* qu'elle occultât cet astre pour un observateur placé au centre.

76. Le troisième exemple que je rapporterai est encore relatif à une éclipse de soleil observée au Caire par Ebn-Jounis. La date dioclétienne qu'il lui assigne la place au 14 Payni de l'an de Dioclétien 694. Hauteur du soleil sur l'horizon, lorsque l'éclipse commença d'être sensible aux yeux, 56° *environ* (sic); à la fin, 26° *environ*. (*Notices des manuscrits*, tome VII, page 182.) Le phénomène avait donc lieu dans l'après-midi, et à l'occident du méridien, puisque le soleil était moins haut dans cette dernière phase que dans la première. Les angles horaires qui se déduisent de ces données, par le calcul approximatif indiqué tout à l'heure, sont respectivement : 37° 4′ 48″ et 71° 56′ 0″, ce qui représente $2^h\,28^m\,19^s$ et $4^h\,47^m\,45^s$ de temps solaire vrai. Bouvard trouve quelques minutes de plus, par un calcul peut-être plus exact. Mais ces éléments nous suffiront ici.

L'observation étant postérieure au midi du jour civil désigné, celui-ci conserve sa dénomination; et la date astronomique complétée par l'angle horaire, devient, pour le commencement de l'éclipse par exemple :

Année de Dioclétien 694, 14 Payni, à $2^h\,28^m\,19^s$.

Le nombre 694 n'est pas divisible par 4. Donc l'année dioclétienne qu'il désigne commence au 29 août, ce qui nous reporte au tableau A de la page 312. Ce commencement est placé dans l'année julienne 4996 + 694 ou 5690. C'est la valeur de P pour ce tableau. Mais le 14 Payni y tombe dans l'année P + 1, qui sera 5691. Le 1er Payni astronomique,

commençant à midi, ou 0^h, y concourt avec le 26 mai 12^h, comptées de minuit; et, comme le mois de mai a 31 jours, le 6 Payni concourt avec le 31 mai. Cela porte le 14 Payni au 8 juin, dans les mêmes conditions d'heures. Ajoutant donc, de part et d'autre, $2^h\ 28^m\ 19^s$, écoulées depuis le midi de ce 14, la date julienne du commencement de l'éclipse, pour le Caire, conclue des indications d'Ebn-Jounis, sera :

Année de la période julienne 5691, 8 juin, à $14^h\ 28^m\ 19^s$, comptées de minuit au Caire.

Les tables abrégées de M. Largeteau indiquent en effet une conjonction écliptique à cette même date de l'année 5691, ou + 978 de notre ère; et elles l'y placent, pour Paris, vers $12^h\ 23^m$, le temps moyen compté de minuit. Ajoutant $1^h\ 55^m\ 41^s$, on aura le temps correspondant du Caire, qui sera $14^h\ 18^m\ 41^s$. L'observation d'Ebn-Jounis est un peu plus tardive; et en effet, ici, comme dans la première éclipse, la dépression optique causée par la parallaxe tendait à la retarder. Mais, sans entrer dans ces derniers détails, l'accord si proche de nos tables avec la date julienne que nous obtenons, montre bien qu'elle nous a été fournie par une interprétation fidèle.

77. Toutes les dates dioclétiennes affectées par Ebn-Jounis à des éclipses de soleil, qui arrivent nécessairement de jour, se traduiront en dates juliennes, de même que les précédentes; et l'on trouvera généralement que le quantième du jour civil égyptien y est marqué avec exactitude, conformément aux règles suivies par Ptolémée, ainsi que par Théon. Mais, pour les éclipses de lune, qui ont toujours lieu de nuit, Ebn-Jounis, et les autres astronomes arabes

qu'il cite, paraîtraient avoir craint que l'extension du jour égyptien, au-dessous de l'horizon occidental, ne fît confusion avec la première moitié des jours arabes, qui commencent le soir; car ils s'en sont interdit l'usage dans cette moitié. Ils ont exclu de même, de leurs énoncés astronomiques, la portion analogue des jours civils persans, qui commencent aussi au lever du soleil, comme les Égyptiens. Alors, pour spécifier complétement la nuit à laquelle appartient une observation, ils ajoutent à l'indication de la hauteur de l'astre, et au quantième des jours datés du soir, le nom de la férie, du jour de la semaine, qui, commençant au milieu de cette nuit-là, se continuera, pour les applications civiles, dans toute la journée suivante. C'est à la portion diurne de cette férie qu'appartiennent les jours égyptiens, ou persans, qu'ils mentionnent dans leurs énoncés. Alors ils se trouvent conformes aux règles de Ptolémée quand ils s'appliquent à des observations de jour postérieures à leur origine, c'est-à-dire postérieures au lever du soleil. Mais, pour celles qui ont été faites dans la nuit précédente, il faut employer dans le calcul astronomique le quantième du jour civil immédiatement précédent, que l'on fera continuer sans interruption de midi à midi. Il embrassera ainsi l'observation nocturne que l'auteur arabe a voulu désigner; et si l'expression n'en a pas été altérée par quelque faute de manuscrit, on en tirera toujours une date correcte. C'est ce que je vais prouver par deux exemples décisifs. Je rappelle que les jours de la semaine mentionnés par les auteurs arabes sont identiques avec les nôtres, et qu'ils les comptent, comme nous, continûment depuis 1 jusqu'à 7, en attribuant au dimanche le rang ordinal 1.

78. Dans les extraits d'Ebn-Jounis rapportés au tome VII des Notices des manuscrits, on lit, page 184 : « La lune se « leva éclipsée dans la nuit d'avant la V^e^ férie (d'avant le « jeudi), *qui était* le 20 Pachôn de l'an 695 de Dioclétien. « La fin de l'éclipse eut lieu à $1^h\ 12^m$ équinoxiales de la nuit. »

D'après ce que j'ai ci-dessus annoncé, la nuit désignée ici appartient, selon les prescriptions de Ptolémée, au 19 Pachôn astronomique, commençant à midi vrai. Le calcul nous fera voir tout à l'heure que ce midi était compris dans un 14 mai julien; et, pour cette date de l'année, Bouvard (Mémoires de l'Institut, tome II, page 8) a trouvé que le coucher du soleil avait lieu, sous la latitude du Caire, à $6^h\ 50^m\ 36^s$ de temps vrai, compté du même midi. Ajoutant donc à cette quantité $1^h\ 12^m$, la date astronomique de l'observation sera

Année dioclétienne 695, 19 Pachôn, à $8^h\ 2^m\ 36^s$, temps vrai, compté de midi au Caire.

Le nombre 695 n'étant pas un multiple de 4, cette année-là commençait au 29 août. Cela nous reporte au tableau A de la page 312. Son commencement était placé dans l'année de la période julienne 4996 + 695 ou 5691, qui se trouvera ainsi représenter P dans notre tableau. Mais le mois Pachôn appartenant à l'année P + 1, l'observation tombera dans 5692. Or, pour cette année, qui est commune, le tableau A nous fournit cette concordance :

1^er^ Pachôn à midi vrai = 26 avril, jour 116^e^, à 12^h, temps vrai, compté de minuit, au Caire.

Ajoutez, de part et d'autre, $18^j\ 8^h\ 2^m\ 36^s$, vous arrivez à l'instant marqué par la date dioclétienne; et le second membre vous donnera la date julienne équivalente, qui, com-

plétée par l'indication de l'année P + 1, sera

Année 5692^e, jour 134^e, 14 mai, à 20^h 2^m 36^s, temps vrai, compté de minuit au Caire.

On peut aisément vérifier que ce 14 mai julien était un mercredi, férie IV, veille du jeudi, ou férie V, dont la portion postérieure au lever du soleil concordait avec le 20 Pachôn, ainsi que le dit Ebn-Jounis.

Les tables abrégées de M. Largeteau indiquent, pour cette même date julienne, d'année et de jour une opposition écliptique, qu'elles fixent à 16^h 4^m de temps moyen du méridien de Paris, compté aussi de minuit. En ajoutant 1^h 55^m 41^s, longitude orientale du Caire relativement à Paris, l'époque de cette opposition en temps moyen du Caire sera 17^h 59^m 41^s. Elle se trouve donc précéder d'environ 2^h l'observation d'Ebn-Jounis. Cela devait être ainsi, en effet, par nécessité. Car le coucher du soleil au Caire ayant lieu ce même jour, selon le calcul de Bouvard, à 6^h 50^m 36^s du soir, ou à 18^h 50^m 36^s comptées du minuit précédent, cet astre était encore au-dessus de l'horizon occidental à l'instant de l'opposition mathématique; de sorte que la lune n'était pas encore levée alors. Ebn-Jounis ne put donc la voir qu'à une époque plus tardive. Il dit que, d'après les données qui servent de base à ses calculs, et qu'il prenait vraisemblablement dans Ptolémée, le moment du lever était voisin de l'opposition. Cela semble indiquer que dans sa pensée il le croyait postérieur, comme en effet nos nombres le donnent; puisqu'il ne mentionne que la fin de l'éclipse, et non sa phase médiane. Or, en effet, d'après nos tables, cette phase n'était pas observable au Caire.

79. Le second exemple que je choisis est encore tiré d'une éclipse de lune, observée au Caire par Ebn-Jounis. Elle est mentionnée à la même page 184 du recueil que j'ai cité. Celle-ci put être vue dans toutes ses phases. Elle arriva, au dire d'Ebn-Jounis, « dans la nuit d'avant la VI^e^ férie (d'a-« vant le vendredi), *qui était* le 10 athyr de l'an 696 de « Dioclétien. Hauteur de la lune au commencement de l'é-« clipse, 64° 30′ à l'orient du méridien; hauteur à la fin, 65° à « l'occident, *environ.* »

L'égalité presque exacte de ces hauteurs montre qu'aux deux phases extrêmes de l'éclipse, la lune était à des distances angulaires presque égales du méridien supérieur. Dans l'un et l'autre cas, son disque tout entier se trouvait entre le méridien et la surface externe du cône d'ombre projeté par la terre. Ainsi, l'axe du cône était un peu plus distant de ce plan que ne l'était le centre du disque. Négligeons cette différence pour un calcul approximatif, et appliquons les hauteurs observées à l'axe même du cône. En les transportant au-dessous de l'horizon, dans un azimut diamétralement opposé, elles nous donneront l'abaissement actuel du centre du soleil, dont les distances angulaires au zénith supérieur se trouveront ainsi être, 154° 30′ occidentale au commencement de l'éclipse, et 155° orientale à la fin. En appliquant à ces données la méthode d'évaluation approximative que j'ai expliquée dans la note de la page 322, on trouvera que les angles horaires correspondants du soleil, comptés du méridien inférieur, étaient respectivement $1^h\,38^m\,47^s$ à l'occident, et $1^h\,36^m\,43^s$ à l'orient. De sorte qu'en les faisant partir tous deux du midi antérieur, dans le sens du mouvement diurne, on a le commencement de l'éclipse à $10^h\,21^m\,13^s$, et la fin à

$13^h\ 36^m\ 43^s$. Bouvard (*Mémoires de l'Institut,* tome II, page 8) trouve pour ces mêmes phases, $10^h\ 23^m\ 25^s$, et $13^h\ 37^m\ 28^s$; ce qui met le commencement à $1^h\ 36^m\ 35^s$ avant minuit, et la fin à $1^h\ 37^m\ 28^s$ après minuit. J'adopterai ces nombres, comme ayant dû être probablement déduits d'un calcul plus exact, quoiqu'il ne dise point comment il les a obtenus.

Le 10 athyr désigné par Ebn-Jounis appartient à la Série *qui suit* la nuit du phénomène. Cette nuit appartient donc astronomiquement au 9 athyr, dont le midi sert d'origine aux heures calculées. Les dates égyptiennes des deux phases observées seront ainsi :

Année de Dioclétien 696, le 9 Athor :

Commencement de l'éclipse à $10^h\ 23^m\ 25^s$ } temps vrai, compté de midi
Fin..... $13^h\ 37^m\ 28^s$ } au Caire.

Le nombre 696 étant un multiple de 4, cette année-là commence au 30 août, ce qui nous ramène au tableau B de la page 313. Son commencement tombe dans l'année de la période julienne $4996 + 696$ ou 5692^c, qui est commune, et je la marque comme telle. Ce sera donc la valeur actuelle de P pour notre tableau B. Le 9 athyr s'y trouve compris; or, le tableau nous fournit cette concordance :

1^{er} Athyr, à midi vrai = 29 octobre, jour 302^e, à 12^h, temps compté de minuit.

Ajoutez des deux parts $8^j + h$, h désignant l'heure de la phase que vous voudrez considérer. Le premier membre reproduira la date égyptienne; le second membre vous donnera la date julienne équivalente, qui, complétée par l'indication de l'année P, sera :

Année 5692^e, 6 novembre, jour 310^e, à $12^h + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Et, en donnant successivement à h les valeurs propres aux deux phases extrêmes de l'éclipse, vous aurez pour leurs dates individuelles :

Commencement : année 5692^c, 6 novembre, jour 310^c, à $22^h\,23^m\,25^s$ } temps vrai, compté
Fin..... 7 novembre, jour 311^c, à $1^h\,37^m\,28^s$ } de minuit au Caire.

Les tables abrégées de M. Largeteau indiquent, dans cette même année et pour cette même date, une opposition écliptique. L'époque qu'elles lui assignent est

le 6 novembre, à $21^h\,38^m$, temps moyen à Paris, compté de minuit.
Ajoutez la longitude relative du Caire... $1^h\,55^m\,41^s$ orientale ;

vous aurez pour ce même phénomène,
le 6 novembre, à $23^h\,33^m\,41^s$, temps moyen, compté de minuit au Caire.

L'opposition ainsi calculée doit répondre, non pas rigoureusement, mais à peu de chose près, au milieu de l'éclipse. Or, les nombres rapportés tout à l'heure donnent pour ce milieu

le 7 novembre, $0^h\,0^m\,26^s,5$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Ces deux expressions ne sont pas fort éloignées l'une de l'autre. Pour apprécier exactement leur écart, il faudrait d'abord les ramener à une même espèce de temps, moyen ou vrai. Il faudrait ensuite réduire l'époque de chaque phase à l'opposition mathématique, par un calcul précis. Alors il ne resterait plus qu'à faire la part des erreurs que pouvaient comporter les mesures des hauteurs, d'où l'on déduit les époques observées des phases ; mesures qui sont seulement rapportées comme approximatives, sans indication du procédé employé pour les évaluer. Tout cela serait indispensable pour que ces observations pussent servir à corriger les tables de la lune.

ou seulement à éprouver leurs limites d'incertitude. Mais ce qui précède suffit pour constater que les dates originales ont été fidèlement traduites ; et c'est là l'unique but que je m'étais proposé.

80. Afin de pouvoir faire servir à cet usage les documents fournis par les auteurs arabes, il faut connaître les noms qu'ils ont donnés aux mois égyptiens. Car ils les ont tellement défigurés, qu'on ne saurait pas distinguer, même dans les traductions, ceux que ces nouvelles appellations désignent, si l'on n'était pas averti de leur signification conventionnelle. C'est pourquoi je les rapporte ici par ordre, en regard de leurs équivalents primitifs.

	NOMS ÉGYPTIENS.	NOMS ARABES.		NOMS ÉGYPTIENS.	NOMS ARABES.
1	Thot.	Tut.	7	Phaménoth.	Barmehat.
2	Phaophi.	Babe.	8	Pharmouti.	Barmoude.
3	Athyr.	Hatur.	9	Pachôn.	Baschas.
4	Choiak.	Kaihac.	10	Paoni.	Bune.
5	Tybi.	Tube.	11	Épiphi.	Abib.
6	Méchir.	Amxir.	12	Mésori.	Meseri.

Nous allons maintenant nous occuper d'un autre système de numération d'années qui a encore été plus employé que les dioclétiennes par les astronomes du moyen âge.

CHAPITRE VI.

Années d'Alexandre d'Hilkarnain, ou des Séleucides, employées par les Syro-Macédoniens, les Juifs et les auteurs arabes.

ÈRE ASTRONOMIQUE : DE NABONASSAR, ANNÉE 436, JOUR 327^{e}, A MIDI VRAI AU MÉRIDIEN DU LIEU D'OBSERVATION.

DE LA PÉRIODE JULIENNE, ANNÉE 4402^{e}, LUNDI 1er OCTOBRE, JOUR 274^{e}, A 12^{h}, COMPTÉES DE MINUIT AU MÊME MÉRIDIEN.

CONCORDANCE INITIALE. Année 1ère, jour 1er, à minuit vrai = de la période julienne 4402^{e}, 1er octobre, jour 274^{e}, à 0^{h} de temps vrai, compté de minuit au même méridien.

Nota. Le jour civil syro-macédonien commence au coucher du soleil.

81. Ces années, *telles qu'on les trouve employées par les astronomes orientaux du moyen âge,* forment une série exactement identique avec la julienne, sauf qu'elles commencent toutes au 1er octobre, et non pas au 1er janvier. Les mois y concordent aussi en tous points avec les juliens, sous des dénominations différentes, comme le montre le tableau suivant :

NOMS ARABES DES MOIS SYRIENS, placés dans leur ordre de succession.	DÉSIGNATION du JOUR JULIEN où chacun d'eux commence.	Toutes les concordances sont établies, comme l'initiale, entre le minuit vrai du jour arabe désigné, et le minuit vrai où commence le jour julien placé en regard.
Teschrin I.	1er octobre.	Année de la période julienne P.
Teschrin II.	1er novembre.	
Kanoun I.	1er décembre.	
Kanoun II.	1er janvier.	
Schebat.	1er février.	
Adar.	1er mars.	
Nisan.	1er avril.	
Ayar.	1er mai.	Année de la période julienne P + 1.
Haziran.	1er juin.	
Tamouz.	1er juillet.	
Ab.	1er août.	
Eiloul.	1er septembre.	

La bissextile s'insère aux mêmes époques absolues, et au même jour physique dans les deux séries; dans la syrienne, à la fin du mois schebat, comme dans la julienne à la fin de février.

82. Avant de passer aux applications de ce système mixte, je dois spécifier quelques particularités conventionnelles attachées à son usage. Les Juifs, les Grecs, les Arabes, qui mesuraient les mois par les révolutions synodiques de la lune et les commençaient à son renouvellement, plaçaient l'origine de leurs jours civils au coucher du soleil. Ces deux usages ont une liaison fort naturelle; et les Chinois offrent, je crois, le seul exemple d'un peuple qui, ayant adopté le premier, n'ait pas

admis le second. Les circonstances que je rapporterai plus loin, sur l'introduction de l'année macédonienne en Asie, après les conquêtes d'Alexandre le Grand, rendent présumable que l'année des Syriens fut alors lunaire; et la coutume de commencer le jour au coucher du soleil paraît s'être conservée chez eux, quand ils lui eurent substitué l'année julienne, sous la domination des Romains. Car on va voir qu'Ebn-Jounis, le plus précis des astronomes orientaux, s'est conformé à cette règle dans les énoncés des dates syriennes qu'il attache à ses observations. C'est ce qui m'a déterminé à établir ici la concordance initiale de ces dates avec les juliennes, pour l'instant du minuit vrai, et non du midi des jours syriens désignés. Car alors, quand une observation aura été faite *après* le minuit du jour civil que l'auteur mentionne, il faudra conserver à ce jour son nom, ainsi que son quantième, et y ajouter le nombre d'heures ultérieurement écoulées depuis son minuit jusqu'à l'instant de l'observation. Mais quand celle-ci aura été faite entre le coucher du soleil et le minuit suivant, il faudra, pour avoir sa date astronomique, la rapporter de la même manière au minuit du jour qui a précédé celui que l'auteur nomme. Ceci constitue une règle analogue à celle que nous avons établie, d'après Ptolémée, pour les jours civils égyptiens commençant au lever du soleil, et les jours astronomiques qu'il fait commencer à midi. Seulement, l'application en est opposée, comme l'origine. On va voir que les dates syriennes d'Ebn-Jounis se traduisent ainsi très-exactement dans tous les cas.

83. Quant à la fixation de l'ère astronomique d'Alexandre d'Hilkarnain, dont ces supputations dérivent, je l'ai tirée des concordances numériquement exprimées par Albategni et

Ebn-Jounis. D'après leur commune assertion, elle est postérieure de 4341 jours, ou 11 ans vagues plus 326 jours, à l'époque du Philippe Aridée de Ptolémée. Or, dans le canon des rois que j'ai rapporté page 278, celle-ci a pour date :

Année de Nabonassar 425^{e}, 1er Thot, à midi vrai.

Ajoutez, suivant la prescription précédente : 11^{ans}, 326^{j}.

Vous aurez :

Ère d'Alexandre d'Hilkarnain : année de Nabonassar 436, jour 327^{e}, à midi vrai.

Maintenant, notre tableau de la page 279 donne :

Année de Nabonassar 436, 1er Thot, à midi vrai = 4401^{B}, 9 novembre, jour 314^{e}, à 12^{h}.

Ajoutez des deux parts : jours complets..... 326 326

Vous aurez :

Année de Nabonassar 436, jour 327^{e}, à midi vrai = 4402, 1er octobre, jour 274^{e}, à 12^{h}.

Maintenant, pour appliquer cette concordance à notre but, il faut remplacer les éléments égyptiens du premier membre par leurs équivalents syriens. Le jour civil égyptien ici désigné, commence au lever du soleil. Le jour civil syrien, qui a le même midi, a dû commencer au coucher précédent de cet astre. Puisqu'il est le 1er des années d'Hilkarnain, on peut le substituer à l'égyptien avec ce caractère initial, en lui attribuant son origine propre. La concordance ne sera point troublée par cette substitution, puisqu'elle est établie pour l'instant de midi qui leur est commun. On aura alors, dans ce nouvel énoncé :

Année d'Hilkarnain 1ère, jour 1er, à midi vrai = 4402^{e}, 1er octobre, jour 274^{e}, à 12^{h};

ou, en retranchant 12^{h} de chaque membre,

Année d'Hilkarnain 1ère, jour 1er, à minuit vrai = 4402^{e}, 1er octobre, jour 274^{e}, à 0^{h}.

C'est la forme que j'ai adoptée en tête de ce chapitre, comme étant la plus commode pour les calculs, dans la condition d'origine donnée au jour civil syrien. J'indiquerai plus loin, d'après l'histoire, quel est le personnage auquel cette ère s'applique.

84. Les conventions précédentes étant admises, soit n le rang ordinal d'une année d'Hilkarnain quelconque. Nommons P l'année de la période julienne dans laquelle elle commence: on aura toujours

$$P = 4401 + n.$$

Cette $n^{ième}$ année commencera au 1er octobre de l'année P ainsi trouvée. Ses trois premiers mois concorderont, jour pour jour, avec les trois derniers de l'année P, et les neuf suivants avec les neuf premiers de l'année P + 1.

85. D'après cela, rien n'est plus facile que de convertir en date julienne une date exprimée en années d'Hilkarnain. Car d'abord, par la première règle, on trouve l'année P où elle commence. Puis, on prend la date julienne du jour dans le tableau précédent, les concordances étant établies des deux parts pour l'heure de minuit des jours désignés.

86. Je prends d'abord, comme exemple, l'éclipse de soleil de l'année julienne 5717, dont nous avons fixé le jour et l'heure, d'après sa date dioclétienne, dans la page 324. Ebn-Jounis a exprimé aussi la date de cette même observation en années d'Hilkarnain; et, en appliquant à ce second énoncé le même angle horaire que le calcul nous a donné pour le premier, la date du commencement de l'éclipse est, selon l'observation :

Année d'Hilkarnain 1315, 24^{e} jour de Kanoun II, à 3^{h} 40^{m} 20^{s} de temps vrai, après midi, au Caire.

Le commencement de cette année 1315 tombe dans l'année de la période julienne 4401 + 1315 ou 5716. C'est la valeur de P pour notre tableau. Mais le mois Kanoun II coïncide entièrement avec le mois de janvier de l'année suivante P + 1, qui sera ainsi 5717. L'observation est faite $15^h\,40^m\,20^s$ après le minuit du 24 canoun civil, commençant au coucher du soleil. Alors, notre tableau de concordance étant établi pour cette même époque de minuit, la date julienne sera :

Année 5717, 24 janvier, $15^h\,40^m\,20^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est précisément ce que nous avait donné la date dioclétienne à la page citée, et les tables astronomiques ont confirmé cette interprétation.

87. L'éclipse de l'année 5706, que nous avons calculée page 326, va nous offrir le même accord. En appliquant à son commencement le même angle horaire que nous avons obtenu dans la page 325, la date du commencement de l'éclipse, exprimée par Ebn-Jounis comme concordante à la dioclétienne, est :

Année d'Hilkarnain 1304, 20e jour de Ab, $4^h\,18^m\,18^s$ avant midi.

Le commencement de cette année 1304 tombe dans l'année de la période julienne 4401 + 1304 ou 5705; c'est la valeur de P dans notre tableau. Mais le mois Ab coïncide entièrement avec le mois d'août de l'année P + 1, qui sera ainsi 5706. L'observation étant antérieure de $4^h\,18^m\,18^s$ au midi du 20 Ab, qui commence au coucher du soleil, elle sera postérieure à son minuit de $7^h\,41^m\,42^s$. Alors notre tableau de concordance étant établi pour cette même époque de

minuit, la date julienne de l'observation sera :

Année 5706, 20 août, $7^h\,41^m\,42^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est exactement ce que nous avait donné la date dioclétienne, page 326, et ce que les tables astronomiques ont confirmé.

88. Une autre éclipse de soleil, mentionnée aussi par Ebn-Jounis, est datée de la manière suivante :

Année d'Hilkarnain 1289, le 8 Haziran. Commencement estimé à $2^h\,28^m\,19^s$ après le midi de ce jour.

Le commencement de cette année 1289 tombe dans l'année de la période julienne 4401 + 1289 ou 5690; c'est la valeur de P dans notre tableau. Mais le mois Haziran tombe dans P + 1, qui sera ici 5691. Le minuit de son 8^e jour civil, qui commence au coucher du soleil, coïncide avec le 8 juin julien, 0^h. L'observation étant postérieure à ce minuit, la date julienne sera :

Année 5691, 8 juin, à $14^h\,28^m\,19^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est encore exactement ce que nous avons conclu, page 328, de la date dioclétienne assignée à cette même éclipse par Ebn-Jounis.

89. Voici un exemple où l'heure de l'observation exige que l'on diminue d'une unité le quantième du jour civil énoncé par l'auteur arabe, pour obtenir la date astronomique du phénomène. Il s'agit d'une éclipse de lune observée aussi au Caire par Ebn-Jounis, et dont il donne la date suivante :

Année d'Hilkarnain 1290, 15^e jour du mois Ayar, à l'entrée de la nuit.

La lune se leva éclipsée; et la fin de l'éclipse eut lieu

à $1^h\ 12^m$ équinoxiales de la nuit. (*Notices des Manuscrits*, tome VII, page 184.) D'après l'heure à laquelle le soleil se couchait au Caire à l'époque de l'année que cette date indique, l'observation fut faite à $3^h\ 57^m\ 24^s$, avant le minuit du jour civil ici désigné.

Cette année 1290 commence dans l'année de la période julienne 4401 + 1290 ou 5691. Ceci est la valeur de P dans notre tableau. Le 15 ayar y concourt par sa dénomination avec le 15 mai de l'année P + 1, qui sera ici 5692. Mais l'auteur arabe le mentionne dans l'acception de jour civil, commençant au coucher du soleil. Pour le calcul astronomique, il faut considérer l'observation comme postérieure au minuit du 14 ayar de $24^h - 3^h\ 57^m\ 24^s$, ou $20^h\ 2^m\ 36^s$. Alors notre tableau de concordance, établi aussi pour minuit, donnera immédiatement la date julienne, qui sera :

Année 5692^e, 14 mai, à $20^h\ 2^m\ 36^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est identiquement la même que nous avons conclue, dans la page 331 de la date dioclétienne qu'Ebn-Jounis a jointe à celle-ci; et nous avons reconnu qu'elle s'accorde avec nos tables.

90. Je rapporterai enfin l'exemple suivant, qui réunit les deux cas d'application de la règle générale. Il s'agit encore d'une éclipse de lune observée par Ebn-Jounis au Caire, en l'année d'Hilkarnain 1291, le 7 du mois Teshrin II. D'après les hauteurs de lune, mesurées aux deux phases extrêmes de l'éclipse, Bouvard a calculé que le commencement eut lieu $1^h\ 36^m\ 35^s$ avant le minuit du jour civil désigné, et la fin $1^h\ 37^m\ 28^s$ après ce même minuit.

L'année d'Hilkarnain 1291 commence dans l'année de la

période julienne 4401 + 1291 ou 5692^{c}. Le mois Teshrin II s'y trouve compris, et le 7 de ce mois y concourt par sa dénomination avec le 7 novembre. Dans le calcul astronomique, ce quantième doit être employé sans changement pour la fin de l'éclipse, qui est postérieure au minuit du jour civil arabe que l'auteur mentionne. Mais le commencement, qui est antérieur à ce même minuit, doit être rapporté au quantième précédent, 6 Teshrin II ou 6 novembre, à $24^{h} - 1^{h}\,36^{m}\,35^{s}$ ou $22^{h}\,23^{m}\,25^{s}$, compté de son minuit. Alors notre tableau, où les concordances sont également établies pour minuit, donnera ces deux dates juliennes :

Commencement : année 5692^{c},	6 novembre, à $22^{h}\,23^{m}\,25^{s}$	temps vrai, compté
Fin.	7 novembre, à $1^{h}\,37^{m}\,28^{s}$	de minuit au Caire.

Ce sont encore identiquement les mêmes que nous avons conclues, dans la page 334 des dates dioclétiennes qu'Ebn-Jounis avait jointes aux précédentes; et nous avons reconnu aussi qu'elles s'accordent avec nos tables.

91. Ces exemples suffiront pour que l'on puisse convertir sûrement et immédiatement, en dates juliennes, toutes les dates arabes énoncées en années d'Hilkarnain, ou des Séleucides, lorsque le quantième du jour courant y aura été marqué avec exactitude, conformément à l'usage civil qui le fait commencer au coucher du soleil. Mais je dois prévenir d'une particularité relative à l'origine de ces années, qui se rencontre dans beaucoup de textes historiques et astronomiques. C'est qu'elle y est placée au 1er septembre julien, et non pas au 1er octobre, un mois plus tôt que nous ne l'avons trouvée dans Ebn-Jounis. Alors, dans notre tableau de la page 337, le mois Eiloul, qui concorde avec sep-

tembre, doit être reporté en tête de tous les autres, et non pas à la fin; de sorte qu'il se trouve compris dans l'année julienne P donnée par notre règle, et non plus dans l'année P + 1. A cela près, toutes les conversions en dates juliennes s'effectueront comme précédemment.

92. L'un des plus anciens et des plus habiles astronomes arabes, Albatégni, date les années d'Hilkarnain de cette seconde manière, comme il en prévient au chapitre XXXII de son *Traité sur la science des étoiles*, page 107 de la traduction latine, édition de Bologne. Il résidait en Syrie, dans la ville d'Aracta, dont la longitude à l'orient de Paris est $36^{\circ}\,29'\,45''$, ou, en temps, $2^{h}\,25^{m}\,59^{s}$. Si l'on retranche de là $1^{h}\,50^{m}\,10^{s}$, longitude d'Alexandrie à l'est de Paris, on trouve Aracta plus orientale qu'Alexandrie de $0^{h}\,35^{m}\,49^{s}$. Albatégni suppose $0^{h}\,40^{m}$ dans ses calculs; et l'erreur était petite pour son temps.

93. Comme application spéciale de ce choix d'origine, je rapporterai l'observation de l'équinoxe automnal qu'il dit avoir faite à Aracta, dans l'année d'Hilkarnain 1194, le 19^{e} jour du mois Eiloul (1er de l'année), à $4^{h}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ ou $4^{h}\,45^{m}$ (de temps vrai), avant le lever du soleil. (Chapitre XXVII, page 67.) Ce lever ayant lieu à 6 heures vraies après minuit, au temps de l'équinoxe, la date syrienne énoncée astronomiquement sera :

Année d'Hilkarnain 1194, 19 Eiloul (1er de l'année), à $1^{h}\,15^{m}$, comptées de minuit à Aracta.

Ici, comme précédemment, cette année 1194 commence dans l'année de la période julienne 4401 + 1194 ou 5595, qui est appelée P dans notre tableau de la page 337. Mais,

pour l'adapter au système d'Albatégni, nous devrons y comprendre, en première ligne, le mois Eiloul, qui concorde avec septembre. La date julienne de l'observation sera ainsi :

Année 5595ᶜ, 19 septembre, jour 262ᵉ, $1^h\,15^m$, temps vrai d'Aracta, compté de minuit.

L'exactitude astronomique de cette détermination est fort remarquable. En effet, si l'on retranche, du temps absolu indiqué, $2^h\,25^m\,59^s$, la date rapportée au méridien de Paris deviendra : le 18 septembre $22^h\,49^m\,1^s$, compté aussi de minuit. Or les tables abrégées de M. Largeteau, établies aussi pour Paris, et pour le même mode de numération des jours, placent l'équinoxe automnal de l'année 5595 au 18 septembre $22^h\,39^m\,36^s$ de temps moyen; de sorte que la différence des deux indications tombe dans les limites d'incertitude que comporte la comparaison ainsi établie. Pour en avoir l'appréciation exacte, il faut calculer la date du même équinoxe, en temps vrai, par les tables rigoureuses. Or celles de Delambre, corrigées par Bessel, la fixent ainsi au 18 septembre $22^h\,49^m\,8^s$, comme M. Largeteau s'en est assuré par un calcul spécial. Ainsi la détermination d'Albatégni se trouve exactement identique avec l'indication de ces tables, ce qu'il aurait été sans doute impossible de prévoir ou d'espérer.

94. Quoiqu'un accord si proche semble déjà montrer évidemment que la date arabe a été fidèlement traduite, et interprétée comme l'entendait l'auteur, je donnerai de ce fait une preuve plus forte, dont les conséquences ne seront pas sans intérêt. Je la tire d'un calcul fait par Albatégni

lui-même, dont le résultat a eu beaucoup de célébrité. Il avait observé cet équinoxe automnal pour le comparer à celui que Ptolémée rapporte au chapitre II du livre III de l'Almageste, et que nous avons discuté page 298. Son but était d'obtenir par cette comparaison une évaluation de l'année solaire plus exacte, ou du moins plus sûre, que celle d'Hipparque. Pour le suivre dans cette épreuve, il faut d'abord retrancher, comme lui, $0^h\,40^m$ de l'instant de son observation, exprimé en temps d'Aracta, afin de l'obtenir exprimé en temps d'Alexandrie. Appliquant donc cette soustraction à la date julienne que nous avions trouvée pour Aracta, § 93, elle deviendra :

Année de la période julienne 5595, 19 septembre, jour 262^e, $0^h\,35^m$, temps vrai d'Alexandrie, compté de minuit.

Il faut maintenant convertir celle-ci en date égyptienne vague, d'après notre table de concordance de la page 280. C'est une application de la méthode que j'ai exposée § 57, page 301. L'année julienne 5595 sort des limites de notre table. Mais on l'y ramène, sans changer la date de jour du Thot vague, en la faisant rétrograder de 1460 années pareilles, ce qui la remonte à 4135. Le 1^{er} jour de Thot de l'année vague 169 coïncidait alors avec le 15 janvier julien; et il a dû revenir à cette même date de jour, dans l'année vague $1461 + 169$ ou 1630, qui est pareillement plus rapprochée de nous d'un intervalle égal à 1460 années juliennes. On obtient donc ainsi cette concordance, dont les deux termes s'appliquent au méridien d'Alexandrie :

Année de Nabonassar 1630, 1er Thot, à midi vrai ou 0^h = Année de la période julienne 5595, 15 janvier, jour 15^e, 12^h, temps vrai d'Alexandrie, compté de minuit.

Or, dans une même année julienne, du jour 15^e 12 heures, au jour 262^e 0^h 35^m, l'intervalle est 246^j 12^h 35^m. Ajoutant donc cet intervalle aux deux membres de l'égalité précédente, on en déduira celle-ci, dont les deux termes sont également applicables au méridien d'Alexandrie :

De Nabonassar 1630, jour 247^e, 7 Pâchon, à 12^h 35^m, comptées de midi = de la période julienne 5595, jour 262^e, 19 septembre, à 0^h 35^m, comptées de minuit.

La date julienne de l'équinoxe d'Albatégni se trouve ainsi transformée en date égyptienne vague comptée de Nabonassar, conformément au système de numération des jours et des heures employé par Ptolémée, sans que nous ayons eu autre chose à faire que de lui appliquer correctement les principes généraux de concordance établis plus haut.

Il ne nous reste plus qu'à comparer immédiatement cette date vague à celle de l'équinoxe automnal de Ptolémée, que nous avons rapportée dans la page 298. Nous aurons ainsi pour les deux époques du phénomène, en temps vrai d'Alexandrie compté midi :

Par l'observation de Ptolémée : année	887^e, jour 68^e, 19^h.
Par l'observation d'Albatégni : année	1630^e, jour 247^e, 12^h 35^m.
Intervalle.....	$743\,C + 178^j$, 17^h 35^m.

Je désigne par C l'année vague de 365 jours. Les 17^h 35^m équivalent à $18^h - 25^m$. Pour faciliter son calcul, Albatégni

remplace ces 25^m par $\frac{2}{5}$ d'heure, qui ne font réellement que 24^m. Mais, en négligeant une si petite différence, dont il ne pouvait pas répondre, il y trouvait l'avantage que ces $\frac{2}{5}$ d'heure font précisément $\frac{1}{60}$ de jour. Le suivant donc en ce point, je remplace de plus C par $J - \frac{1}{4}$, J désignant l'année julienne moyenne, de $365^j\frac{1}{4}$. Notre intervalle, ainsi exprimé, devient alors :

$$743\,J - 7^j - \frac{1^j}{60}.$$

C'est précisément le résultat auquel il arrive. Les deux observations s'appliquant à un même équinoxe, il s'est écoulé entre elles 743 années solaires complètes. Alors, pour savoir de combien chacune de ces années est plus courte que J, ou $365^j\frac{1}{4}$, il faut diviser $7^j + \frac{1}{60}$, ou $\frac{421^j}{60}$, par 743. C'est ce qu'il fait, en exprimant le quotient par des subdivisions sexagésimales du jour, qu'il appelle minutes et secondes, comme Ptolémée. Or, dans ce système, $\frac{1}{4}$ de jour ou $\frac{15}{60}$ vaut 15′ ; et $\frac{421}{60}$ de jour valent 421^m ou 25260^s, qu'il faut diviser par 743. Effectuant donc ce dernier calcul, la durée de l'année solaire ainsi exprimée est, sauf l'omission d'une fraction de jour presque imperceptible :

$$365^j + 15' - 0^j\,0'\,34'' \qquad \text{ou} \qquad 365^j\,14'\,26''.$$

C'est identiquement ce que trouve Albatégni, et il indique même que la division laisse un petit reste. Si je l'ai suivi avec tant de détail dans son calcul numérique, c'est pour constater indubitablement, par l'identité de ses nombres avec les nôtres, que nos concordances juliennes de jours et d'heures reproduisent avec une fidélité mathématique les dates qu'il avait entendu établir. Du reste, les subdivisions

sexagésimales de son énoncé étant converties en fractions ordinaires, donnent la durée de l'année égale à $365^j + \frac{14^j}{60} + \frac{24}{3600}$; ou, en somme, $365^j,24$. Cette évaluation est moins imparfaite que celle de Ptolémée, mais un peu trop faible, comme nous le verrons dans un moment.

95. Albatégni ne savait pas que l'équinoxe de Ptolémée était en erreur d'un jour entier. Il aurait obtenu un résultat beaucoup meilleur, s'il s'était appuyé sur l'équinoxe automnal d'Hipparque, dont j'ai rappelé la date vague dans la page 294. La comparaison en années de Nabonassar se serait faite alors de la manière suivante :

Équinoxe automnal d'Hipparque : année 601, jour 363e, 12^h		temps vrai d'Alexandrie,
d'Albatégni : année 1630, jour 247e, $12^h,35^m$		compté de midi.
Intervalle.....	$1028\,C + 249^j + 0^h,35^m$	

35^m valent $\frac{7}{12}$ d'heure ou $\frac{7}{288}$ de jour. En adoptant cette transformation, et remplaçant C par $J - \frac{1}{4}$, on obtient pour expression réduite :

$$1028\,J - 8^j + \frac{7^j}{288}.$$

Les deux observations comprennent 1028 années solaires complètes. Donc, en divisant leur intervalle par 1028, on aura la durée moyenne d'une de ces années. L'opération ainsi effectuée donne, après avoir remplacé J par sa valeur $365^j,25$:

$$365^j,25 - 0^j,0077821 + 0^j,0000236435 = 365^j,2422415435.$$

96. Pour apprécier le degré d'exactitude de ce résultat, il faut le comparer à la mesure de la durée de l'année tropique, qui est assignée pour la même époque par la théorie et les

observations modernes. C'est ce que je vais faire; et la manière dont nous allons y procéder servira dans tous les cas pareils. Cela me fournira l'occasion de présenter, sous une forme complétement rigoureuse, les principes de cette évaluation, que j'avais pu seulement indiquer par des aperçus approximatifs, aux pages 44, 104 et 127 du tome IV de mon *Traité d'astronomie*, 3e édition. Les applications qui lui donnent de l'intérêt nécessitaient, comme on vient de le voir, des détails historiques que le cadre de cet ouvrage n'admettait pas.

97. L'année tropique moyenne, exactement définie, est, pour chaque époque, l'intervalle de temps moyen, compris entre deux retours consécutifs du soleil moyen au point équinoxial mobile, dégagé des oscillations périodiques que la nutation lui imprime. Conformément aux conditions que cet énoncé exprime, on la calcule de la manière suivante :

Soit R la durée de la révolution sidérale du soleil moyen, qui est constante; T, la durée de sa révolution tropique, qui est variable, à cause des inégalités séculaires de la précession. Nommons $\delta\psi'$ l'arc de rétrogradation décrit, pendant le temps T, sur l'écliptique mobile, à l'époque absolue pour laquelle T est évalué. Pendant le temps R, le soleil moyen décrit, sur la sphère stellaire, une circonférence entière que je désigne par c. Mais on peut, sans erreur appréciable, la considérer comme décrite sur l'écliptique mobile, à cause de l'excessive lenteur avec laquelle ce plan se déplace. Dans le temps T, ce même soleil décrit seulement, sur l'écliptique mobile, l'arc $c - \delta\psi'$. Ces mouvements étant uniformes, par définition les arcs parcourus sont proportionnels aux temps

écoulés; c'est-à-dire qu'on a généralement:

$$\frac{T}{R} = \frac{c - \delta\psi'}{c} = 1 - \frac{\delta\psi'}{c}.$$

A toutes les époques auxquelles nos calculs s'étendent, T diffère extrêmement peu de $365^j \frac{1}{4}$. L'arc $\delta\psi'$ étant d'ailleurs très-petit, on peut, dans toute la limite d'appréciation que nos observations comportent, le calculer, pour chaque époque considérée, comme si T était égal à $365^j \frac{1}{4}$; et la légitimité de cette concession deviendra, dans un moment, évidente par les résultats mêmes. Désignons par $+t$ le nombre d'années pareilles, écoulées depuis le 1^er^ janvier 1800, jusqu'à l'époque analytiquement ultérieure pour laquelle on veut calculer T. A la page 337 du tome IV de l'ouvrage cité, j'ai établi l'expression absolue de l'arc de rétrogradation décrit par le point équinoxial sur l'écliptique mobile, pour tout intervalle de temps t ainsi défini; et cet arc y est désigné par ψ' dans les formules. $\delta\psi'$ sera la différence de ses valeurs pour deux 1^ers^ janviers consécutifs appartenant aux années t et $t+1$, comptées de 1800. Cherchant donc l'expression numérique de cette différence, on trouvera :

$$\delta\psi' = +\,50'',260527 + 0'',00022582\,t.$$

Quand on aura déterminé la valeur de $\delta\psi'$ pour l'époque que l'on veut considérer, on obtiendra immédiatement T par R, ou R par T, au moyen des expressions suivantes, qui se déduisent de leur relation générale :

$$T = R - R\left(\frac{\delta\psi'}{c}\right); \qquad R = T + T\left(\frac{\delta\psi'}{c}\right) + T^2\left(\frac{\delta\psi'}{c}\right)^2 \ldots \text{etc.}$$

Ce sont les mêmes que j'avais formées à la page 104 du tome IV de l'ouvrage cité. Mais la marche progressive d'exposition

que je suivais alors ne se trouvait pas encore assez avancée, pour que je pusse définir les éléments de ces formules avec la précision de détails que je viens d'y apporter.

98. Dans l'application particulière que nous avons ici en vue, t devra correspondre à l'époque moyenne entre les deux observations d'où nous avons déduit T. Or, nous avons trouvé, en dates juliennes comptées de minuit, pour Alexandrie :

L'équinoxe automnal d'Hipparque, année 4567, jour 270^{e}, 0^{h}.
Celui d'Albatégni..... année 5595, jour 262^{e}, 0^{h}35^{m}.

Demi-somme ou époque moyenne.. année 5081, jour 266^{e}.

Cette moyenne peut se prendre immédiatement, comme je l'ai fait, entre les deux dates d'années, parce qu'elles comprennent un nombre entier de périodes quatriennales. Au reste, on aurait pu, sans aucun inconvénient sensible, opérer de même dans tout autre cas, puisque la variation de l'année solaire est si lente, qu'on ne saurait l'apprécier pratiquement pour la différence d'un jour qui pourrait au plus résulter des accidents de l'intercalation, si l'on supposait les années terminales de même forme, sans qu'elles le fussent. Maintenant, l'année 1800 de notre ère, d'où t se compte, est, dans la période julienne, 4713 + 1800 ou 6513; et la distance de notre époque moyenne, à son 1er jour de janvier commençant, est $1432\,\mathrm{J} - 265^{j}$, ou $1432 - 0{,}72553$, et enfin 1431, 27447, en prenant l'année julienne J pour unité. Cette distance étant antérieure au 1er janvier 1800, on devra l'employer comme négative dans l'expression symbolique de $\delta\psi'$; et il en résultera :

$$t = -1431{,}27447.$$

La multiplication s'effectuera directement pour la partie entière de t, et par logarithmes pour la partie fractionnaire.

On trouvera ainsi, pour l'époque à laquelle t s'applique :

$$\delta\psi = +50'',260527 - 0'',323210 = +49'',937317.$$

Cette valeur de $\delta\psi'$ est moindre que de notre temps ; et c'est là ce qui rend l'année tropique des époques anciennes plus longue que celle d'aujourd'hui.

Puisque nous opérons sur des valeurs sexagésimales, c vaut 360°. Pour former le rapport $\frac{\delta\psi'}{c}$, je convertis $\delta\psi'$ en unités de même nature que c, en le divisant deux fois de suite par 60. J'obtiens ainsi :

$$\frac{\delta\psi'}{c} = +\frac{0,01387148}{360};$$

et les deux termes de ce rapport devront être maintenant considérés comme des nombres abstraits. Pour former le produit $R\frac{\delta\psi'}{c}$, il faut connaître la révolution sidérale du soleil moyen, que R désigne. On la déduit de la durée actuelle de l'année tropique moyenne, combinée avec la valeur actuelle de $\delta\psi'$. Sa valeur en jours moyens, déterminée par les observations les plus exactes, est :

$$R = 365^j,2563835 = 360^j + 5^j\tfrac{1}{4} + 0^j,0063835,$$

ce qui donne :

$$\frac{R}{360} = 1^j + \frac{7^j}{480} + \frac{0^j,0063835}{360}.$$

Le second membre étant ainsi décomposé, sa multiplication par le numérateur de $\delta\psi'$ devient très-facile ; car le premier terme du produit se forme immédiatement, et les deux autres peuvent se calculer par les tables de logarithmes usuelles, sans erreur d'une unité sur la 8^e décimale de jour. On trouve ainsi, en s'arrêtant à cette limite d'évaluation :

$$\frac{R\delta\Psi'}{c} = 0^{j},01387148 + 0^{j},00020229 + 0^{j},00000025 = 0^{j},01407402;$$

et ce produit étant retranché de R.....		$365^{j},2563835$
le reste donne.....	$T =$	$365^{j},2423095$
Par les observations d'Hipparque et d'Albatégni, nous avons trouvé, pour la même époque.....	$T =$	$365^{j},2422415$
Excès de l'évaluation théorique.....		$0^{j},0000680$

Cette fraction de jour équivaut à $5^{s},8152$ sexagésimales. Un si petit écart, pour une détermination si lointaine, a de quoi étonner. Il faut remarquer toutefois que les deux équinoxes observés ne se sont pas réalisés, comme notre calcul le suppose, pour le soleil moyen dont le mouvement idéal est uniforme, mais pour le soleil vrai dont le mouvement est inégal. De sorte que la durée de l'année, qu'on en conclut immédiatement, ne peut être identifiée avec l'année tropique moyenne qu'en supposant que les inégalités du soleil vrai ont eu des valeurs égales dans les deux phases extrêmes, ou en admettant, ce qui est beaucoup plus acceptable, que la résultante de leurs effets a pu devenir insensible, étant divisée par l'intervalle qui les séparait. Il resterait donc à effectuer ici ces dernières corrections, pour apprécier rigoureusement l'exactitude de la détermination précédente. Mais cela m'éloignerait du but de restitution purement chronologique des données anciennes, que je me suis proposé dans le présent travail.

99. Pour achever de constater l'exactitude des principes de concordance que nous avons établis, relatifs aux années et à l'ère des Séleucides, je rapporte ici les dates de quatre éclipses ainsi exprimées par Albatégni, et que j'ai transformées en dates juliennes. Si l'on en calcule la réalité d'après

ces dates, au moyen des tables abrégées de M. Largeteau, on verra qu'elles s'y accordent très-fidèlement. J'ai appliqué à leur transcription les rectifications que Halley avait déjà reconnu nécessaire de faire à la seule traduction latine que l'on ait de cet auteur.

NATURE DE L'ÉCLIPSE.	DATE ARABE DU MILIEU DE L'ÉCLIPSE, EN TEMPS VRAI D'ARACTA ET EN ANNÉES D'HILKARNAIN.		DATE JULIENNE, EN TEMPS VRAI D'ARACTA, compté de minuit.
☽	Année 1194, 23 Tamouz,	8^h équin. +, après le midi de ce jour.	5596, 23 juillet, à 20^h.
☽	Année 1212, 2 Ab,	$15^h \frac{1}{3} \frac{1}{4}$, après le midi de ce jour.	5614, 3 août, à $3^h\ 35^m$.
☉	Année 1202, 8 Ab,	0^h, midi +	5604, 8 août, à 12^h +
☉	Année 1212, 23 Kanoun II, à $3^h \frac{1}{4}$ équin., avant le midi de ce jour.		5614, 23 janvier, à $8^h\ 40^m$.

100. Après les détails qui précèdent, on n'aura aucune difficulté pour transporter dans la période julienne les dates exprimées en années d'Alexandre d'Hilkarnain. Mais, avant de passer à un autre sujet, il me reste à donner quelques renseignements sur les circonstances historiques, par suite desquelles l'usage de ces années s'est introduit, avec les particularités de forme et d'origine que nous y voyons attachées.

L'année de la période julienne 4402, d'où part ce système d'énumération des temps, correspond à l'année de l'ère chrétienne — 312, date chronologique. Cette époque est fort antérieure à l'institution du calendrier julien; et, conséquemment, l'ère attribuée par les astronomes d'Orient aux années de leur Alexandre d'Hilkarnain, n'a pu être rattachée à ce calendrier que par une computation rétrograde. Nous avons

vu qu'ils la font postérieure de 11 ans vagues, plus 326 jours, à l'époque où Ptolémée place le commencement légal de Philippe Aridée, et de laquelle part la série d'années vagues qu'il appelle aussi années d'Alexandre. Les astronomes orientaux distinguent essentiellement celui-ci, et son ère égyptienne, par la dénomination d'Alexandre le *Macédonien*. Quant à leur Alexandre d'Hilkarnain, l'histoire nous apprend que ce nom s'applique à Séleucus I^er^, surnommé Nicator ou le Vainqueur, l'un des successeurs du héros grec. Ce Séleucus, après avoir possédé et perdu l'empire de Babylone, s'en empara de nouveau vers l'époque ici désignée, et se fit appeler depuis l'Alexandre *à deux cornes*, soit comme se prétendant issu de Jupiter Ammon, soit comme ayant soumis l'Orient et l'Occident, ces deux cornes de la terre. Sa réintégration devint la date d'une ère nouvelle, dont l'usage fut particulièrement adopté dans toute la Syrie. On la trouve employée dans la Bible, sous le nom d'ère des Grecs, aux deux livres des Machabées, qui contiennent le récit des guerres soutenues par les Juifs contre les descendants de Séleucus; et l'on a vu par ce qui précède qu'elle est restée usuelle chez les astronomes arabes. Mais, dans ces diverses applications, la forme d'années qu'on y rattachait n'a été ni constante, ni générale; et ce fut à une époque bien postérieure, mais incertaine, que les Syriens, soumis à la domination romaine, y adaptèrent définitivement la forme julienne, en n'y conservant de propre à leur nation que le point initial des années, placé par les uns au 1^er^ octobre julien, par les autres au 1^er^ septembre. Quoique cette dernière application qu'on en a faite soit la seule qui intéresse l'astronomie, les détails précédents m'ont paru

nécessaires, pour prévenir l'hésitation et le doute où l'on pourrait être en voyant la dénomination commune d'années d'Alexandre employée dans des acceptions si dissemblables par les astronomes arabes et par Ptolémée.

Je vais maintenant exposer un autre système d'énumération du temps, qui n'a pas été moins fréquemment usité chez les astronomes orientaux que celui que nous venons d'étudier.

CHAPITRE VII.

Années persiques de Iezdejerd.

ÈRE ASTRONOMIQUE : DE NABONASSAR, ANNÉE 1380, JOUR 91^{e}, A MIDI OU 0^{h} AU MÉRIDIEN DU LIEU D'OBSERVATION.

DE LA PÉRIODE JULIENNE, ANNÉE 5345^{p}, MARDI 16 JUIN, JOUR 168^{e}, A 12^{h}, COMPTÉ DE MINUIT SOUS LE MÊME MÉRIDIEN.

101. Ces années se composent de 12 mois, chacun de 30 jours, complétés par 5 jours supplémentaires. En cela elles ressemblent aux années égyptiennes de Nabonassar, et sont vagues comme elles. Voilà pourquoi je les y ai rattachées, la transformation des dates persiques en dates juliennes s'obtenant avec toute facilité d'après cette connexion. Néanmoins, elles diffèrent occasionnellement des égyptiennes, en ce que, parmi les astronomes orientaux qui en ont fait usage, les uns placent les jours supplémentaires entre le 8^{e} mois et le 9^{e}, tandis que les autres les placent à la suite du douzième mois. De là résultent deux modes de distribution des jours de l'année, qu'il est nécessaire d'avoir sous les yeux pour connaître le rang ordinal auquel il faut placer ceux que

chaque auteur désigne. En voici le tableau dans les deux systèmes.

ÉPAGOMÈNES INSÉRÉS APRÈS LE 8e MOIS.			ÉPAGOMÈNES PLACÉS A LA SUITE DU 12e MOIS.		
RANG ORDINAL des mois.	LEURS NOMS.	RANG ORDINAL du jour où chaque mois commence.	RANG ORDINAL des mois.	LEURS NOMS.	RANG ORDINAL du jour où chaque mois commence.
1	Ferwerdin.	1	1	Ferwerdin.	1
2	Ardbehescht.	31	2	Ardbehescht.	31
3	Chordah.	61	3	Chordah.	61
4	Tir.	91	4	Tir.	91
5	Mordah.	121	5	Mordad.	121
6	Schahrir.	151	6	Schahrir.	151
7	Mihr.	181	7	Mihr.	181
8	Abân.	211	8	Abân.	211
1er Épagomène.		241	9	Ader.	241
2e		242	10	Dei.	271
3e		243	11	Bahmen.	301
4e		244	12	Asfendarmed.	331
5e		245	1er Épagomène.		361
9	Ader.	246	2e		362
10	Dei.	276	3e		363
11	Bahmen.	306	4e		364
12	Asfendarmed.	336	5e		365

Généralement, chaque auteur indique celui des deux systèmes qu'il adopte. Mais on peut le découvrir indépendamment de cette indication, en calculant par nos tables astronomiques l'époque absolue d'une éclipse, ou même d'un équinoxe, placé dans les quatre derniers mois de l'année. Car, de pareilles déterminations ne pouvant pas être en erreur de cinq jours, la nécessité d'accorder la date que l'auteur assigne, avec la date céleste, fera aussitôt voir quel système d'énumération il a choisi.

102. La date julienne absolue que j'ai attribuée à l'ère est

conclue de sa distance à l'ère de Nabonassar, telle que je la rapporte plus bas, d'après les astronomes orientaux. Tous s'accordent pour en donner cet énoncé ; et nous constaterons bientôt, par les éclipses, qu'en effet ils l'ont toujours placée ainsi dans leurs calculs.

103. Suivant le témoignage unanime des auteurs orientaux, cette ère concorde avec l'avénement au trône de Perse du prince dont elle porte le nom. Il fut le dernier de la dynastie des Sassanides (descendants de Sassan) ; et, avec lui, l'indépendance de la Perse s'éteignit sous la conquête musulmane. L'usage de l'année vague était sans doute bien antérieur à ce prince. L'analogie de sa forme avec celle de l'ancienne année égyptienne, surtout la concordance de l'ère avec le commencement d'un mois égyptien, peuvent faire soupçonner une communauté d'origine, rendue plus vraisemblable encore par cette circonstance, que, chez les Perses, comme en Chaldée et dans l'ancienne Égypte, les trente jours du mois étaient individuellement désignés par des noms propres de divinités, sans aucun usage de la subdivision en semaines. L'année vague persique fut rendue fixe en l'an 1079 de notre ère, sous le règne du sultan Djellaledin, au moyen d'une intercalation très-habile qui est décrite au chapitre V de l'ouvrage d'Ulugbeig, traduit par Gravius sous le titre *Epochæ celebriores*. Quoique les premiers astronomes orientaux, dont les observations nous peuvent être les plus utiles, n'aient pas fait usage de cette année persane fixe, je donnerai plus loin quelques détails sur le mode d'intercalation singulièrement exact qu'on y avait adapté, pour la maintenir en concordance avec l'année solaire, cinq siècles avant la réforme appliquée en Occident, pour le même but, au calendrier julien.

104. Dans les dates vagues persiques, le jour civil est censé commencer au lever du soleil, et le jour astronomique au midi suivant. Cela est attesté par les auteurs orientaux; et l'application au ciel, de leurs énoncés, nous en fournira la preuve. En conséquence ils devront être interprétés astronomiquement, suivant les mêmes règles que nous avons établies, page 287, § 43, pour les énoncés de Ptolémée.

Toutefois, cette conformité à l'usage grec n'est complète que pour les observations faites pendant le jour. Les dates persiques des observations faites pendant la nuit sont données, par Eb-Jounis, avec la même modification que nous avons constatée dans ses dates dioclétiennes, où, contrairement à la coutume arabe, l'origine du jour civil est placée aussi au lever du soleil. Le jour persan qu'Ebn-Jounis désigne alors est celui qui, dans l'application physique, va succéder à la nuit pendant laquelle le phénomène observé est arrivé. Il faut donc, en de tels cas, l'interpréter encore suivant cette acception, et le remplacer dans le calcul par le quantième de jour immédiatement antérieur, qui, continué astronomiquement pendant 24^h, à partir de son midi propre, comprend la nuit de l'observation. Les dates persanes d'Ebn-Jounis, ainsi appliquées, se trouveront toujours concordantes avec ses autres énoncés, comme avec le ciel. Je n'oserais affirmer que tous les astronomes arabes se soient astreints à ces mêmes règles, ou les aient aussi fidèlement suivies. Mais, d'après ce qu'il rapporte de leurs énoncés, dans les extraits que nous avons de ses ouvrages, quand ils ont employé la forme persane pour des observations de nuit, ils y ont attaché des détails qui suffisent, dans chaque cas, pour en faire exactement l'application.

105. Ces principes généraux étant admis, soit n le rang ordinal d'une année vague persique, comptée de l'ère d'Iezdejerd. Le commencement de cette année, rapportée à l'ère de Nabonassar, aura pour date égyptienne astronomique :

Année $1379 + n$, jour 91^e, à midi vrai, ou 0^h, au méridien du lieu d'observation.

Supposons qu'un phénomène astronomique ait été observé dans cette même année persique, au jour dont le rang ordinal est j, et à l'heure h, comptée du midi de ce même jour. La date égyptienne correspondante sera :

Année $1379 + n$, jour $90^e + j$, heure h, comptée de midi au méridien du lieu.

Ces dates se transformeront en juliennes par les règles que nous avons établies pour celles de Ptolémée. En voici l'application à divers exemples, embrassant tous les cas que l'on peut avoir à considérer.

106. Éclipse de soleil observée au Caire par Ebn-Jounis, l'an 362 d'Iezdejerd, le 6^e jour du mois schahrir, dans la matinée : commencement à $4^h\ 18^m\ 18^s$ avant midi, l'heure étant conclue de la hauteur orientale observée du soleil.

Ici, l'observation est *antérieure* au midi du jour civil désigné. Il faut donc, conformément à la règle de Ptolémée, la prendre astronomiquement comme *postérieure* au midi du jour précédent 5 schahrir, et lui appliquer le supplément des heures à 24. La date astronomique sera ainsi :

An d'Iezdejerd 362, 5 schahrir, à $19^h\ 41^m\ 42^s$, comptées de midi au Caire.

$1379 + 362$ font en somme 1741. Le 5 schahrir est le 155^e jour de l'année persique, dans les deux manières de placer

les épagomènes, puisqu'il leur est également antérieur. 90 + 155 font en somme 245. Conséquemment la date équivalente, en années vagues égyptiennes, sera :

An de Nabonassar 1741, jour 245e, à 19h 41m 42s, comptées de midi au Caire.

L'année de Nabonassar 1741 sort des limites qu'embrasse notre table de concordance de la page 280. Mais on l'y ramène, sans changer la date du Thot vague, si on la fait rétrograder de 1461 années égyptiennes, ce qui la remonte à 280. Selon la table, le 1er jour du Thot vague coïncide alors avec le 18 décembre de l'année de la période julienne 4245; et il doit revenir à cette même date dans l'année de la même période 4245 + 1460 ou 5705, plus rapprochée de nous d'un intervalle égal à 1461 ans vagues. On aura donc cette concordance initiale.

An de Nabonassar 1741, 1er Thot, à midi ou 0h = de la période julienne 5705B, 18 décembre, jour 353e, à 12h, comptées de minuit.

Ajoutez des deux parts 244 jours complets, plus 19h 41m 42s. Vous reproduirez d'un côté la date égyptienne; de l'autre vous arriverez au jour 597e 31h 41m 42s, équivalent au jour 598e 7h 41m 42s. Retranchez 366 du nombre des jours pour en composer une année bissextile, comme l'est 5705. La date julienne, ainsi réduite, deviendra alors :

De la période julienne année 5706, jour 232e, 20 août, 7h 41m 42s, comptées de midi au Caire.

C'est identiquement le résultat que nous avons obtenu pages 326 et 342, en convertissant les dates de la même observation exprimées par Ebn-Jounis, en années dioclétiennes et en an-

nées des Séleucides. Nous avons, de plus, constaté que les tables astronomiques la confirment, en y plaçant très-exactement le phénomène annoncé. Cet accord nous autorise donc à conclure que nous l'avons également bien interprétée sous sa forme persique; et l'on voit que la conversion de cette dernière s'effectue ainsi jusque dans ses derniers détails, avec autant d'exactitude que de facilité.

107. Je prends pour second exemple une autre éclipse de soleil qu'Ebn-Jounis mentionne, comme l'ayant observée au Caire, en l'an 347 d'Iezdejerd, le 10^{e} jour du mois Chordah. Le commencement, conclu de la hauteur du soleil, eut lieu à 2^{h} 28^{m} 19^{s}, *après* le midi de ce jour. Selon notre tableau des mois, page 360, n aura ici pour valeur 79. La date égyptienne correspondante sera donc :

Année de Nabonassar 1726, jour 169^{e}, à 2^{h} 28^{m} 19^{s} après midi.

Or, notre tableau de la page 280 nous fournit cette concordance initiale :

Année de Nabonassar 1726, 1er Thot, à midi. = Année 5690^{c}, 22 décembre, jour 356^{e}, à 12^{h}, comptées de minuit.

Ajoutez de part et d'autre 168 jours complets, plus, 2^{h} 28^{m} 19^{s}, vous reproduirez la date égyptienne; et le second membre exprimera la date julienne de l'observation, qui sera :

Année 5690^{c}, jour 524^{e}, à 14^{h} 28^{m} 19^{s}, comptées de minuit.

Soustrayant alors du nombre de jours 365, pour en composer une année commune comme l'est 5690, on rejoindra celle-ci aux années complètes; et l'on aura pour date finale :

Année 5691^{c}, jour 159^{e}, 8 juin, à 14^{h} 28^{m} 19^{s}, comptées de minuit.

C'est identiquement ce que nous avons déduit de la date dioclétienne, dans la page 328.

108. Je prends pour dernier exemple une autre éclipse de soleil, observée aussi au Caire par Ebn-Jounis, l'an 372 d'Iezdejerd, le 10^{e} jour du mois Bahmen : commencement à 3^{h} 40^{m} 20^{s}, après le midi de ce même jour.

Cette observation va nous apprendre si Ebn-Jounis place les épagomènes après le 8^{e} mois de l'année vague, ou à la fin du 12^{e} mois. Car, dans la première supposition, le mois Bahmen leur sera postérieur, et son 10^{e} jour sera le 315^{e} de l'année. Dans la seconde, au contraire, il leur sera antérieur, et le rang ordinal de son 10^{e} jour sera 310. Or, l'observation d'une éclipse ne comporte pas une erreur de 5 jours. Ainsi, en comparant avec le ciel les dates juliennes obtenues dans l'une et l'autre hypothèse, on décidera l'alternative.

J'essaye d'abord la première. La conversion en date égyptienne donne l'année de Nabonassar 1379 + 372 ou 1751 ; et le jour, 90 + 315 ou 405^{e}. Otant, de ce dernier nombre, 365, pour en composer une année égyptienne complète, la date transformée sera :

De Nabonassar année 1752, jour 40^{e}, à 3^{h},40^{m}, comptées de midi au Caire.

Alors notre tableau de la page 280 nous fournit cette concordance initiale :

Année de Nabonassar 1752, 1er Thot, à midi ou 0^{h} = de la période julienne 5716^{e}, 16 décembre, jour 350^{e}, à 12^{h}, comptées de minuit au Caire.

Ajoutant des deux parts 39^{j} 3^{h} 40^{m} 20^{s}, on reproduira la date égyptienne : les 39^{j} ajoutés à 350 donneront 389^{j}, composant

1 année julienne commune, plus 24 jours. La date julienne sera donc :

De la période julienne année 5717^{a}, jour 24^{e}, 24 janvier, $15^{h}\ 40^{m}\ 20^{s}$, comptées de minuit au Caire.

C'est identiquement le résultat que nous avons déduit, pages 324 et 341, des dates de la même éclipse, mentionnées par Ebn-Jounis en années dioclétiennes, et en années d'Hilkarnain. Cet accord, d'ailleurs confirmé par le ciel, prouve que, dans ce cas encore, nous avons fidèlement traduit la date persane ; et nous en tirons aussi la certitude qu'en effet Ebn-Jounis place les épagomènes à la fin du 8^{e} mois. Cela était déjà indiqué par un passage de ses manuscrits, que Golius cite dans la traduction d'Alfergani, page 69 des notes. Ebn-Jounis y mentionne un équinoxe observé à Bagdad l'an 201 d'Iezdejerd, le 3^{e} jour épagomène, après le mois Abân. Mais comme cette observation a été faite par un autre astronome, on pourrait encore douter qu'il eût lui-même adopté cette forme de dates. L'épreuve que nous venons de faire, sur ses propres observations, lève, à cet égard, toute incertitude.

109. Les plus anciens astronomes orientaux dont nous possédions les ouvrages, Albatégni et Alfragan, placent aussi les épagomènes de l'année vague persique après le mois Abân, comme Ebn-Jounis. On ne les trouve appliqués à la suite des douze mois que dans les écrits d'astronomes fort postérieurs, dans ceux d'Ulugbeig, par exemple. L'année fixe ayant alors remplacé l'année vague dans les usages civils, celle-ci n'avait plus d'application que dans les calculs astronomiques. Or, ils se trouvaient facilités en rejetant les

épagomènes à la fin du douzième mois, comme ils le sont dans les tables de Ptolémée, dont l'emploi était alors universel et presque exclusif. On a donc pu faire cette mutation scientifique sans inconvénient.

110. Je prends maintenant dans Ebn-Jounis deux exemples de dates persanes, appliquées à des observations de nuit.

Le premier est relatif à une éclipse de lune observée par lui au Caire, dans la nuit d'avant la V^e^ férie (d'avant le jeudi), *qui était* le 25 du mois Ardbehescht, de l'an 348 d'Iezdejerd. Le commencement eut lieu avant le coucher du soleil. La fin fut observée à $8^h\ 2^m\ 36^s$ du soir, comptées du midi précédent.

Le 25 Ardbehescht ici désigné est le jour persan qui a succédé à la nuit dans laquelle a été faite l'observation. Celle-ci appartient en réalité au 24 astronomique, commençant à midi. La date persane qu'il lui faut appliquer pour le calcul sera donc :

Année d'Iezdejerd 348, 24 Ardbehescht, jour 54^e, à $8^h\ 2^m\ 36^s$, temps vrai, compté de midi au Caire.

Ceci nous donne l'année correspondante de Nabonassar $1379 + 348$ ou 1727, et le quantième du jour égyptien $90 + 54$ ou 144. L'origine astronomique de ce jour est de même midi. La date égyptienne de l'observation sera ainsi :

Année de Nabonassar 1727, jour 144^e, à $8^h\ 2^m\ 36^s$, temps vrai, compté de midi au Caire.

Maintenant notre tableau de la page 280, appliqué à cette année de Nabonassar, nous fournit la concordance initiale

suivante :

Année de Nabonassar 1727, 1er Thot, à midi = 5691c, 22 décembre, jour 356e, à 12h, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Ajoutez de part et d'autre $143^j\ 8^h\ 2^m\ 36^s$: le premier membre reproduira la date égyptienne ; et le second exprimera la date julienne correspondante, aboutissant au jour 499e de l'année commune 5691. Extrayez de cette somme 365^j, pour les réunir aux années juliennes complètes, la date cherchée deviendra finalement :

Année de la période julienne 5692c, jour 134e, 14 mai, à $20^h\ 2^m\ 36^s$, de temps vrai compté de minuit au Caire.

C'est identiquement ce que nous avons déjà obtenu, pages 331 et 343, par les dates dioclétiennes et syriennes sous lesquelles Ebn-Jounis a mentionné aussi cette observation.

111. J'applique encore les mêmes principes de réduction à une autre éclipse de lune qu'il dit avoir observée aussi au Caire en l'an 348 d'Iezdejerd, dans la nuit d'avant la VIe férie (d'avant le vendredi), *qui fut* le 21 du mois Aban. Le commencement eut lieu $1^h\ 36^m\ 35^s$ avant le milieu de cette nuit, et la fin $1^h\ 37^m\ 28^s$ après le même minuit.

Ces deux phases extrêmes du phénomène sont comprises dans le cours du 20 Aban astronomique, commençant à midi. En les y rapportant, leurs dates persanes astronomiques seront :

Année d'Iezdejerd 348, 20 Aban, jour 230e, commencement, à $10^h\ 23^m\ 25^s$; fin, à . . . . . $13^h\ 37^m\ 28^s$ } temps vrai, compté de midi au Caire.

En ajoutant 1379 au nombre des années, et 90 au nombre des jours, on a tout de suite les dates égyptiennes corres-

pondantes :

Année de Nabonassar 1727, jour 320ᵉ, commencement, à $10^h\ 23^m\ 25^s$ } temps vrai, compté
fin, à . . . . . $13^h\ 37^m\ 28^s$ } de midi au Caire.

Alors notre tableau de la page 280 nous donne cette concordance initiale, pour l'année égyptienne désignée :

Année de Nabonassar 1727, 1ᵉʳ Thot, à midi = 5691ᵉ, 22 décembre, jour 356ᵉ, à 12^h, temps compté de minuit au Caire.

Ajoutez de part et d'autre $319^j + h$, h étant l'heure de chaque phase comptée de midi. Le premier membre reproduira leurs dates égyptiennes, et le second donnera leurs dates juliennes, qui, ramenées à leur forme de numération la plus simple, seront :

Année 5692ᵉ, jour 310ᵉ, 6 novembre, à $12^h + h$, le temps étant compté de minuit au Caire.

Donc, en donnant à la lettre h les valeurs qu'elle a dans les deux phases, il en résultera :

Année 5692ᵉ, commencement : le 6 novembre, à $22^h\ 23^m\ 25^s$ } temps vrai, compté de
fin : le 7, à $1^h\ 37^m\ 28^s$ } minuit au Caire.

C'est encore exactement ce que nous avons trouvé, page 334 et page 344, d'après les dates dioclétiennes et syriennes qu'Ebn-Jounis avait attachées à la même éclipse. Un plus grand nombre d'exemples semblerait inutile, pour montrer que nous les avons interprétées avec fidélité comme il les concevait. C'est pourquoi je me bornerai à citer encore de lui deux énoncés d'équinoxes observés à Bagdad, dans lesquels la règle qu'il s'était faite pour dater les observations de nuit, me paraît très-ouvertement marquée.

112. Le premier est relatif à un équinoxe vernal. Le texte

porte qu'il fut observé en l'an 199 d'Iezdejerd, le 18 du mois Bahmen, 2 heures environ après le milieu de la nuit d'*avant* le 19. (*Notices des manuscrits,* tome VII, page 146.) Ici la double indication de quantième ne laisse pas d'incertitude. La date astronomique doit être :

Année d'Iezdejerd 199, 18 de Bahmen, jour $3^{e}23$, à 14^{h} *après* le midi du 18.

La transformation en date égyptienne vague donne :

Année de Nabonassar 1579, jour 48^{e}, à 14^{h}, temps vrai, compté de midi à Bagdad ;

et de celle-ci on tire pour la date julienne :

Année 5544^{e}, jour 76^{e}, 17 mars, à 2^{h}, temps vrai, compté de minuit à Bagdad.

Selon les tables abrégées de M. Largeteau, la date théorique de ce même équinoxe est :

Le 16 mars, à $23^{h}\,58^{m}\,10^{s}$, temps moyen à Paris, compté de minuit.
Réduction au méridien de Bagdad, additive : $2^{h}\,48^{m}\,9^{s}$

Date transportée : le 17 mars, à $2^{h}\,46^{m}\,19^{s}$, temps moyen à Bagdad, compté de minuit.

Cette indication, exprimée en temps moyen, se rapproche du résultat d'Ebn-Jounis exprimé en temps vrai, dans des limites de différence qu'une interprétation inexacte devrait dépasser. Cela confirme donc l'exactitude du sens que nous avons attribué à ses énoncés des observations nocturnes.

113. Le deuxième exemple n'est pas moins explicite. Il est relatif à un équinoxe automnal. Ebn-Jounis dit qu'il fut également observé à Bagdad, en l'an 200 d'Iezdejerd, à

1 heure de la nuit d'*avant* le 26 du mois Mordan. (*Notices*, même page que le précédent.)

Cet énoncé montre clairement que le phénomène est arrivé dans la nuit qui a suivi le midi du 25; et comme, au temps des équinoxes, le soleil se couche à six heures équinoxiales du soir, la date astronomique sera:

Année d'Iezdejerd 200, 25 de Mordan, jour 145e, à 7h de temps vrai, après le midi du 25.

La transformation en date égyptienne vague donne:

Année de Nabonassar 1579e, jour 235e, à 7h, temps vrai, compté de midi à Bagdad;

et, de celle-ci, on tire pour la date julienne:

Année 5544e, jour 262e, 19 septembre, à 19h, temps vrai, compté de minuit à Bagdad.

Selon les tables abrégées de M. Largeteau, la date théorique de ce même équinoxe est:

Le 19 septembre, à 14h 0m 31s, temps moyen à Paris, compté de minuit
Réduction au méridien de Bagdad, additive: 2h 48m 9s
Date transportée: le 19 septembre, à 16h 48m 40s, temps moyen à Bagdad, compté de minui

Ici encore, une fausse interprétation de l'énoncé arabe devrait donner un résultat qui en serait bien plus éloigné. L'écart absolu que nous trouvons, entre les observations et les tables, est d'ailleurs de sens contraire dans les deux exemples. Ce n'est pas ici le lieu de discuter les conséquences de ce fait; je me borne à le constater.

114. L'année persane fixe, établie sous le sultan Djellaledin, n'ayant pas été employée en astronomie, je n'en dirai

que ce qui est nécessaire pour faire connaître la forme singulièrement précise de son intercalation, et l'époque absolue qui lui sert d'origine. D'après ce qu'en dit Ulugbeig, à la fin du chapitre V des *Epochæ celebriores*, cette époque est postérieure à l'ère d'Iezdejerd de 163173 jours, composant 447 années vagues, plus 18 jours. Cela coïncide avec l'assertion des autres astronomes orientaux qui la placent au 19^{e} jour du 1er mois, Ferwerdin, de l'an 448 d'Iezdejerd. La date égyptienne correspondante est donc : année de Nabonassar 1827, jour 109^{e}, ce qui concorde avec l'année de la période julienne 5792^{e}, 1079 de notre ère, jour 74^{e}, vendredi 15 mars. D'après les tables abrégées de M. Largeteau, l'équinoxe vernal eut lieu ce jour-là même à $2^{h}\,15^{m}\,10^{s}$ de temps moyen, compté de minuit, sous le méridien de Paris, par conséquent à $5^{h}\,32^{m}\,47^{s}$ du matin, au lever du soleil, sous le méridien d'Ispahan, où Djellaledin faisait sa résidence, cette ville étant plus orientale que Paris de $3^{h}\,17^{m}\,37^{s}$. Ce phénomène s'y trouva donc alors en coïncidence avec le commencement du jour civil ; et comme, depuis un temps immémorial, il était, chez les Perses, l'occasion d'une grande fête appelée *le Neurus*, dont la célébration s'est perpétuée même sous la domination musulmane, les astronomes de Djellaledin lui persuadèrent de choisir cette époque de son règne pour l'origine d'une nouvelle série d'années qui, étant exactement réglées sur la marche du soleil, ramèneraient toujours l'équinoxe vernal, par conséquent le Neurus, à leur premier jour. A cet effet ils imaginèrent une intercalation inégalement répartie sur deux périodes consécutives d'années. Dans la première on intercale d'abord six fois de suite à chaque quatrième année commune de 365^{j} ; puis, une fois

à la cinquième; ce qui donne en somme 7 jours ajoutés à 29 années pareilles. Dans la deuxième période, on intercale d'abord sept fois de suite à chaque quatrième année de 365^j; puis, une fois à la cinquième; ce qui donne en somme 8 jours, ajoutés à ces derniers 33 ans. Tel est l'énoncé d'Ulugbeig. Pour en voir les conséquences, je désigne respectivement par A_1 et A_2 les valeurs en jours que chacun de ces modes d'intercalation donnerait à l'année moyenne, s'il était employé isolément. On aura les deux équations suivantes :

$$29\,A_1 = 29(365) + 7\,; \qquad 33\,A_2 = 33\,(365) + 8.$$

De là on tire :

$$A_1 = 365^j + \frac{7}{29} = 365^j,24137\ 93103\,,$$

$$A_2 = 365^j + \frac{8}{33} = 365^j,24242\ 42424.$$

Si l'on compare ces résultats à l'année tropique moyenne 365,24226 39659, que Delambre a conclue des équinoxes observés par Bradley et Maskeline, et qui est conséquemment un peu trop courte pour l'époque de 1079, on voit que la valeur de A_1 est relativement trop faible, et la valeur de A_2 relativement trop forte. Mais si l'on représente par A_3 l'année persane, qui résulte effectivement des deux périodes conjuguées, on aura pour déterminer A_3 :

$$62\,A_3 = 62\,(365) + 15\,;$$

ce qui donne :

$$A_3 = 365^j + \frac{15}{62} = 365^j,24193\ 54839.$$

L'excès de l'année de Delambre sur celle-là se réduit alors

à $0^j,00032\ 84820$, ce qui ne produirait une différence de 1^j qu'après 3044 années. L'écart est encore moindre que celui-là, par l'intercalation grégorienne. Car, insérant 97 bissextiles en 400 ans, elle suppose l'année moyenne égale à $365^j + \frac{97}{400}$ ou $365^j,242500$; et l'excès de ce résultat sur le nombre de Delambre n'est que $0^j,00023\ 60341$, ce qui produit une différence de 1^j en 4236 années. Le mode grégorien est, en outre, comparativement moins incommode pour les calculs astronomiques, parce que ses discontinuités sont moins fréquentes. Aussi, l'intercalation persane n'a-t-elle jamais été appliquée pratiquement à un pareil usage; et elle paraît avoir été seulement employée dans des pièces officielles, ou pour trouver l'époque du retour du Neurus, sous la domination des sultans Seldjoucides, qui l'avaient instituée. Toutefois, son invention en 1079, cinq siècles avant la réforme grégorienne, mérite d'être remarquée. Elle se présente immédiatement, lorsque l'on convertit en fraction continue le nombre 0,242264, ou tout autre qui en approche, dans les limites d'évaluation de l'année solaire. Car les trois premières réduites que l'on obtient sont $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$ et $\frac{8}{33}$. Les astronomes persans auraient-ils tiré de l'Inde la connaissance de ce genre d'opérations, que l'on suppose avoir été imaginé en Europe par Brounker? C'est ce que l'on ne saurait décider. Laplace, dans le chapitre III de l'*Exposition du système du monde*, parle de l'intercalation persane en mentionnant seulement sa première période, et omettant son caractère mixte, qui constitue sa principale originalité. Sans doute il n'avait pas sous les yeux le texte d'Ulugbeig; et il a probablement pris cette indication inexacte dans l'*Histoire des mathématiques* de Montucla, tome I^er^, page 387.

115. Les astronomes persans, du XIV^e^ et du XV^e^ siècle de notre ère, ont voulu établir qu'à des époques très-reculées, et presque fabuleuses, l'année vague persane était assujettie à une grande intercalation, qui s'opérait par l'addition d'un mois de 30 jours après 120 années de 365. La période ainsi formée aurait donc été équivalente à 120 années de $365^{j}\frac{1}{4}$; ce qui aurait eu pour effet et pour but de limiter les excursions de l'année vague parmi les phases solaires, et de la remettre en concordance avec elles avant qu'elle s'en fût trop considérablement écartée. Mais ces auteurs n'apportent à l'appui de leur assertion que des traditions vagues, dépourvues de toute autorité historique. Une multitude d'inductions y sont contraires. D'abord, cela n'expliquerait point comment, à l'époque d'Iezdejerd, les cinq jours épagomènes se seraient trouvés distinctement détachés, et placés après le mois Abân, où ils sont depuis restés fixes; à moins de supposer que le mois supplémentaire, emportant ces cinq jours à sa suite, s'interposait successivement, avec eux, après chacun des douze mois fondamentaux, dont il prenait le nom dans l'année terminale de chaque période historique. Ils ont supposé, en outre, que le mois supplémentaire, emportant les cinq jours épagomènes à sa suite, s'interposait successivement avec eux, après chacun des douze mois fondamentaux, dont il prenait le nom dans l'année terminale de chaque période, ne laissant ultérieurement de trace de son passage que la place où il avait amené les épagomènes. Toutes les vicissitudes de ce transport auraient ainsi embrassé un intervalle total de 12 fois 120 ou 1440 années de $365^{j}\frac{1}{4}$; et puisque les cinq épagomènes se trouvaient à la suite du 8^e^ mois Abân, à l'époque d'Iezdejerd, il fallait, quand ils y arrivèrent, qu'il se

fût écoulé 8 fois 120 ou 960 années depuis le dernier renouvellement de ce grand cycle. Si l'on veut admettre enfin, comme dernière hypothèse, qu'une des périodes de 120 ans venait justement de s'accomplir lors de l'avénement d'Iezdejerd, ce dernier renouvellement du grand cycle aurait eu lieu 960 ans auparavant, c'est-à-dire, dans l'année de la période julienne 5345—960 ou 4385. Cela se rapproche beaucoup de l'année de Nabonassar 417, dans la période julienne 4382, 14 novembre, où le canon de Ptolémée fait commencer le règne d'Alexandre le Macédonien sur l'Égypte, la domination complète et reconnue de ce prince sur la Perse étant de quelque peu postérieure. Fréret s'est autorisé de cette rencontre pour placer là le renouvellement du grand cycle hypothétique des astronomes persans; et il en fait même remonter l'origine à une autre révolution précédente, ce qui la reporte jusqu'à l'année antérieure à notre ère—1769, plus de 1000 ans avant Nabonassar. Outre l'absence complète de documents historiques, dans lesquels cette fixation à long terme de l'année persane soit mentionnée ou même indiquée, il y a contre elle, en principe, une forte induction que la critique suggère, et que la raison justifie. Nous voyons que les autres peuples orientaux, qui avaient, comme les Perses, une année vague dont chaque jour portait le nom d'un génie ou d'une divinité spéciale, repoussaient obstinément toute intercalation qui, en fixant ces jours dans l'année solaire, aurait arrêté ou déplacé les influences qu'on leur attribuait. L'analogie la plus évidente porte à croire que les mêmes pratiques ont dû créer la même répugnance chez les anciens Perses, dont les descendants sont encore aujourd'hui soumis à toute la puissance des préjugés astrologiques. La concordance pré-

cise et permanente du premier jour de l'année d'Iezdejerd avec le premier jour du mois Choiak de l'ancienne Égypte, fortifie encore cette analogie. Car elle semble présenter, avec évidence, l'idée de deux années de même forme, marchant parallèlement l'une à l'autre, à une distance constante de 90 jours, entre les époques initiales de leurs douze mois pareils. Ne pourrait-on pas très-naturellement imaginer que les cinq jours épagomènes, qui étaient placés fixement à la fin de l'année égyptienne, auraient été eux-mêmes rendus mobiles dans l'année persane, où on les aurait placés successivement à la suite de chaque mois; en sorte que, se trouvant après le mois Aban à l'époque d'Iezdejerd, on les aurait laissés depuis dans cette position fixe, au lieu de continuer à les transporter comme auparavant? Dans l'absence de tout document historique, ce soupçon, du moins, n'offrirait rien de contraire à la vraisemblance.

CHAPITRE VIII.

Sur les périodes luni-solaires qui ont été le plus généralement employées pour la supputation des temps.

116. Les calendriers luni-solaires ont été en usage chez presque tous les peuples anciens. Leur principe commun a été d'établir entre les durées moyennes des révolutions de la lune et du soleil certains rapports, présumés exacts, dont les deux termes pussent s'exprimer par des nombres entiers peu considérables, de manière qu'une somme complète de mois lunaires se trouvât contenue dans une autre somme complète d'années solaires. Ce résultat, envisagé dans une acception rigoureuse, est impossible à obtenir, puisque les périodes de révolution des deux astres sont réellement incommensurables entre elles, et sont d'ailleurs perpétuellement modifiées par les inégalités séculaires, qui les affectent dans des proportions très-inégales. Mais il peut être réalisé avec une approximation suffisante pour les usages sociaux, en prenant soin de corriger, par intermittences, l'erreur absolue provenant de l'imperfection du rapport employé, lorsque son application trop prolongée l'aura rendue sensible.

117. Parmi les institutions de ce genre qui ont existé dans

l'antiquité, celles des Grecs sont pour nous les plus essentielles à connaître, tant par les observations qui s'y rattachent, que parce que les efforts qu'ils ont faits, pour les perfectionner, ont été l'occasion et l'origine de toute notre science astronomique actuelle. Malheureusement, les détails de ces premières tentatives sont aujourd'hui fort effacés. Nous n'en pouvons presque apercevoir avec certitude que la succession, qui a été rendue hésitante et embarrassée dans sa marche par les caprices des usages nationaux, dont les exigences s'imposaient aux astronomes comme autant de conditions prescrites, auxquelles il fallait approprier les résultats de leurs calculs. C'est pourquoi, avant de dire comment ils s'y sont pris pour résoudre ce double problème, et afin d'en détacher avec plus d'évidence la partie essentiellement astronomique, dont je dois ici presque uniquement m'occuper, je présenterai, comme une sorte de type abstrait, la formation et l'établissement d'institutions exactement analogues, chez un peuple où elles ont été réglées uniquement sur les rapports naturels que les nombres célestes laissaient apercevoir. Cet exemple remarquable nous est fourni par la Chine ancienne.

118. Le calendrier luni-solaire des anciens Chinois a été le plus simple, et celui dont l'usage remonte le plus haut dans la nuit des temps. Dès les premières époques de leurs annales, plus de vingt siècles avant notre ère, on les voit employer l'année de $365^{j},25$, intercalée comme l'a été depuis la julienne. Ils la supposaient égale en durée à l'année solaire, mesurée par le retour du soleil à un même solstice, le solstice d'hiver, dont ils déterminaient l'époque d'après les longueurs des ombres observées au gnomon. Partant donc d'une

des époques ainsi fixées, ils laissaient courir continûment l'année de $365^{j},25$ intercalée, jusqu'à ce que les observations du solstice fissent reconnaître qu'elle s'était écartée notablement des retours vrais du soleil à cette phase. Alors ils la remettaient en concordance par une rectification absolue, analogue à la grégorienne de 1582; puis ils la laissaient se développer à partir de cette nouvelle origine, comme précédemment. Or, le nombre ainsi que l'étendue de ces corrections n'ayant pas été mentionnés par l'histoire, ayant été aussi opérés d'après des observations nécessairement imparfaites, il en est résulté dans la numération de ces temps-là, chez les Chinois, des discontinuités maintenant irréparables. Elles n'ont complétement cessé qu'en deçà de l'an 206 avant l'ère chrétienne; les lettrés chinois ayant alors adopté, pour les annales historiques, un mode de notation continu des jours et des années, purement numérique, et indépendant de l'appréciation des mouvements du soleil. Depuis cette époque jusqu'aux temps actuels, les dates historiques des événements et des observations, rapportées dans les textes chinois, peuvent être identifiées sans incertitude avec les juliennes, pour l'an, le mois, et le jour (*).

(*) Les lecteurs qui voudraient connaître plus en détail les usages astronomiques et chronologiques de la Chine ancienne, les trouveront exposés d'après les documents originaux, et discutés par les méthodes modernes, dans les ouvrages suivants : *Histoire de l'Astronomie chinoise*, par le père Gaubil, insérée au tome XIV des *Lettres édifiantes*, édit. de Lyon, 1819; *Recherches sur l'ancienne astronomie chinoise*, insérées au *Journal des Savants*, année 1839, cahier de décembre, et 1840, cahiers de janvier, février, mars, avril; *Recherches sur divers points d'astronomie ancienne*, Mémoires de l'Académie des sciences, tome XX.

119. Les anciens Chinois n'ont pas, comme les Grecs, cherché à déterminer les inégalités des mouvements vrais du soleil, de la lune et des planètes : tous leurs usages pratiques étaient réglés sur les mouvements moyens. Ils subdivisaient l'année solaire en douze époques équidistantes, appelées tchong-ki; et, comme ils la supposaient exactement de $365^j\frac{1}{4}$, l'intervalle de deux tchong-ki consécutifs comprenait $\frac{365^j 25}{12}$ ou $30^j,4375$, ou encore $30^j\frac{7}{16}$; ce qui, sauf leur égalité conventionnelle, les identifiait en durée à nos mois solaires juliens. Ils y avaient fait correspondre le mode de subdivision de la circonférence, qu'ils partageaient en 365 parties et $\frac{1}{4}$, dont chacune concordait ainsi avec le moyen mouvement du soleil en un jour. Ils avaient reconnu dès lors que l'intervalle temporaire des tchong-ki, $30^j,4375$, surpasse quelque peu la durée moyenne d'une lunaison, ou ce que nous appelons un mois lunaire; et des observations qui n'exigeaient aucune science, mais qui durent être sans doute longtemps continuées, leur avaient fait découvrir qu'en moyenne, 228 intervalles pareils, que j'appellerai par abréviation des tchong-ki *temporaires*, contenaient 235 lunaisons complètes. Cette période de concordance fut nommée le *Tchang*. Or, 228 tchong-ki temporaires valent en somme $\frac{228}{12}$, $365^j,25$ ou 19. $365^j,25$, c'est-à-dire 19 années de $365^j\frac{1}{4}$. Ainsi, le Tchang des anciens Chinois était précisément la même période luni-solaire qui fut découverte ou importée en Grèce par Méton vers la 4282^e année de la période julienne, ou 432 ans avant l'ère chrétienne, date chronologique; ce qui lui donne à la Chine une antériorité d'existence au moins

de sept siècles, à ne juger que d'après les documents historiques de la dynastie des Tchéou, sous laquelle on le trouve régulièrement et légalement établi. De là on peut conclure aisément la durée moyenne du mois synodique que la règle chinoise suppose. Car chaque lunaison, exprimée en tchong-ki, valant $\frac{228}{235}$, et le tchong-ki contenant $30^j\frac{7}{16}$, la durée d'une lunaison sera le produit de ces deux quantités; ce qui la fait égale à $\frac{228}{235}\cdot\frac{487}{16}$, ou $29^j\frac{499}{940}$. Ce sera donc approximativement, en fractions décimales de jour, $29^j,53085\,11$; et rigoureusement, en subdivisions sexagésimales, $29^j\,12^h\,44^m\,25^s\frac{25}{47}$. Cette valeur est trop forte d'environ 22^s. Car les déterminations directes, et beaucoup plus exactes, d'Hipparque et de Ptolémée, ne donnent, pour ces anciennes époques, que $29^j,53059\,41$ ou $29^j\,12^h\,44^m\,3^s\frac{1}{3}$ (*). Mais elle est bien préférable à celle que Méton avait implicitement supposée, et qui était $29^j\frac{25}{47}$, ou $29^j\,12^h\,45^m\,57\frac{21}{47}$, comme nous le verrons dans un moment. Enfin, elle se trouve identique à celle qui résulte des périodes de 76 ans, introduites par Calippe un siècle après Méton, ainsi que nous le reconnaîtrons encore.

120. Il ne sera pas inutile de faire voir à quoi tiennent l'exactitude, ou l'inexactitude, de ces évaluations, ainsi que leur accord ou leur discordance. Au chapitre II du livre IV de l'Almageste, Ptolémée mentionne, malheureusement avec trop peu de détails, un traité spécial d'Hipparque sur les mouvements de la lune, dans lequel ce grand astronome avait établi que 4267 révolutions synodiques s'opèrent dans un nombre de jours solaires égal à $126007\frac{1}{24}$. Il avait conclu

(*) *Almageste*, tom. I, liv. IV, p. 217, édit. de Halma.

ce résultat, des intervalles de temps qui s'étaient écoulés entre des éclipses très-distantes, offrant des circonstances pareilles d'accomplissement, ou ramenées à cette condition par le calcul. Ptolémée admet ce rapport ; et il en tire la durée moyenne du mois synodique, par une simple division numérique. Ce mode de détermination a deux avantages : d'abord, la longueur de la période, jointe à la similitude des circonstances terminales, favorise la compensation des inégalités intermédiaires et extrêmes ; puis, son expression en jours la rend indépendante de l'année solaire, qui était imparfaitement évaluée alors. Dans les autres énoncés, au contraire, la période de concordance admise est beaucoup plus courte; et l'évaluation de l'année solaire en devient un élément essentiel. Soit a la durée en jours qu'on lui attribue. Le Tchang chinois et le cycle de Méton supposent également 235 lunaisons en 19 ans solaires; ce qui donne pour chacune $\frac{19a}{235}$. Mais la valeur de a, dans l'un et dans l'autre, est différente. Les Chinois la font de $365^j\frac{1}{4}$; Méton la faisait de $365^j\frac{5}{19}$, plus longue de $\frac{1}{76}$ de jour (*). La durée de la lunaison, qui se déduit de celle-ci, doit donc être relativement plus grande; et, en effet, cette valeur de a la rend égale à $\frac{6940^j}{235}$, ou $29^j\frac{25}{47}$, comme je l'ai tout à l'heure annoncé. Il n'est pas supposable que Méton ait ignoré l'année de $365^j\frac{1}{4}$, qui, de son temps, devait être déjà vulgaire. Mais son produit par 19 étant $6939^j\frac{3}{4}$, n'embrassait pas un nombre entier de jours ; ce qui aurait été incommode pour définir les époques initiales et finales du cycle, dans l'application usuelle.

(*) Géminus, *Introduction aux phénomènes célestes*, page 47, édition de Halma. Ptolémée, *Almageste*, livre III, pag. 164, édit. de Halma.

Cet inconvénient disparaissait en augmentant l'année de $\frac{1}{76}$ de jour, fraction que l'on pouvait alors considérer comme négligeable. Car les 19 années, ainsi modifiées, contenant en plus $\frac{19^j}{76}$ ou $\frac{1}{4}$ de jour, elles se trouvent comprendre en somme 6940 jours complets. Méton dut se croire autorisé à agir ainsi; mais Calippe fit mieux. Reprenant l'année de $365^j,25$, il en composa une période de 4 fois 19, ou 76, ce qui fit disparaître la fraction $0^j,75$, et lui donna pour produit total 27759 jours complets. Puis il quadrupla aussi les 235 lunaisons, ce qui les porta au nombre de 940, réparties sur cet intervalle. Or, le multiplicateur de a, sous cette nouvelle forme, restant toujours égal à $\frac{19}{235}$, et la valeur admise pour a devenant la même que dans le Tchang chinois, le produit $\frac{19a}{235}$, qui exprime la durée d'une lunaison, se trouve finalement le même dans ce Tchang que dans les périodes calippiques, comme je l'avais tout à l'heure annoncé. Au reste, la période de 19 ans est essentiellement trop courte pour donner la durée moyenne des lunaisons avec exactitude; et l'approximation que les anciens astronomes en ont tirée, n'a dû cette justesse pratique qu'à une compensation d'erreurs. Car, par exemple, si, dans l'application de cette période, ils avaient voulu supposer a égal à $365^j,2424$, ce qui était la véritable durée de l'année solaire moyenne 250 ans avant notre ère, le produit $\frac{19a}{235}$, qui en serait résulté, aurait donné, pour la durée de la lunaison, $29^j,53023\,66$ ou $29^j\,12^h\,43^m\,32^s,44$, valeur trop faible, et plus fautive que celle qu'on déduit de leurs calculs (*).

(*) La période lunaire de 19 ans est employée dans le calendrier de l'Église chrétienne, suivant une méthode inverse de celle-là, qui rend très-

121. Dans toute hypothèse, chaque lunaison moyenne, contenant, à peu de chose près, $29^{j},530$, est plus courte que $\frac{1}{19}$ d'année solaire, qui contient à peu près $30^{j},437$. Pour adapter isolément l'une ou l'autre de ces périodes aux usages civils, il faut remplacer ces intermittences constantes par des intermittences inégales, embrassant des nombres entiers de jours, qui ne s'écartent jamais de sa marche que dans des limites restreintes. Par exemple, on peut ainsi substituer à

---

facile de la maintenir en concordance avec le ciel. On y prend pour donnée la durée moyenne des lunaisons, déjà très-approximativement connue depuis Hipparque ; et, comparant son produit par 235, à 19 années juliennes de $365^{j},25$, on en conclut le nombre d'années après lequel l'erreur, devenue égale à 1 jour, devra être compensée par une correction accidentelle. Avant la réforme grégorienne, on avait établi ce calcul sur la durée de la lunaison rapportée dans l'*Almageste*, $29^{j},53059\ 41358$ ou $29^{j}\ 12^{h}\ 44^{m}\ 3^{s}\ \frac{1}{3}$, laquelle est plus longue que la durée actuelle d'environ $0^{s},5$, par suite de l'accélération séculaire du moyen mouvement. De là on tire :

Durée de 235 lunaisons moyennes d'après Ptolémée.	$6939^{j},68962\ 19130$
19 années juliennes de $365^{j},25$	$6939,75$
Excès des 19 années juliennes	$0^{j},06037\ 80870$

Cet excès donne, par proportionnalité, une erreur de 1 jour en $314^{a},68$, ou par approximation en 315 ans. De sorte qu'après cet intervalle de temps, la dernière lune moyenne précéderait de 1 jour l'accomplissement de la 315^{e} année non intercalée. Si l'on employait la durée actuelle des lunaisons, 29,53058 8716, l'excès des 19 ans juliens serait un peu plus fort, et l'erreur se trouverait atteindre 1 jour après 308 ans juliens révolus. On la corrige alors, en ajoutant 1 unité à l'épacte de l'année suivante, ce qui rétablit l'accord. Cela s'appelle, dans le comput ecclésiastique, l'*équation lunaire*. Mais la réforme grégorienne a nécessité encore une autre modification à cet arrangement, pour tenir compte des bissextiles centenaires qu'elle supprime. On en peut voir le détail dans l'*Astronomie* de Lalande, livre VIII.

la valeur moyenne du mois lunaire, des intervalles successifs de 30 ou de 29 jours, convenablement alternés. Cela s'appelait, à la Chine, des grandes lunes et des petites lunes; en Grèce, des mois pleins ou caves. L'assimilation sera d'autant plus parfaite, que l'on aura mieux évalué le mois lunaire moyen, et que les intermittences seront variées de manière à se terminer toujours le plus près possible de ses limites rigoureuses. D'après le même principe, on peut également faire courir les douzièmes d'années solaires par intervalles de 30 ou de 31 jours, un seul étant fait occasionnellement de 28 ou de 29, comme dans notre calendrier julien actuel. Si l'on veut former un calendrier purement lunaire ou purement solaire, on y prendra pour période mensuelle l'une de ces subdivisions, sans s'inquiéter si elle marche d'accord avec l'autre. Mais, dans les calendriers appelés *luni-solaires*, on les emploie toutes deux simultanément. Les révolutions de la lune y servent pour marquer les mois, celles du soleil pour compter les années; et l'on attribue à chacune de celles-ci le nombre entier de lunaisons consécutives qui approche le plus d'y être compris, de manière que l'écart total annuel ne dépasse jamais une demi-lunaison en plus ou en moins. Or, 12 lunaisons moyennes, comprenant à peu près $354^j,36$, sont plus courtes de $10^j,89$ qu'une année solaire, supposée de $365^j,25$; et 13 comprenant $383^j,89$, sont plus longues de $18^j,64$. Ainsi, dans ce système d'association, pour maintenir les deux séries dans les limites d'écart prescrites, il faudra donner à certaines années 12 lunaisons, à d'autres 13. Il faudra, en outre, distribuer ces alternatives de manière que l'accord se trouve exactement rétabli après 19 années solaires, comprenant 235 lunaisons, ou après 76 qui en comprennent 940, si l'on

admet ces périodes de concordance comme suffisamment approchées pour les usages civils, sauf à corriger l'erreur finale par l'addition ou la soustraction conventionnelle d'un jour, quand on aura reconnu qu'elle devient de cet ordre. Voilà ce qu'ont fait généralement tous les peuples qui ont employé des calendriers luni-solaires. Les années qui contiennent 12 lunaisons y sont appelées *communes ;* celles qui en contiennent 13 sont dites *intercalaires.* Si la distribution de ces dernières dans la période totale de 19 ans ou de 76, doit être seulement réglée par la condition que les mois lunaires successifs s'écartent toujours, le moins possible, des mois solaires moyens de même rang, leur mode de répartition est unique, et complétement déterminé par les relations numériques qu'ont entre elles les deux séries conventionnelles de mois et d'années : c'est ce qu'ont admis les Chinois. Mais il s'y introduit des indéterminations, quand on veut s'astreindre, en outre, à des usages locaux, qui exigent que le commencement ou la fin des mois, ou des années lunaires légales, s'écartent le moins possible de certaines phases solaires assignées ; comme aussi lorsque l'ordre des années intercalaires ne doit pas trop s'écarter d'anciennes habitudes déjà prises. C'est ce qui a eu lieu chez les Grecs; et cela a produit dans leurs calendriers luni-solaires des variations, ainsi que des incertitudes, devenues maintenant très-difficiles à éclaircir. On comprendra mieux les complications qui ont été occasionnées par ces exigences locales, quand j'aurai exposé la simplicité des résultats auxquels a conduit l'adoption du système contraire (*).

(*) Les particularités qui rendent la discussion des calendriers grecs si

122. Chez les Chinois, la confection du calendrier a toujours été une des attributions du gouvernement impérial. La distribution des lunes y est établie d'après deux préceptes que l'on trouve consacrés, comme rites, dans des textes du temps de Tchéou-Kong, c'est-à-dire de onze siècles avant l'ère chrétienne, mais qui sont vraisemblablement plus anciens.

Première règle. Dans chaque année civile, soit de 12, soit de 13 lunes, il n'y en a que 12 qui aient un nom et un rang ordinal propres. Lorsqu'une 13^{e} s'intercale entre elles, on lui donne le nom de la lune ordinaire qu'elle suit; et l'on y joint le caractère spécifique jün , composé de deux clefs, dont l'une signifie *une porte*, et l'autre le *prince* ou *souverain.*

Deuxième règle. La lune intercalaire n'a pas de tchong-ki.

Le premier précepte n'exprime qu'une convention de nomenclature qui se comprend d'elle-même. Le caractère complexe qui désigne la lune intercalaire a un sens figuratif, qui sera tout à l'heure expliqué. Le second précepte définit ces lunes par une condition rigoureuse, qui fait reconnaître avec la plus grande simplicité leurs époques et leurs places dans la succession de toutes les autres, d'après les valeurs conventionnelles que l'on attribue aux durées des années solaires et des lunaisons.

épineuses, ont été exposées et analysées avec toutes les ressources de l'érudition et du calcul astronomiques par Ideler, dans deux dissertations spéciales que Halma a traduites. L'une a pour titre : *Recherches historiques sur les observations astronomiques des anciens;* l'autre, *Mémoire sur le cycle de Méton.*

En effet, comme je l'ai annoncé tout à l'heure, les douze tchong-ki chinois sont des *époques équidistantes de temps*, qui divisent l'année solaire en douze portions égales, à partir du solstice d'hiver vrai; en sorte que, si cette année est supposée par exemple contenir $365^{j},25$ comme dans les anciens temps, l'intervalle temporaire, qui sépare deux tchong-ki consécutifs, sera $30^{j},4375$. Cet intervalle excède toujours un mois synodique. Cela posé, d'après la deuxième règle, toute lunaison, qui contient dans son cours un quelconque des douze tchong-ki, est ordinaire; mais toute lunaison, dont le cours se trouve compris tout entier entre deux tchong-ki consécutifs, est intercalaire. Il y a donc toujours douze lunes ordinaires dans chaque année civile, comme il y a douze tchong-ki; et les quatre tchong-ki, attachés aux quatre phases cardinales de l'année solaire qui répondent approximativement aux équinoxes et aux solstices, ont chacun leurs lunes propres, numériquement équidistantes entre elles, puisqu'une lune occasionnellement intercalée ne se compte point.

L'année civile chinoise commence avec le mois lunaire qui contient un certain tchong-ki, nominalement désigné; et le rang des lunes ordinaires se compte en commençant à cette origine. Le choix de ce tchong-ki primordial n'a pas été le même sous toutes les dynasties, et il paraît qu'il dépendait de la volonté du prince. Mais l'histoire a enregistré ces diverses prescriptions, ce qui permet de mettre les énoncés de toutes les époques en rapport exact avec le ciel. Sous la dynastie des Tchéou, onze siècles avant notre ère, la 1re lune de l'année était celle qui contient le tchong-ki attaché au solstice d'hiver vrai. C'est encore l'usage qui a lieu aujourd'hui. Mais

on détermine maintenant l'époque annuelle de ce solstice par le calcul, d'après les tables astronomiques d'Europe.

123. Quel que fût le tchong-ki initial, pris pour origine de l'année, il a pu quelquefois arriver, et il est arrivé en effet, que la lunaison qui le contenait l'a dépassé de très-peu; en sorte que la fin de la lunaison suivante n'atteignait pas le tchong-ki suivant. Dans un tel cas, cette première lune-là aurait dû être mentionnée comme intercalaire, d'après la règle. Néanmoins on la comptait comme ordinaire, par exception; et l'on prenait comme intercalaire la lune suivante, qui aurait dû être ordinaire. Le motif était de ne pas déranger d'anciennes cérémonies, attachées, par les rites, à certains tchong-ki cardinaux.

124. Les préceptes que je viens de rappeler suffisaient, sans aucune notion théorique, pour maintenir l'ancien calendrier luni-solaire chinois dans les conditions de sa simplicité primitive; et même pour le préparer quelques années à l'avance, dès ces premiers temps si reculés où nous le trouvons officiellement établi. Leur application exigeait uniquement l'évaluation approximative de l'année solaire moyenne et du mois synodique moyen, jointe à la détermination continuellement réitérée du solstice d'hiver au moyen du gnomon. De ces trois choses, deux sont uniformément attestées par les anciens textes; et la troisième, le mois synodique, résulte nécessairement du long usage de l'année lunaire. En effet, ceci étant accordé, considérons un solstice d'hiver, dont l'instant vrai vient d'être déterminé, avec plus ou moins d'exactitude, soit par le gnomon, soit par le transport d'un solstice un peu antérieur, d'après la durée attribuée à l'année solaire. L'observation a dû faire connaître, ou faire

vérifier, l'époque de la nouvelle lune qui précède immédiatement le solstice actuel. On sait donc *l'âge* de cette lune au moment supposé du solstice. En soustrayant ce nombre de jours du mois synodique, tel qu'il est connu, on a l'époque, non pas exactement vraie, mais approximative et légale, de la nouvelle lune, qui doit succéder immédiatement à celle-là, au delà du tchong-ki solsticial. Si un mois synodique, ajouté à cette époque, dépasse le tchong-ki suivant, cette deuxième lune sera ordinaire comme la précédente. De celle-ci on passera à une troisième, puis à une quatrième, et ainsi de suite indéfiniment, puisque les intervalles des tchong-ki sont tous égaux et connus. Lorsqu'on trouvera une lune qui tombera tout entière entre deux tchong-ki consécutifs, on la marquera du caractère jün 閏; et elle sera intercalaire, d'après la règle; après quoi on passera aux suivantes. Les plus simples opérations d'arithmétique suffisent pour ces opérations. Mais on pourrait encore les effectuer par un procédé purement graphique. Pour cela, prenez deux règles minces, de bois ou de métal, que j'appellerai A et B. Marquez sur A, une suite de parties d'égale longueur, qui représenteront les intervalles des tchong-ki solaires successifs. Le premier point de division figurera votre tchong-ki solsticial. Marquez de même sur B une autre suite de parties égales, mais d'une longueur un peu moindre, étant relativement aux précédentes dans le rapport du mois synodique à un douzième de l'année solaire. Cela fait, mettez vos deux règles en contact par leurs côtés longs, de manière que la première division lunaire précède la première division solaire proportionnellement à l'âge de la lune au moment du solstice pris pour point de départ. Alors toute la suite des lunaisons

moyennes se trouvera placée vis-à-vis des tchong-ki solaires, dans les conditions de correspondance suivant lesquelles elles devront s'accomplir ; et l'on connaîtra celles qui seront ordinaires ou intercalaires, en voyant si elles contiennent un tchong-ki dans leur cours, ou si elles tombent entre deux tchong-ki. Gaubil dit que, sous la dynastie des Tchéou, par conséquent onze siècles avant l'ère chrétienne, il existait des instruments qui donnaient ainsi les époques des intercalations, par un procédé mécanique. Il ne pouvait y en avoir de plus simples que deux règles divisées, glissant l'une contre l'autre, comme je viens de l'expliquer. Dès que la durée moyenne du mois synodique sera tolérablement connue, la seule coïncidence des divisions, plus aisément encore que les nombres, aura dû montrer que 235 de ces mois étaient presque égaux à 228 intervalles de tchong-ki, quoique cependant un peu moindres, si l'on supposait l'année solaire de $365^{j},25$, ce qui est le Tchang de 19 ans. Il y aura donc sept lunes intercalaires dans cet intervalle, puisque 7 est l'excès de 235 sur 228. Pour trouver leur place, mettez l'origine du Tchang au moment où la première lunaison de votre année civile se trouve *commencer* avec le tchong-ki solaire qu'elle doit embrasser; ou, ce qui revient au même, mettez la première division lunaire en coïncidence avec la première division solaire. Puis calculez arithmétiquement, ou seulement regardez, la correspondance des divisions suivantes. Alors le précepte de Tchéou-kong vous donnera les époques légales des sept lunes intercalaires, telles qu'on les trouve réparties dans les plus anciens textes chinois. Elles appartiennent aux années désignées par leur rang ordinal dans la ligne suivante:

3^{e}, 6^{e}, 9^{e}, 11^{e}, 14^{e}, 17^{e}, 19^{e}.

On peut voir le détail de ce petit calcul dans le *Journal des savants*, pour l'année 1840, page 83. Il fait découvrir, en même temps, la place nécessaire de chaque lune additionnelle, parmi les douze régulières, dans l'année à laquelle elle appartient. Quand nous discuterons les périodes grecques, nous y trouverons les années de 13 lunes réparties suivant un ordre quelque peu différent. Mais il n'y a pas été établi, comme chez les Chinois, d'après l'unique condition de satisfaire à des règles purement numériques et légalement fixées. Introduit d'abord par les premiers essais d'une astronomie imparfaite et naissante, il s'est perpétué dans ses perfectionnements ultérieurs, comme une exigence d'habitude à laquelle on devait se conformer.

Le caractère , qui désigne les lunes intercalaires chinoises, est l'expression figurée d'un rit religieux. Dans la résidence impériale, il y a un palais carré, dont les quatre faces regardent les points cardinaux de l'horizon. Le contour de cet édifice est divisé en douze salles, consacrées aux lunes ordinaires; et, au commencement de chaque lunaison, l'empereur va successivement offrir un sacrifice dans la salle correspondante. Lorsqu'il survient une lune intercalaire entre deux tchong-ki, le rit s'accomplit entre les deux battants de la porte qui ouvre le passage d'une salle à l'autre.

125. Lorsque l'on calcule une suite de nouvelles lunes d'après la durée moyenne du mois synodique, comme nous venons de le supposer, on les trouve quelque peu différentes des véritables, tantôt en avance, tantôt en arrière, à cause de la variabilité réelle des mouvements vrais. Toutefois, l'observation effective des lunes réelles, et surtout des

éclipses, donne la mesure de ces écarts, en même temps qu'elle perfectionne l'évaluation du mois synodique moyen, en jours et fractions de jours. Mais quand on associe ce résultat perfectionné à une année solaire appréciée inexactement, comme le faisaient les anciens Chinois, on ne peut pas maintenir fixement, à l'aide du calcul seul, les deux années lunaire et solaire, en correspondance constante; même en leur appliquant un procédé d'intercalation rigoureusement propre à produire cet effet, comme l'est celui de Tchéou-kong. Car alors, les solstices et les équinoxes vrais se déplaçant peu à peu dans le cours des lunes auxquelles ils doivent conventionnellement appartenir, l'erreur d'un calcul trop prolongé peut les faire passer dans la lunaison voisine, soit antérieure, soit postérieure, où on ne les suppose point; ce qui faussera les conditions de correspondance qu'on leur attribuait numériquement. Le moyen de limiter cette erreur, c'est de réitérer fréquemment l'observation d'une des phases de l'année solaire, par exemple celle du solstice d'hiver vrai, et d'examiner aussi l'âge réel de la lune qui doit lui appartenir; puis, de régler seulement un petit nombre des années suivantes sur ces éléments, et de les mesurer de nouveau, quand on commence à découvrir qu'ils s'écartent notablement des valeurs calculées. Voilà ce que les anciens astronomes chinois ont toujours fait, ou du moins ce qui leur a été toujours prescrit par les rites; et c'est là aussi ce qui nous permet aujourd'hui de rectifier, d'après les indications de nos tables solaires et lunaires actuelles, les fautes qu'ils ont pu accidentellement commettre, dans l'énoncé du rang ordinal des lunes ou dans l'intercalation.

126. Le calcul arithmétique leur indiquait, avec non moins

de simplicité, quelles lunaisons il convenait de faire longues ou brèves, pour éviter les fractions de jour en s'écartant le moins possible des évaluations rigoureuses. Le choix se décidait par la condition que l'erreur commise fût toujours moindre que $\frac{1}{2}$ jour. Prenons, pour exemple, la 1re lunaison moyenne du Tchang :

Sa durée exacte est. . . . . $29^j \frac{499}{940}$

Le numérateur de la fraction surpasse 470, moitié de 940. On devra donc, en nombres ronds, donner 30 jours à cette première lune. Alors l'erreur finale sera. . . . . $-\frac{441}{940}$

Je l'écris comme négative, parce qu'il faudra la retrancher de la lunaison suivante. . . . . $29^j \frac{499}{940}$

Il restera donc à celle-ci. . . . . $29^j \frac{58}{940}$

On devra donc lui donner 29 jours, et reporter l'excédant sur la lunaison qui suit. En continuant à procéder numériquement de lune en lune, par le même principe on trouvera que la durée qu'on obtient pour la 16e est $29^j \frac{464}{940}$. Cela peut se voir directement, par la considération qu'elle doit être l'excès de 16 lunaisons moyennes comprenant $472^j \frac{464}{940}$, sur 8 lunaisons de 30 jours plus 7 de 29 qui ne font que 443^j. Si donc on donne à cette 16e, 29 jours seulement, d'après la règle, elle laisse un résidu additif considérable $\frac{464}{940}$, qui est presque égal à $\frac{1}{2}$. Cela fait que les deux suivantes, la 17e et la 18e, sont toutes deux de 30 jours ; et, comme elles entrent ensemble dans la deuxième année, qui n'a que 12 lunaisons, comme la première, elles lui donnent 355 jours au lieu de 354 que cette première avait. Après que ce pas est franchi, les alternatives recommencent jusqu'à une nou-

velle interruption qui se découvre de la même manière; et ainsi progressivement jusqu'à la fin. Pour savoir combien on rencontrera, en somme, de lunes longues et brèves, il faut établir le calcul sur 4 Tchangs, comprenant 76 ans de $365^j\frac{1}{4}$ ou 27759^j sans fractions. Cet intervalle, ainsi quadruplé, devra pareillement contenir 4.235 ou 940 lunaisons complètes ; ce qui reproduit, en moyenne, leur même valeur individuelle, $29^j\frac{499}{940}$. Alors, si l'on nomme x' le nombre de celles auxquelles il faudra donner 29 jours, et x'' le nombre de celles auxquelles on en devra donner 30, on aura ces deux égalités conditionnelles :

$$x' + x'' = 940 ; \qquad 29x' + 30x'' = 27759.$$

De là on tire, par l'élimination :

$$x' = 441 ; \qquad x'' = 499.$$

Ces nombres nous apprennent que, dans la succession des lunes, les redoublements porteront sur celles de 30 jours; et dans la durée totale de 4 Tchangs, le nombre de ces lunes redoublées sera $499 - 441$ ou 58. Chaque couple pareil, qui se trouvera compris dans une année de 12 ou de 13 lunes, l'accroîtra ainsi exceptionnellement d'un jour.

127. On voit, par ces détails, que la simplicité du calendrier chinois primitif, et la perpétuité de son application sous une même forme, depuis une antiquité presque immémoriale, sont résultées de ce que les mois lunaires moyens n'y ont pas été attachés aux phases vraies de l'année solaire, mais à des phases conventionnelles, fixées par des intervalles de temps égaux, dont l'origine seule était occasionnellement déplacée, à des époques distantes, pour la remettre en

concordance avec le ciel. Les Grecs au contraire, plus enclins aux théories spéculatives, se sont continuellement efforcés de découvrir, entre les mouvements vrais de la lune et des planètes, des rapports numériques simples et durables. De là sont venues toutes les oscillations que leur calendrier a successivement subies, et qui font maintenant le désespoir des chronologistes.

128. Ils n'ont même été conduits à la période si évidente de 19 ans, qu'à force d'essais indirects. Pour voir d'un seul coup d'œil la série des épreuves qu'ils ont parcourues, j'en prépare ici les résultats successifs, d'après les valeurs exactes des moyens mouvements solaires et lunaires à ces anciennes époques. Supposant donc que l'on veuille les établir pour 300 ans avant l'ère chrétienne, ou 2100 avant 1800, la méthode de calcul exposée plus haut, page 351, § 97, fera voir d'abord que la durée de l'année tropique moyenne était alors très-approximativement $365^{j},2424$. J'associe cette valeur à la durée moyenne de la lunaison, $29^{j},530594$, que Ptolémée a établie dans l'Almageste, le système d'observations d'où il l'infère la rendant très-approximativement applicable à cette même époque, quand on tient compte de l'accélération progressive que le moyen mouvement de la lune éprouve. J'applique alors à ces deux éléments la méthode des divisions successives, pour former la fraction continue qui donne les expressions simples et de plus en plus approchées de leur rapport. Voici le détail de l'opération :

$365^{j},242400$	$29^{j},530594$	$10^{j},875272$	$7^{j},780050$	$3^{j},095222$	$1^{j},589606$	$1^{j},505616$	$0^{j},083990$	$0^{j},077786$	$0^{j},006$
$69,936460$	12	2	1	2	1	1	17	1	12
$10,875272$	$7,780050$	$3,095222$	$1,589606$	$1,505616$	$0,083990$	$0,665716$	$0,006204$	$0,015746$	
						$0,077786$		$0,003338$	

De là, en nommant A la durée de l'année tropique, et L celle de la lunaison, on tire la fraction continue ci-dessous figurée :

$$\frac{A}{L} = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}}}$$

En arrêtant cette fraction à ses termes successifs, et réduisant chaque résultat en fraction ordinaire, on obtient des expressions simplifiées du rapport $\frac{A}{L}$ qui approchent de plus en plus d'être exactes. Alors, si l'on établit la concordance entre les multiples de A et de L ainsi définis, l'erreur de chaque évaluation, alternativement trop forte et trop faible, est toujours indiquée par le reste de la division qui compléterait le quotient auquel on s'arrête, comme on peut le constater matériellement. De là on tire autant de périodes, dont j'écris seulement les huit premières; la neuvième, qui comprendrait notre dernier quotient $\frac{1}{12}$, se trouvant déjà être beaucoup trop longue pour avoir aucune utilité d'application.

(1) A— 12L=+10^{j},875272.

(2) 2A— 25L=— 7^{j},780050 Diétéride : usitée du temps de Solon, vers l'an —600 de notre ère, d'après une indication d'Hérodote. (Liv. I^{er}, ch. 32.)

(3) 3A— 37L=+ 3,095222 Non usitée.

(4) 8A— 99L=— 1,589606 Octaétéride : introduite par Cléostrate, vers l'an —500, d'après Censorin. (*De Die natali*, cap. 18.)

(5) 11A— 136L=+ 1,505616 Non usitée.

(6) 19A— 235L=— 0,083990 Ennéadécaétéride : introduite par Méton, en —432.

(7) 334A—4131L=+ 0,077786 Non usitée.

(8) 353A—4366L=— 0,006204=—0^{j} 0^{h} 8^{m} 56^{s},0256. Non usitée.

La dernière de ces périodes établit un rapport presque exact, entre les multiples de A de L qui la constituent. Elle est plus longue que la période d'Hipparque, qui n'embrassait que 4267 lunaisons. Mais on la réduirait à ce même nombre si l'on en retranchait une octaétéride qui en contient 99. Formant donc, avec les égalités précédentes, la nouvelle combinaison (8) — (4), il en résultera :

(9) 345A—4267L=+ 1^{j},583402 ; conséquemment 4267L=345A — 1^{j},583402

Si l'on remplace A par la valeur 365^{j},2424 que nous lui avons attribuée, on trouve, par cette expression :

$$4267L = 26007^{j},044598 ;$$

tandis que l'énoncé d'Hipparque suppose :

$$4267L = 26007^{j}\frac{1}{24} = 26007^{j},041666\frac{2}{3}.$$

La petite différence qui se manifeste entre ces deux évaluations, tient à ce que la valeur de L, rapportée dans l'Almageste, et que nous avons prise pour élément de nos divisions, n'est pas tout à fait identique à celle que donne le nombre

d'Hipparque, divisé par 4267. En effet, on obtient par celui-ci :

$$L = 29^j,5305933130 = 29^j\ 31'\ 50''\ 8'''\ 9^{iv},336 ;$$

tandis que le texte de l'Almageste porte :

$$L = 29^j,5305941358 = 29^j\ 31'\ 50''\ 8'''\ 20^{iv}.$$

J'ai converti la fraction décimale en subdivisions sexagésimales de jour, pour la reproduire telle que le texte la présente. La dissemblance de ces deux résultats provient-elle d'une erreur que Ptolémée aurait commise, en concluant du nombre d'Hipparque la lunaison simple? ou faut-il y voir une rectification intentionnelle ? Cela est impossible à décider. Dans tous les cas, on ne peut pas l'attribuer à une faute de copiste; car les manuscrits de l'Almageste s'accordent à exprimer la fraction 20^{iv}, et Ptolémée l'emploie comme élément de ses calculs ultérieurs.

129. Hipparque ne pouvait pas se croire assez sûr de l'année tropique A, pour y rattacher sa période de 4267 lunaisons; mais il l'a rattachée à la durée de l'année sidérale qui est indépendante de la précession. Dans une intention pareille nommons celle-ci S; et, puisqu'elle est invariable, prenons, d'après les déterminations modernes :

$$S = 365^j,2563835.$$

Puisque nous avons supposé A égal $365^j,2424$, il en résultera :

$$A = S - 0^j,0139835 ;$$

et, en chassant A de notre équation (9) avec cette valeur, on trouvera :

$$4267L = 345\,S - 6^j,4077095.$$

Selon Hipparque, pendant que la lune accomplit 4267 révolutions synodiques, le soleil décrit 345 révolutions sidérales complètes, moins $7^{\circ}\frac{1}{2}$ sexagésimaux. Ce dernier arc est précisément $\frac{1}{45}$ de la circonférence. Le temps que le soleil emploie à le décrire sera donc aussi $\frac{1}{45}$ de l'année sidérale, ou $7^{j},609\,508$. Ce résultat, comparé au nôtre, montre qu'Hipparque a dû attribuer à l'année sidérale une durée trop longue, puisqu'il a trouvé un nombre plus fort à soustraire de 345 S. C'est en effet ce qu'on déduit de ses énoncés mêmes. Car, suivant lui, ce nombre de circonférences sidérales $345 - \frac{1}{18}$, serait décrit par le soleil en $26007^{j}\frac{1}{24}$, comme les 4267 lunaisons. De là on tire par proportion :

$$S = 365^{j},25985868;$$

évaluation notablement trop forte, comme nous l'avions prévu.

130. Ces préliminaires faciliteront tout ce qui me reste à dire sur les périodes luni-solaires des Grecs. Mais avant d'y arriver, je dois indiquer encore un mode de supputation chronologique dont ils ont fait usage bien antérieurement à ces périodes, et qu'ils y ont depuis constamment rattaché. Ce sont les *Olympiades*. Quoique leurs intervalles soient trop larges pour fournir des éléments de dates astronomiques, les historiens y ont rapporté un si grand nombre de faits et d'événements mémorables, qu'il serait fort à regretter pour un astronome de n'en avoir pas une notion précise, même dans l'intérêt de ses spéculations, comme établissant déjà des limites de dates qu'il pourrait avoir intérêt à resserrer.

CHAPITRE IX.

Olympiades.

ÈRE : ANNEE DE LA PÉRIODE JULIENNE 3938, DE L'ÈRE CHRÉTIENNE — 776, 1er JUILLET, SOLSTICE D'ÉTÉ.

131. Les olympiades étaient intentionnellement composées de quatre années solaires vraies, commençant et finissant au solstice d'été, dont le retour dut être pendant bien longtemps estimé, plutôt que fixé, par des approximations très-larges. Cette période, commune à toute la Grèce, a principalement été usitée, pendant beaucoup de siècles, pour enregistrer des dates historiques. Après chaque olympiade révolue, c'est-à-dire au commencement de chaque cinquième année solsticiale, les Grecs se réunissaient en assemblée générale près de la ville d'Olympie, dans le Péloponèse, pour célébrer des jeux solennels, qui acquirent une immense célébrité. De là le nom d'olympiade, donné à cette période. Elle est aussi appelée fréquemment période d'Iphitus, du nom d'un souverain de l'Élide, qui institua ou rétablit les jeux dont elle marquait le retour. Comme elle n'a été en usage que pour la numération historique des années, celles

qui la composent peuvent, dans les limites d'une telle application, s'assimiler à des années juliennes de $365^{j},25$. D'après cela, soit m le rang ordinal d'une olympiade quelconque, n celui d'une des quatre années qui la composent; l'année courante de la période julienne, qui contient le commencement de celle-ci, sera :

$$3938 + 4(m - 1) + n - 1 \text{ ; ou, par réduction : } 3937 + 4(m - 1) + n.$$

Ce commencement étant toujours placé au solstice d'été, si l'on veut avoir précisément sa date physique, il faudra calculer astronomiquement la date de ce phénomène, dans l'année julienne que le calcul précédent désigne : les tables de M. Largeteau suffiront, de reste, pour ce but. Mais on ne saurait prendre cette concordance à la rigueur; parce que, dès que les Grecs eurent appris à mesurer à peu près le temps par des années lunaires intercalées, les jeux olympiques furent réglés sur les retours de la nouvelle lune la plus proche du solstice d'été, plutôt que sur ce solstice même. Aussi Censorin, quand il définit l'année olympique, en place seulement les limites terminales dans les jours d'été, *diebus æstivis*, sans y mettre la rigueur qu'il apporte habituellement à ses autres désignations, quand elles en sont susceptibles.

132. Parmi les nombreuses concordances de dates, devenues aujourd'hui très-précieuses, que cet auteur a rassemblées dans une dissertation astrologique intitulée *de Die natali*, on en trouve deux qui, en confirmant ce que je viens de dire, définissent fort exactement, par leur réunion, l'époque absolue où il a composé son ouvrage. Au chapitre XXI, il dit d'abord que l'année dans laquelle il écrit est la 265^{e} des Augustes,

comptées à la manière des Romains; mais qu'elle est la 267^{e} de pareille dénomination, si on les compte à la manière des Égyptiens. Ce rapprochement montre que le dernier nombre exprime des années mixtes, comptées de l'ère actiaque, dont les 5 premières sont vagues, ainsi que je l'ai expliqué page 316. Retranchant ces 5, le reste 262 marque des années alexandrines fixes comptées de leur ère propre. Ajoutant donc à ce reste 4688, pour ramener l'indication à la période julienne, selon la règle établie page 311, on obtient les concordances suivantes :

Commencement de la 262^{e} année alexandrine fixe : de la période julienne 4950, 29 août... fin : 4951, 29 août.

La dissertation de Censorin a donc été écrite entre ces deux dates de jours juliens. Mais, quelques lignes plus loin, il ajoute qu'à ce même instant on compte la 986^{e} année de Nabonassar. Or, pour celles-ci, notre tableau de la page 280 nous donne :

Commencement de la 986^{e} année de Nabonassar : de la période julienne 4951, 25 juin... fin : 4952, 25 juin.

Cette seconde indication resserre les limites fournies par la précédente. Leur simultanéité exige que la dissertation ait été écrite dans l'année de la période julienne 4951, *après* le 25 juin, et *avant* le 29 août de cette même année.

Censorin dit encore, qu'à l'époque qu'il a ainsi définie, on compte la 1014^{e} année des olympiades, qui venait de commencer, aux *jours d'été;* par quoi il veut sans doute indiquer le solstice. Cela fixe l'ère des olympiades, et nous la désigne. En effet, selon les tables de M. Largeteau, le solstice d'été avait eu lieu dans l'année 4951 le 23 juin julien, deux

jours seulement avant le 25, première limite des dates ci-dessus fixées. De sorte que, selon le compte de Censorin, les années d'olympiades *révolues* devaient être alors au nombre de 1013. Retranchant donc 1013 de 4951, le reste 3938 marquera le rang ordinal de la 1re année des olympiades dans la période julienne. C'est exactement celui que nous avons assigné plus haut à leur ère. Petau a établi que plusieurs éclipses mentionnées par les historiens, et rapportées par eux à des années d'olympiades, confirment pleinement cette déduction.

CHAPITRE X.

Périodes luni-solaires des Grecs.

133. Le petit nombre d'indications précises qui nous sont parvenues sur le calendrier luni-solaire des Grecs, nous viennent de Geminus, écrivain grec quelque peu ultérieur à Hipparque, et que l'on croit, avec vraisemblance, avoir vécu du temps de Sylla. On les trouve dans son ouvrage intitulé *Introduction aux phénomènes célestes*, chapitre *des mois*. J'en extrairai les particularités que l'on peut le plus sûrement en conclure, et qui sont essentielles à connaître pour l'intelligence des textes astronomiques.

134. Le but constant des Grecs, celui que leur prescrivaient leurs usages civils et religieux, a été de régler les années sur les révolutions du soleil, les mois sur celles de la lune. Non pas, comme l'ont fait les Chinois, en fractionnant les durées totales de ces phénomènes par des divisions abstraites, fondées sur la mesure mécanique du temps; mais, ce qui était bien plus difficile, en combinant leurs rapports naturels de manière que les cérémonies et les sacrifices, attachés à certains mois, tombassent toujours dans les mêmes saisons solaires, et aux mêmes quantièmes de jours lunaires vrais. Dans

cette intention, ils firent d'abord les mois de 30 jours, et les années de 12 mois, en y ajoutant par intervalles quelques jours, ou même un mois supplémentaire, quand ils en sentaient la nécessité. Mais ils ne tardèrent pas à s'apercevoir que, même avec cet artifice, ils ne pouvaient pas maintenir les deux astres en concordance durable. Ils reconnurent d'ailleurs que la période des révolutions lunaires était moindre que 30 jours, et plus longue que 29 ; ils la firent donc, en moyenne, de $29^{j}\frac{1}{2}$. Alors 12 mois lunaires embrassaient, en somme, 354 jours; tandis que l'année solaire leur paraissait être de $365^{j}\frac{1}{4}$, ce qui lui donnait $11^{j}\frac{1}{4}$ d'excès relatif. Ils se contentèrent, pendant longtemps, de rapprocher ces deux périodes par duplication, en ajoutant, au besoin, les jours qui manquaient pour les égaler. Mais, n'y pouvant réussir que trop imparfaitement, ils eurent recours, vers l'an 500 avant notre ère, à une période plus longue que l'on appela l'*octaétéride*, dont Geminus nous explique la conception, comme il suit.

L'octaétéride.

135. On chercha le moindre nombre qui, multipliant $11^{j}\frac{1}{4}$, donnât, pour produit, un nombre entier de jours décomposable en mois complets. On trouva pour ce multiplicateur 8, qui, en effet, donne le produit 90, partageable en 3 mois de 30 jours chacun. Ceux-ci, ajoutés à 8 années lunaires, chacune de 354^{j}, forment une somme de 2922^{j}, égale à 8 années solaires de $365^{j}\frac{1}{4}$. On admit donc cette période, avec l'espérance qu'elle opérerait raccordement parfait. Mais, au lieu d'y appliquer les trois mois additionnels consécutivement,

comme correction terminale, on les répartit sur diverses portions de son cours, de la manière qui parut la plus favorable pour retenir, aussi approximativement que possible, les années lunaires successives, en concordance continue avec les phases solaires qu'on voulait leur faire accompagner. A cet effet, nous dit Geminus, on y *intercala* les mois additionnels appelés *embolimes,* ἐμβόλιμοι, en appliquant un d'eux à la 3e année, un autre à la 5e, le dernier à la 8e. Malheureusement il n'indique pas à quelles places on les y inséra; mais on l'infère d'un autre document que je mentionnerai tout à l'heure. Geminus ajoute seulement que le mois lunaire moyen étant supposé alors de $29\frac{1}{2}$, ce qui donne, pour deux, 59 jours complets, on les fit, dans l'application, alternativement *caves* et *pleins*, c'est-à-dire de 29 jours et de 30. De cet énoncé, on pourrait conclure que les mois caves précédaient les pleins; mais, quelques lignes plus bas, il les énonce dans un ordre inverse, mentionnant les pleins d'abord. Il paraîtrait donc que Geminus n'attachait pas d'importance à cette spécification, ou peut-être n'avait-il pas lui-même les moyens de l'établir avec certitude; car, à l'époque où il écrivait, l'octaétéride primitive était depuis longtemps hors d'usage. Au reste, dans les périodes plus étendues qui la remplacèrent, le mois qui commençait l'année lunaire dut être, par leur constitution même, quelquefois cave, et quelquefois plein.

136. Pour reconstruire, d'après ces données, le type d'une octaétéride, et en voir l'application au ciel, il faut l'établir sur la série des mois grecs, pris dans leur ordre usuel de succession. Malheureusement, cet ordre n'est rapporté continûment dans aucun ouvrage ancien, probablement parce

qu'il était connu de tout le monde. Mais on le trouve mentionné, par fragments, dans les écrits des historiens, des naturalistes, ou dans les harangues des orateurs; et, en rapprochant ces indices, on a pu rétablir, presque sans incertitude, la série entière des mois propres à l'Attique, dont l'usage a été comme classique dans toute la Grèce. Quant au choix du mois qui commençait l'année, on a lieu de présumer qu'il n'a pas été invariable, même dans cette spécialité d'application. Toutefois, depuis que l'organisation du calendrier athénien acheva de se régulariser, ce qui est aussi l'état dans lequel nous pouvons avoir quelque intérêt à le reproduire, le commencement de l'année paraît être demeuré attaché au mois qu'on appelait Hæcatombéon, dont le 1^er^ jour devait être toujours maintenu le plus près possible du solstice d'été. Les autres mois attiques se rangeaient après lui, par ordre, sous les dénominations suivantes, parmi lesquelles la IV^e^ et la V^e^ laissent seules quelques doutes sur leur rang d'application relatif.

1	Hæcatombéon.	7	Gamélion.
2	Métagitnion.	8	Anthestérion.
3	Boëdromion.	9	Élaphébolion.
4	Maimactérion ou Pyanepsion?	10	Munichion.
5	Pyanepsion ou Maimactérion?	11	Thargélion.
6	Posidéon.	12	Skirophorion.

137. Dans les années auxquelles on ajoutait un mois supplémentaire, on le plaçait à la suite du mois Posidéon, qui pre-

RANG ORDINAL	NOMBRE	LEUR DUREE EN JOURS	DISTRIBUTION DES MOIS DE CHAQUE ANNEE LUNAIRE, AVEC L'INDICATION DE LEUR DURÉE INDIVIDUELLE EN JOURS												EXCES ANNUEL DE CHAQUE ANNÉE LUNAIRE sur l'année solaire de même rang, celle-ci étant supposée de $365\frac{1}{4}$
			I	II	III	IV	V	VI	VI'	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1	12	$354\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29	$-11,25$
2	12	$354\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29	22,50
3	13	$383\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	$+3,75$
4	12	$354\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29	$-15,00$
5	13	$383\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	$+3,75$
6	12	$354\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29	$-7,50$
7	12	$354\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29	$-18,75$
8	13	$383\frac{1}{4}$	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	0,00
Somme des jours		égale au nombre contenu dans 8 années solaires de $365\frac{1}{4}$														

Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXII, p. 411

nait alors la dénomination de Posidéon I^er^ ; et le mois intercalé, ou *embolime,* était appelé Posidéon II^e^. Cet usage paraît avoir subsisté dans tous les temps. Car d'abord, au livre IV de l'Almageste, chap. X, p. 275 (éd. de Halma), Ptolémée mentionne une éclipse de lune observée à Athènes dans le mois Posidéon, sans spécification de rang ordinal ; et, quelques paragraphes plus loin (page 278), il en mentionne une autre, observée dans le mois Posidéon I^er^. L'indication du rang ordinal montre évidemment que celle-ci tombait dans une année intercalaire, où il y avait deux mois Posidéon, qu'il fallait distinguer l'un de l'autre; ce qui marque la place du mois embolime à la suite du Posidéon ordinaire. Or, d'après leurs dates égyptiennes, ces éclipses appartiennent respectivement aux années de la période julienne 4331 et 4332, ou — 383 et — 382 de notre ère, dates chronologiques ; ce qui prouve déjà la réalité de l'usage pour les temps anciens. Quant à sa persistance ultérieure, elle est constatée par une inscription grecque du temps des empereurs, où l'on voit les deux Posidéons mentionnés à la suite l'un de l'autre, comme I^er^ et II^e^. Nous découvrirons tout à l'heure une raison très-plausible de cette place donnée au mois embolime au milieu de l'année.

137. Pour rassembler ces résultats sous un même point de vue, je les emploie à former le tableau d'une octaétéride complète, sinon assurément telle qu'elle dut être, du moins telle que nous pouvons aujourd'hui nous la figurer. J'y suppose le premier mois plein, parce que, dans les idées grecques, 30 jours formaient la durée naturelle du mois ; de sorte que la suppression d'un jour étant un correctif, semble n'avoir pas dû se présenter d'abord. Aussi la même règle initiale

se remarque-t-elle dans les périodes plus parfaites qui succédèrent à l'octaétéride. D'ailleurs, cela n'influera en rien sur les conséquences que je veux ici établir. Dans le type que je présente, les mois sont désignés par leur rang ordinal, en commençant par Hæcatombéon; et le mois embolime y est signalé par la lettre *e*, mise en exposant du nombre VI. J'applique le même indice de distinction aux années de 13 lunes. La dernière colonne de nombres, que j'ai placée à la droite du tableau, a une destination que j'expliquerai dans un moment.

138. Pour apprécier le mérite de cette combinaison, et se représenter les avantages qu'en en pouvait attendre, il faut se placer dans les hypothèses d'évaluation d'après lesquelles on l'a formée; c'est-à-dire admettre comme des faits réels, que l'année solaire contient exactement $365^{j}\frac{1}{4}$, et chaque lunaison moyenne $29^{j}\frac{1}{2}$.

Raisonnant donc d'après ces données, plaçons l'origine de la période à un solstice d'été, en sorte que le 1^er^ jour du mois Hæcatombéon, le premier des douze, coïncide alors exactement avec cette phase solaire. La première année de la période, n'ayant que 354 jours, est plus courte qu'une année solaire de $11^{j},25$. Ainsi, quand elle sera révolue, le 1^er^ jour d'Hæcatombéon, de la deuxième année lunaire, se trouvera antérieur au solstice, de cette quantité. A la fin de cette deuxième, l'écart sera encore de même sens, et aura pris une amplitude double : ce qui le portera à $22^{j},5$, dont le 1^er^ Hæcatombéon de la troisième année lunaire précédera le solstice d'été. Mais l'insertion du mois embolime, dans le cours de celle-ci, affaiblira l'écart pour l'année suivante, et le restreindra à $3^{j},75$. En continuant de procéder ainsi, on

trouvera la grandeur et le signe de cet écart final pour les autres années de la période, comme je l'ai marqué dans la dernière colonne; et on l'obtiendra nul pour la fin de la 8^{e} année de la période, conformément aux principes de calcul qui en ont dirigé la construction.

Il était facile de voir qu'on aurait pu rendre ces écarts moindres, en arrêtant leur accroissement par une intercalation plus prompte; ce que l'on aurait obtenu en insérant les mois embolimes à la 2^{e}, 5^{e} et 7^{e} année. Alors, le plus grand retard final n'aurait été que de 15 jours, portant de même sur la 4^{e} année. On doit donc présumer qu'il a existé des motifs de ne pas préférer un arrangement qui s'offrait avec tant d'évidence. Quelle que soit leur nature, ils paraissent avoir été décisifs. Car, non-seulement Geminus assigne aux années embolimes de l'octaétéride, le rang que nous leur avons donné ici, mais il le présente expressément comme une condition à laquelle se sont astreints tous les astronomes qui ont postérieurement réformé ou étendu l'octaétéride primitive, affirmant qu'ils n'ont rien changé à l'ordre de répartition des années embolimes adopté avant eux.

139. A ces anciennes époques, les phases solsticiales devaient être sans doute très-grossièrement appréciées. Que le 1er jour d'Hécatombéon oscillât autour du solstice d'été jusqu'à une distance de 15^{j} ou de 22^{j}, la différence pouvait sembler peu importante. L'essentiel était qu'il ne s'en éloignât pas indéfiniment, et qu'il y revînt par des intermittences assez fréquentes; ce qui était assuré par la constitution de la période, et par sa brièveté. Considérant donc ces écarts comme insensibles ou comme tolérables, une fois le commencement d'Hécatombéon retenu près du solstice d'été, les trois

autres phases cardinales de l'année se trouvaient aussi amenées, dans des amplitudes d'écart pareilles, vers les commencements des trimestres consécutifs, à des intervalles d'environ 90 jours, les petites inégalités de leurs distances mutuelles ne pouvant pas sans doute être appréciées alors. Ainsi, l'équinoxe automnal devait osciller autour du 1er jour du IVe mois, soit qu'on l'appelât Pyanepsion ou Maimactérion; le solstice d'hiver autour du 1er Gamélion; et l'équinoxe vernal autour du 1er Munichion. Toutes les indications des textes s'accordent en effet pour rapporter les deux dernières phases à ces places respectives, aussi incontestablement que le solstice d'été au 1er Hæcatombéon. Mais quant à la place de l'équinoxe automnal, les désignations qu'ils en donnent sont plus rares et moins précises; cette phase de l'année étant peut-être marquée par des caractères physiques moins distincts que les trois autres, dans les pays méridionaux. De là vient l'incertitude où l'on est sur le rang d'application des noms attribués au IVe et au Ve mois; et il n'est pas sans vraisemblance que l'ordre dans lequel on les employait, a pu être divers, à différentes époques ou en différents lieux.

140. La place assignée au mois additionnel, après le sixième mois régulier, peut très-bien avoir eu pour but spécial, de maintenir proche du solstice d'hiver le 1er jour du mois Gamélion, qui marquait le milieu de chaque année lunaire. En effet, la durée de l'année solaire étant supposée de $365^j \frac{1}{4}$, sa moitié est $182^j \frac{5}{8}$; et comme six mois de 30^j ou de 29^j, alternés, ne font que 177^j, elle les surpasse de $5^j \frac{5}{8}$. Donc, à la troisième année de l'octaétéride, où le 1er Hæcatombéon précédait le solstice d'été de $22^j \frac{1}{2}$, le 1er Gamélion aurait précédé le solstice d'hiver de $22^j \frac{1}{2} + 5^j \frac{5}{8}$, ou $28^j \frac{1}{8}$, si

l'on n'avait pas interposé un mois additionnel de 30 jours, avant qu'il arrivât. Mais, par cette addition, il se trouvait reporté près de la phase solaire, à laquelle on désirait le faire correspondre. Le même motif reparaît, avec la même force, dans les années 5 et 8.

141. Les concordances ainsi établies remplissaient donc très-bien les conditions prescrites, pourvu qu'elles dussent se maintenir. Or, en admettant que la durée d'une lunaison moyenne fût réellement de $29^j\frac{1}{2}$, les trois mois de 30 jours intercalés dans l'octaétéride y introduisaient, en somme, $1^j\frac{1}{2}$ de plus que n'en auraient dû embrasser les 99 lunaisons qui la composaient; et ainsi elle aurait dû se trouver trop longue, de cette quantité, *pour la lune*. Ce fut le contraire qui arriva, et l'écart en ce sens fut même fort rapide. Dix octaétérides seulement étant écoulées, la lune se trouvait en retard sur le calcul d'environ 15 jours. Ainsi, elle était à son dernier quartier quand elle aurait dû avoir dépassé la conjonction, et atteint la quadrature suivante, si la lunaison moyenne eût été de $29^j\frac{1}{2}$. Cela fit juger qu'il fallait augmenter cette première évaluation, de manière qu'elle donnât 30 jours de plus, après 990 lunaisons; ce qui faisait pour chacune $\frac{1}{33}$ de jour. On fut ainsi conduit à la supposer de $29^j\frac{1}{2}\frac{1}{33}$, comme l'admet Geminus. Les 99 lunaisons de l'octaétéride, ainsi corrigées, embrassaient donc autant de fois ce nombre; c'est-à-dire $2923^j,5$, au lieu de 2322, qu'embrassent les 8 années solaires de $365^j\frac{1}{4}$, auxquelles on les égalait; ce qui les faisait, en somme, plus longues que ces huit, de $1^j,5$. Mais, en réalité, la véritable valeur de leur excès était encore plus grande que cette nouvelle appréciation ne l'indiquait. Car, si l'on réduit en décimales les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{33}$, la

durée de la lunaison qui en résulte est $29^{j},530303$, au lieu de $29^{j},530594$ qui est l'évaluation de Ptolémée; et 99 de celles-ci font en somme $2923^{j},5288$, ce qui surpasse de $0^{j},0288$ le nombre $2923^{j},5$ donné par l'évaluation de Geminus. Mais de si petites quantités n'étaient pas perceptibles, sur de si courts intervalles de temps. Les astronomes admirent l'excès de l'octaétéride lunaire sur 8 années solaires, comme précisément égal à $1^{j},5$; et ils firent une foule de tentatives plus ou moins heureuses pour compenser cette différence par des intercalations intermittentes de jours, ou même de mois, diversement espacés. Mais ces raccordements, toujours tardifs, n'arrivaient qu'à la suite de discordances intolérables. Méton réussit beaucoup mieux en introduisant la période de 235 lunaisons égales à 19 années solaires. Car, par cette innovation heureuse, il obtint un accord bien plus prompt, et fort exact, en s'écartant le moins possible des usages admis. Nous commençons ici à trouver chez les Grecs l'astronomie de mesures; et elle nous fournit les moyens de fixer l'époque absolue à laquelle cette importante amélioration s'opéra.

CHAPITRE XI.

Cycle luni-solaire de Méton.

ÈRE DU CYCLE SOLAIRE : ANNÉE DE LA PÉRIODE JULIENNE 4282, DE L'ÈRE CHRÉTIENNE — 432, 28 JUIN, JOUR 179^{e}, SOLSTICE D'ÉTÉ, VERS ONZE HEURES ET DEMIE DU MATIN AU MÉRIDIEN D'ATHÈNES, EN FAISANT COMMENCER LE JOUR JULIEN A MINUIT.

ÈRE DU CYCLE LUNAIRE : MÊME ANNÉE, LE 15 JUILLET, JOUR 196^{e}, AU COUCHER DU SOLEIL QUI A SUIVI LA NÉOMÉNIE MATHÉMATIQUE, IMMÉDIATEMENT POSTÉRIEURE AU SOLSTICE D'ÉTÉ, LAQUELLE EUT LIEU CE MÊME JOUR, 15 JUILLET AU SOIR.

Concordance initiale entre les dates juliennes et les dates attiques prises dans les cycles lunaires de Méton.

Année de la période julienne 4282, 16 juillet, jour 197^{e} à minuit ou 0^{h} = cycle 1, année lunaire 1, jour 1er, à minuit au méridien d'Athènes.

Nota. Le jour civil attique commence au coucher du soleil.

142. La distinction des deux ères que je rapporte ici a été très-judicieusement établie par Ideler. Je dois d'abord expliquer ce qui la nécessite, et sur quels documents elle repose.

Une foule de textes anciens rappellent et attestent que Méton avait construit un calendrier populaire, embras-

sant une période de 19 ans, dans lequel il annonçait, en relation avec les équinoxes, les solstices, et les autres phases du mouvement du soleil, l'ensemble des phénomènes astronomiques qui pouvaient servir de régulateurs à la navigation, à l'agriculture, à l'hygiène, et même à l'astrologie. Ces annonces, pour devenir d'une utilité pratique et générale, ne devaient pas être rapportées aux mois lunaires, à cause de leur variabilité dans les saisons, et de la diversité des dénominations qu'on leur appliquait en différentes parties de la Grèce. Aussi les voyons-nous de même uniquement rapportées au mouvement du soleil dans deux compositions de ce genre, qui nous ont été transmises, l'une par Géminus, l'autre par Ptolémée. Depuis l'exemple donné par Méton, la publication de ces calendriers devint commune et générale. On les appelait en grec, au nombre singulier, Παράπηγμα, en français *Parapegme*. Ce mot composé désigne un objet suspendu en vue de tout le monde; et, en effet, on les exposait ainsi dans les lieux publics.

D'une autre part, il n'est pas moins attesté que Méton rectifia, et fixa pour longtemps les oscillations du calendrier luni-solaire des Grecs, en y introduisant la période de 235 lunaisons comprises dans 19 années solaires. Afin que cette amélioration fût acceptable, il fallait que le nouveau cycle lunaire prît son origine au commencement d'une des années lunaires déjà établies, et qu'il servît à continuer ultérieurement leur cours dans une concordance plus exacte, surtout plus durable avec le ciel, en troublant le moins possible les usages reçus.

143. Je vais d'abord montrer que ces deux ordres distincts de conditions purent être simultanément remplis par Mé-

ton dans l'année de la période julienne 4282, aux deux époques absolues que j'y ai désignées. J'admettrai ensuite qu'elles le furent effectivement à ces époques mêmes, et je montrerai que les conséquences numériques de cette hypothèse s'accordent fort exactement avec le très-petit nombre de documents anciens par lesquels on peut l'éprouver. Pour cela, j'aurai presque uniquement à suivre un travail spécial d'Ideler, dans lequel tous les matériaux déjà réunis par les plus savants chronologistes, Scaliger, Petau, Dodwell, sont discutés, complétés, mis en œuvre, avec une précision et une justesse critique qui en font sortir tout ce qu'ils peuvent donner de résultats probables ou certains.

144. Ce fut dans l'année de la période julienne 4282, sous l'archontat d'Apseude, que Méton et Euctémon firent à Athènes l'observation du solstice d'été qui est devenue si célèbre dans l'histoire de l'astronomie. Mais ils le fixèrent au matin du 27 juin, c'est-à-dire un peu plus de 1 jour avant l'époque absolue que je lui ai assignée ici, d'après les tables abrégées de M. Largeteau. Ce transport de leur résultat dans notre calendrier julien se conclut de la date égyptienne que Ptolémée applique à la détermination des deux astronomes grecs, à laquelle il annexe le nom de l'archonte qui était en fonction alors. D'après les mêmes tables, la conjonction vraie de la lune et du soleil qui fut immédiatement postérieure à ce solstice d'été, s'opéra le 15 juillet suivant, à $18^h\ 40^m$ de temps moyen au méridien d'Athènes, le jour julien étant supposé commencer à minuit. La néoménie mathématique eut lieu ainsi, pour Athènes, au soir de ce jour. Méton a pu en connaître l'époque d'avance, presque sans erreur, en la déduisant d'une éclipse de lune arrivée quel-

ques mois auparavant, et qui avait été visible sur l'horizon d'Athènes.

145. Au livre XII de sa grande composition, intitulée *Bibliothèque historique*, Diodore rapporte que Méton commença son ennéadécaétéride, ou cycle de 19 ans, dans la 4e année de la 86e olympiade, au 13e jour du mois Skirophorion (le dernier des mois attiques), Apseude étant archonte d'Athènes. D'après ce qui a été établi plus haut, page 404, l'année olympique ici désignée a commencé au solstice d'été de l'année de la période julienne 3937 + 340 + 4 ou 4281; et elle a fini au solstice d'été suivant, appartenant à l'année julienne 4282, la même à laquelle nous conduit la date donnée par Ptolémée. Cette concordance, jointe à la désignation commune de l'archonte Apseude, nous découvre, avec une grande vraisemblance, que le cycle dont Diodore parle, a dû avoir pour époque initiale le solstice même observé par Méton, et mentionné par Ptolémée. Mais est-ce le cycle solaire ou le lunaire que Diodore a voulu désigner? Ideler admet que c'est le cycle solaire; et cela me semble complétement justifié par les détails qui accompagnent l'assertion de l'auteur grec. Alors, ce cycle ayant dû partir d'un solstice, du solstice observé, il faudra que le 13 Skirophorion civil, mentionné par Diodore, se soit trouvé occasionnellement solsticial, et qu'il ait commencé le soir de notre 28 juin, ou le soir du 27, selon que Méton en jugeait. Admettons pour un moment que ce dernier mois de l'année attique courante n'eût que 29 jours. Dans cette supposition, depuis le commencement de son 13e jour, il restait 17 jours complets à parcourir pour arriver au commencement du 1er Hæcatombéon, où l'année lunaire attique se renouvelait. Ces 17 jours, comptés de-

puis le soir du 27 juin, conduisent au soir du 14 juillet, veille de la néoménie mathématique; et ils la rejoindraient exactement, si l'on supposait que le mois Skirophorion désigné par Diodore aurait eu 30 jours au lieu de 29. Le calendrier lunaire attique se trouvait donc tout au plus en avance de 1 jour sur le ciel. Méton n'avait ainsi qu'à déplacer le 1^er^ Hæcatombéon de cette quantité presque inappréciable, pour fixer l'origine de son cycle lunaire à cette néoménie même, telle que le calcul la lui donnait; et cet arrangement avait l'avantage de rétablir exactement la concordance astronomique, sans déroger sensiblement aux usages reçus.

146. Admettant donc, avec Ideler, que Méton a fait commencer son cycle lunaire au 1^er^ Hæcatombéon concordant avec le soir de notre 15 juillet, nous aurons d'abord à chercher comment il y a réparti les années communes de 12 lunaisons, et celles de 13, que j'appellerai, pour abréger, *embolimes*. Il faudra déterminer ensuite comment il y a distribué les mois pleins et les mois caves, que l'on faisait toujours respectivement de 30 jours et de 29, en nombres ronds. Ces deux choses sont indiquées par Géminus, malheureusement avec des explications moins développées qu'il ne les faudrait aujourd'hui, pour nous.

Sur la première, cet auteur, après avoir spécifié très-précisément la distribution des années embolimes dans l'octaétéride, telle que je l'ai rapportée, se borne à dire que les astronomes ont maintenu ce même ordre dans les périodes de 19 ans et de 76, qu'ils lui ont progressivement substituées. Rien de plus naturel que cette persistance dans un usage si anciennement établi; et le peu de peine que Géminus se donne pour l'attester, montre qu'il en jugeait ainsi lui-même.

La manière la plus stricte, quoique non pas la seule, par laquelle on puisse remplir cette condition, consiste évidemment à distribuer les années embolimes, dans le nouveau cycle, comme elles l'auraient été dans une suite d'octaétérides embrassant un nombre pareil d'années; sauf à vérifier ensuite si les résultats d'une telle répartition se concilient avec les documents historiques ou astronomiques sur lesquels on pourra les éprouver. Ce procédé d'assimilation nous marque tout de suite où devront être placées les années embolimes, dans le cycle lunaire de 19 ans. Car, pour les y voir, il suffit de jeter les yeux sur les deux lignes suivantes :

Suite d'octaétérides.	1	2	3^{e}	4	5^{e}	6	7	8^{e}	1	2	3^{e}	4	5^{e}	6	7	8^{e}	1	2	3^{e}
Cycle lunaire de 19 ans.	1	2	3^{e}	4	5^{e}	6	7	8^{e}	9	10	11^{e}	12	13^{e}	14	15	16^{e}	17	18	19^{e}

La première ligne présente une suite de 19 années lunaires, tant communes qu'embolimes, distribuées exactement comme elles l'étaient dans des octaétérides consécutives. Les embolimes y sont marquées par la lettre *e*, mise en exposant. La deuxième ligne montre cette même série de 19 années, rangées dans un ordre de numération continu, avec leurs embolimes marquées aux places qui se correspondent. Ce mode de distribution réalise ainsi matériellement, sans aucun effort, le texte de Géminus. C'est celui que Dodwell a le premier imaginé, et qui a été adopté par Ideler. On va voir qu'il s'accorde très-bien avec le petit nombre de documents auxquels on peut le comparer. Petau en avait choisi un autre dont il n'explique pas les motifs, et qui n'a point cet avantage. Toutefois, il ne diffère de celui de Dodwell et d'Ideler que par l'origine; et il s'y raccorde en la reportant de cinq rangs vers la droite, comme le montrent les deux lignes suivantes,

où les années embolimes sont désignées par des indices pareils :

Dodwell et Ideler. 1 2 3^{e} 4 5^{e} 6 7 8^{e} 9 10 11^{e} 12 13^{e} 14 15 16^{e} 17 18 19^{e} | 1 2 3^{e} 4 5^{e}... etc.
Petau..... 1 2 3^{e} 4 5 6^{e} 7 8^{e} 9 10 11^{e} 12 13 14^{e} 15 16 17^{e} 18 19^{e}... etc.

La marche de l'intercalation est donc, au fond, la même dans les deux suites; seulement, elle y commence à un terme différent de son cours général. Je me borne ici à constater ce fait, qui trouvera ultérieurement son application.

147. J'arrive à la deuxième question, concernant le mode de distribution des mois pleins et caves, dans chacune des 19 années du cycle. Le nombre total de ces mois est 235, que Méton renfermait dans 6940 jours. Alors, en se conformant à l'usage de donner aux pleins 30 jours, aux caves 29, si l'on nomme x' le nombre de ceux-ci, x'' le nombre des autres, on aura, comme dans la page 397, ces deux équations à résoudre :

$$x' + x'' = 235 ; \qquad 29x' + 30x'' = 6940.$$

ce qui donne

$$x' = 110 ; \qquad x'' = 125.$$

On devra donc avoir 110 mois caves dans la période entière; il ne reste qu'à les répartir.

Pour cela, le procédé de calcul le plus exact et le plus simple aurait été celui que j'ai exposé dans la page 396, et que les Chinois ont employé. Seulement il aurait fallu l'appliquer à la durée de la lunaison moyenne $\frac{6940^{j}}{235}$, ou $29^{j}\frac{25}{47}$, que Méton supposait implicitement. Alors, au début, on aurait rencontré encore une série de lunes alternativement longues et brèves, qui, à cause de la différence des nombres employés, se serait

interrompue après la 14^{e}, les 15^{e} et 16^{e} étant toutes deux de 30 jours. Ensuite, ces alternatives auraient repris selon leurs lois propres, et tous les mois se seraient trouvés définis en durée, par la condition du minimum d'erreur. Mais la subtilité des astronomes grecs ne s'est pas tournée vers cette idée simple; ils en ont imaginé une autre moins exacte, qui est presque de caprice, et que Géminus nous décrit, non sans obscurité.

148. Dans les habitudes grecques, 30 jours étaient la durée naturelle d'un mois; 29 jours semblaient l'exception. A ce compte, les 235 de la période métonienne représentaient en principe 7050 jours, dont il fallait supprimer 110, pour les réduire à 6940. Or 7050, divisé par 110, donne au quotient 64 $\frac{1}{11}$. On pensa que l'on répartirait de la manière la plus convenable les 110 jours à soustraire, si l'on se réglait sur la partie entière de ce quotient 64, pour les espacer à d'égales distances. Ainsi, le premier supprimé parmi les 7050 eut pour rang ordinal 64; le 2^{e}, 2.64 ou 128; le 3^{e}, 3.64 ou 192; et enfin le 110^{e}, 110.64 ou 7040. Ces divers produits indiquent immédiatement les mois qui doivent être raccourcis. Car, en les considérant par ordre de formation, le premier 64 est plus grand que 60 et moindre que 90. Le premier des jours à retrancher tombera donc dans le 3^{e} mois de la période; de sorte que les deux premiers mois garderont leurs 30 jours, et le troisième devra être réduit à 29. Les soustractions suivantes se régleront de même, en cherchant les multiples de 30 qui comprennent chaque multiple de 64. Par exemple, le 110^{e} de ceux-ci étant 7040, il se trouve compris entre 234.30, qui est 7020, et 235.30, qui est 7050. Conséquemment, le 110^{e} jour à soustraire tombera dans le 235^{e} mois de 30

TABLEAU III CYCLE LUNI-SOLAIRE DE CALIPPE, RESTITUÉ CONFORMÉMENT AUX PRESCRIPTIONS DE GEMINUS.

RANG ORDINAL de chaque ANNÉE LUNAIRE	NOMBRE DE LUNAISONS de chaque ANNÉE	DURÉE TOTALE de chaque ANNÉE LUNAIRE en JOURS	DATE JULIENNE à laquelle chacune a commencé ou coïncidé DU MOIS	DISTRIBUTION DES MOIS DE CHAQUE ANNÉE AVEC LEUR DURÉE INDIVIDUELLE EN JOURS.												
				I	II	III	IV	V	VI	VI^{bis}	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1re	13	384	4384^{e} jour 179^{e} juin 28	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
2	12	355	4385^{e} 198 juillet 16	30	29	30	30	29	30	..	29	30	29	30	29	30
3	12	354	4386^{e} 187 juillet 6	29	30	29	30	29	30		29	30	30	29	30	29
4	13	384	4387^{e} 176 juin 25	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29
5	12	354	4388^{e} 195 juillet 14	30	29	30	29	30	29	.	30	29	30	29	30	29
6	12	355	4389^{e} . 184 juillet 2	30	29	30	30	29	30	.	29	30	29	30	29	30
7^{e}	13	384	4390^{e} 173 juin 22	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30
8	12	354	4391^{e} 192 juillet 11	29	30	29	30	29	30	.	29	30	29	30	30	29
9	12	354	4392^{e} 181 juin 30	30	29	30	29	30	29	.	30	29	30	29	30	29
10^{e}	13	384	4393^{e} . 170 juin 18	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
11	12	355	4394 . 188 juillet 7	30	29	30	29	30	30	.	29	30	29	30	29	30
12	12	354	4395^{e} 178 juin 27	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30
13^{e}	12	354	4396^{e} 197 juillet 16	29	30	29	30	29	30		29	30	29	30	29	30
14	12	354	4397^{e} 186 juillet 4	30	29	30	29	30	29	. .	30	29	30	29	30	29
15^{e}	13	384	4398^{e} 174 juin 23	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
16	12	355	4399 193 juillet 12	30	29	30	29	30	29		30	30	29	30	29	30
17^{e}	12	354	4400 183 juillet 2	29	30	29	30	29	30		29	30	29	30	30	29
18^{e}	13	384	4401^{e} 172 juin 20	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
19	12	354	4402^{e} 190 juillet 9	29	30	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29
20	13	384	4403^{e} 179 juin 28	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29
1	12	355	4404^{e} 198 juillet 17	30	29	30	29	30	29		30	29	30	30	29	30
22	12	354	4405^{e} 188 juillet 6	29	30	29	30	29	30		29	30	29	30	29	30
23^{e}	13	384	4406^{e} 176 juin 25	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
24	12	354	4407^{e} . 195 juillet 14	29	30	29	30	30	29	. .	30	29	30	29	30	29
25	12	355	4408^{e} 184 juillet 3	30	29	30	29	30	29	. .	30	30	29	30	29	30
26^{e}	13	384	4409^{e} 174 juin 22	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30
27	12	354	4410 192 juillet 11	29	30	29	30	29	30	.	29	30	29	30	29	30
28	12	354	4411 . 181 juin 30	30	30	29	30	29	30	29	. .	30	29	30	29	30
29^{e}	13	384	4412^{e} 170 juin 19	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29
30	12	355	4413^{e} . 189 juillet 7	30	29	30	29	30	29	.	30	29	30	30	29	30
31^{e}	13	383	4414 . . 178 juin 27	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
32	12	355	4415^{e} . . 196 juillet 15	30	30	29	30	29	30	. . .	29	30	29	30	29	30
33	12	354	4416^{e} . . . 186 juillet 5	29	30	29	30	30	29	. . .	30	29	30	29	30	29
34^{e}	13	384	4417^{e} . . . 175 juin 23	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29
35	12	355	4418^{e} . 193 juillet 12	30	29	30	29	30	29	..	30	29	30	29	30	30
36	12	354	4419^{e} . 183 juillet 2	29	30	29	30	29	30	.	29	30	29	30	29	30
37^{e}	13	384	4420^{e} . . 172 juin 21	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30
38	12	354	4421^{e} . 191 juillet 9	29	30	29	30	29	30	. . .	30	29	30	29	30	29
39^{e}	13	384	4422^{e} . 179 juin 28	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29
40^{e}	12	354	4423^{e} . 198 juillet 17	30	29	30	29	30	29	.	30	29	30	29	30	29
41	12	355	4424 187 juillet 6	30	30	29	30	29	30	..	29	30	29	30	29	30
42	13	384	4425^{e} . . . 177 juin 26	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30
43	12	354	4426^{e} . . . . 195 juillet 14	29	30	29	30	29	30	.	29	30	30	29	30	29
44	12	354	4427^{e} . . 184 juillet 3	30	29	30	29	30	29	. . .	30	29	30	29	30	29
45^{e}	13	384	4428^{e} . . . 173 juin 22	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
46	12	355	4429^{e} . . . . 192 juillet 10	30	29	30	30	29	30	..	29	30	29	30	29	30
47	12	354	4430^{e} . . 181 juin 30	29	30	29	30	29	30		29	30	30	29	30	29
48^{e}	13	384	4431^{e} . . 170 juin 19	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29
49	12	354	4432^{e} . . 189 juillet 8	30	29	30	29	30	29	.	30	29	30	29	30	29
50^{e}	13	384	4433^{e} . . 178 juin 26	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
51	12	355	4434^{e} . . . 196 juillet 15	30	29	30	29	30	30		29	30	29	30	29	30
52	12	354	4435^{e} . . . 186 juillet 5	29	30	29	30	29	30		29	30	29	30	30	29
53^{e}	13	384	4436^{e} . . 175 juin 24	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
54	12	354	4437^{e} . . . 194 juillet 12	30	29	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29
55	12	355	4438^{e} . . 182 juillet 1	30	29	30	30	30	30		29	30	29	30	29	30
56^{e}	13	384	4439^{e} . . . 172 juin 21	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30
57	12	354	4440^{e} . . 191 juillet 10	29	30	29	30	29	30	.	29	30	29	30	29	30
58^{e}	13	384	4441^{e} . . . 180 juin 28	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
59	12	354	4442^{e} . . 198 juillet 17	29	30	30	29	30	29		30	29	30	29	30	29
60	12	355	4443^{e} . . . . 187 juillet 6	30	29	30	29	30	29	..	30	30	29	30	29	30
61^{e}	13	384	4444^{e} . . . 177 juin 26	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
62	12	354	4445^{e} . . . 196 juillet 14	29	30	29	30	29	30	. . .	29	30	29	30	29	30
63	12	354	4446^{e} . . . . 184 juillet 3	29	30	30	29	30	29	. . .	30	29	30	29	30	29
64^{e}	13	384	4447^{e} . . . 173 juin 22	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29
65	12	355	4448^{e} . . . . 192 juillet 11	30	29	30	29	30	29	. .	30	29	30	30	29	30
66	12	354	4449^{e} . . . 182 juin 30	29	30	29	30	29	30	. . .	29	30	29	30	29	30
67^{e}	13	384	4450^{e} . . . . 170 juin 19	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
68	12	354	4451^{e} . . 189 juillet 8	29	30	29	30	30	29	. . . .	30	29	30	29	30	29
69^{e}	13	384	4452^{e} . . . 178 juin 27	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29
70	12	355	4453^{e} . . 197 juillet 15	30	29	30	29	30	29	.....	30	29	30	29	30	30
71	12	354	4454 . . 186 juillet 5	29	30	29	30	29	30	. . . .	29	30	29	30	29	30
72^{e}	13	384	4455^{e} . . . . 175 juin 24	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
73	12	354	4456^{e} . . . . 194 juillet 13	29	30	29	30	29	30	. .	30	29	30	29	30	29
74	12	355	4457^{e} . . . 183 juillet 1	30	29	30	29	30	29	. . .	30	29	30	30	29	30
75^{e}	13	383	4458^{e} . . . 172 juin 21	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
76	12	354	4459^{e} . . 190 juillet 9	30	30	29	30	29	30	.....	29	30	29	30	29	29
Somme des jours de la période.		27759														
77^{e}	13	384	4460^{e} . . . . 179 juin 28	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29

Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXII, en regard de la p. 117.

TABLEAU I. CANON DE MÉTON.

ANNÉES du CYCLE.	SOMMES des JOURS.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VI^{E}.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	355	30	30	29	30	29	30	—	29	30	29	30	29	30
2	354	29	30	29	30	30	29	—	30	29	30	29	30	29
3^{e}	384	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29
4	355	30	29	30	29	30	29	—	30	29	30	29	30	30
5^{e}	383	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29
6	355	30	29	30	30	29	30	—	29	30	29	30	29	30
7	354	29	30	29	30	29	30	—	30	29	30	29	30	29
8^{e}	384	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29
9	354	30	29	30	29	30	29	—	30	29	30	29	30	29
10	355	30	30	29	30	29	30	—	29	30	29	30	29	30
11^{e}	384	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30
12	354	29	30	29	30	29	30	—	29	30	30	29	30	29
13^{e}	384	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30
14	354	30	29	30	29	30	29	—	30	29	30	29	30	29
15	355	30	29	30	30	29	30	—	29	30	29	30	29	30
16^{e}	384	29	30	29	30	29	30	29	30	30	29	30	29	30
17	354	29	30	29	30	29	30	—	29	30	29	30	30	29
18	354	30	29	30	29	30	29	—	30	29	30	29	30	29
19^{e}	384	30	29	30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29

Tableau II

COMPARAISON DU CANON DE METON ET DU CALENDRIER JULIEN

PREMIER CYCLE

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	Ol. 87, 1	432	15 jul.
2		431	5 jul.
3		430	24 jun
4		429	13 jul
5		428	2 jul.
6	Ol. 88, 1	427	20 jul.
7	2	426	10 jul.
8	3	425[B]	28 jun.
9	4	424	17 jul.
10	Ol. 89, 1	423	6 jul.
11	2	422	26 jun
12	3	421	14 jul
13	4	420	3 jul
14	Ol. 90, 1	419	22 jul
15	2	418	11 jul
16	3	417	31 jun
17	4	416	19 jul
18	Ol. 91, 1	415	8 jul.
19	2	414	27 jun.

SECOND CYCLE

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	1	413	15 jul
2	Ol. 92, 1	412	5 jul.
3	2	411	24 jun
4	3	410	13 jul
5	4	409	2 jul
6	Ol. 93, 1	408	20 jul.
7	2	407	10 jul.
8	3	406	29 jun.
9	4	405[B]	17 jul.
10	Ol. 94, 1	404	6 jul.
11	2	403	26 jun.
12	3	402	15 jul
13	4	401	3 jul
14	Ol. 95, 1	400	22 jul
15	2	399	11 jul
16	3	398	1 jul
17	4	397	19 jul
18	Ol. 96, 1	396	8 jul
19	2	395	27 jun.

TROISIEME CYCLE.

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	3	394	16 jul
2	4	393[B]	5 jul.
3	Ol. 97, 1	392	24 jun.
4	2	391	13 jul
5	3	390	3 jul
6	4	389[B]	20 jul.
7	Ol. 98, 1	388	10 jul.
8	2	387	29 jun.
9	3	386	18 jul.
10	4	385[B]	6 jul.
11	Ol. 99, 1	384	26 jun.
12	2	383	15 jul.
13	3	382	4 jul
14	4	381[B]	22 jul.
15	Ol. 100, 1	380	11 jul
16	2	379	1 jul
17	3	378	20 jul
18	4	377[B]	8 jul
19	Ol. 101, 1	376	27 jun.

QUATRIEME CYCLE

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	2	375	16 jul
2	3	374	6 jul
3	4	373[B]	24 jun
4	Ol. 102, 1	372	13 jul
5	2	371	3 jul
6	3	370	21 jul
7	4	369[B]	10 jul
8	Ol. 103, 1	368	29 jun
9	2	367	18 jul
10	3	366	7 jul
11	4	365[B]	26 jun
12	Ol. 104, 1	364	15 jul.
13	2	363	4 jul.
14	3	362	23 jul
15	4	361	11 jul
16	Ol. 105, 1	360	1 jul
17	2	359	20 jul
18	3	358	9 jul.
19	4	357[B]	27 jun

CINQUIÈME CYCLE.

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	Ol. 106, 1	356	16 jul.
2	2	355	6 jul
3	3	354	25 jun
4	4	353	13 jul
5	Ol. 107, 1	352	3 jul
6	2	351	21 jul
7	3	350	11 jul
8	4	349	29 jun
9	Ol. 108, 1	348	18 jul
10	2	347	7 jul
11	3	346	27 jun
12	4	345	15 jul
13	Ol. 109, 1	344	4 jul
14	2	343	23 jul.
15	3	342	12 jul
16	4	341	1 jul
17	Ol. 110, 1	340	20 jul
18	2	339	9 jul
19	3	338	28 jun

SIXIÈME CYCLE.

ANNÉES DU CYCLE	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON.
1	4	337[B]	16 jul.
2	Ol. 111, 1	336	6 jul
3	2	335	25 jun
4	3	334	14 jul
5	4	333	3 jul
6	Ol. 112, 1	332	21 jul
7	2	331	11 jul
8	3	330	30 jun.
9	4	329[B]	18 jul
10	Ol. 113, 1	328	7 jul
11	2	327	27 jun
12	3	326	16 jul
13	4	325[B]	4 jul
14	Ol. 114, 1	324	23 jul.
15	2	323	12 jul
16	3	322	2 jul
17	4	321[B]	20 jul
18	Ol. 115, 1	320	9 jul
19	2	319	28 jun.

SEPTIÈME CYCLE.

ANNÉES DU CYCLE.	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBÆON.
1	3	318	17 jul.
2	4	317[B]	6 jul
3	Ol. 116, 1	316	25 jun
4	2	315	14 jul
5	3	314	4 jul
6	4	313[B]	21 jul
7	Ol. 117, 1	312	11 jul
8	2	311	30 jun.
9	3	310	19 jul.
10	4	309[B]	7 jul
11	Ol. 118, 1	308	27 jun.
12	2	307	16 jul
13	3	306	5 jul.
14	4	305[B]	23 jul.
15	Ol. 119, 1	304	12 jul.
16	2	303	2 jul
17	3	302	21 jul.
18	4	301[B]	9 jul.
19	Ol. 120, 1	300	28 jun.

HUITIÈME CYCLE

ANNÉES DU CYCLE.	ANNÉES OLYMP.	ANNÉES AVANT J. C.	1 HÉCATOMBEON
1	2	299	17 jul
2	3	298	7 jul
3	4	297[B]	25 jun
4	Ol. 121, 1	296	14 jul
5	2	295	4 jul
6	3	294	22 jul
7	4	293[I]	11 jul
8	Ol. 122, 1	292	30 jun.
9	2	291	19 jul
10	3	290	8 jul
11	4	289[B]	27 jun
12	Ol. 123, 1	288	16 jul
13	2	287	5 jul
14	3	286	24 jul.
15	4	285[B]	12 jul.
16	Ol. 124, 1	284	2 jul
17	2	283	21 jul.
18	3	282	10 jul.
19	4	281[B]	28 jun

jours, ce qui exige qu'on le réduise à 29. De sorte que la période entière des 235 lunaisons, commençant par un Hæcatombéon qui est plein, se terminera par un Skirophorion qui sera cave. Je joins ici, sous le n° I, le tableau complet des années et des mois d'un cycle lunaire métonien, construit par Ideler d'après ces principes, conformément au système d'intercalation de Dodwell, qu'il avait adopté.

149. La formation de la série des mois dans ce tableau peut être considérablement abrégée par la remarque suivante. D'après la règle générale posée plus haut, le 15^{e} jour à soustraire des 7050 a pour rang ordinal parmi eux 15.64 ou 30.32. Il tombe donc précisément à la fin de leur 32^{e} mois. Ainsi, pour trouver les places des suivants, il faut compter de nouveau par multiples de 64, en partant du 1er jour du 33^{e} mois, exactement comme on l'avait fait à l'origine de la série entière. D'après cela, quand on a une fois déterminé par la règle grecque le caractère plein ou cave des 32 premiers mois définitifs, tous les autres se succèdent par des périodes pareilles consécutivement réitérées; de sorte qu'on n'a plus qu'à les écrire, dans ce même ordre, à la suite les uns des autres, jusqu'à la fin. On peut constater ce caractère de périodicité sur notre tableau même, aux endroits que j'ai marqués par des barres verticales. Cela fait, on coupera la série totale par périodes consécutives de 12 ou de 13 termes, pour en composer progressivement les années, tant communes qu'embolimes, que renferme un cycle entier; et comme on a la date julienne du 1er jour de la 1re année, on en déduira les dates initiales des années suivantes, par l'addition successive du nombre de jours que l'année immédiatement précédente se trouve contenir. Je joins ici, sous le n° II, un tableau

qui présente par ordre les dates juliennes du 1^er^ jour du mois Hæcatombéon, ainsi obtenues par Ideler, pour chacune des années lunaires qui composent les huit premiers cycles métoniens. Cela dépasse de beaucoup l'étendue de temps pendant laquelle on pourrait présumer que ce cycle a été employé pour régler le calendrier d'Athènes. L'auteur y a joint l'indication des années d'olympiades qui commencent avec chaque 1^er^ Hæcatombéon. Les dates juliennes d'années sont rapportées à l'ère chrétienne, et comptées chronologiquement; de sorte que, si on veut les transporter dans la période julienne, il faut retrancher chacune d'elles du nombre 4714. Les bissextiles juliennes sont indiquées par la lettre B, mise en exposant, et les embolimes attiques par la lettre *e*, employée de même.

Les concordances des dates de jour que ce tableau exprime sont établies en admettant que la 1^re^ année du 1^er^ cycle lunaire métonien, le 1^er^ Hæcatombéon commençant au coucher du soleil a coïncidé avec l'heure qui répondait à ce même phénomène, dans le cours du 15 juillet julien, compté de minuit, appartenant à l'année 4282. Ainsi, quand on voudra transporter l'origine de ces concordances au minuit du 16 juillet, comme je suis convenu de le faire, il faudra augmenter d'une unité tous les quantièmes de jours juliens indiqués par Ideler, et considérer l'instant 0^h où ils commencent comme coïncidant avec le minuit du 1^er^ Hæcatombéon. Cette convention simplifiera et assurera toutes les transformations de dates que nous aurons à faire, en nous dispensant d'avoir égard à la variabilité d'origine des jours attiques, placée au coucher du soleil. Nous l'avons déjà employée pour les années des Séleucides, par le même motif, et nous y trouverons ici les mêmes avantages. Je laisse au lecteur le soin de faire, dans chaque applica-

tion, le léger changement qu'elle nécessite, pour ne pas dénaturer le tableau d'Ideler en l'y adaptant.

150. Il s'agit maintenant d'éprouver la vérité de cette restitution. Pour cela, on suppose que, durant plus d'un siècle, au moins jusqu'à la réforme de Calippe et peut-être après encore, le calendrier civil des Athéniens a été réglé sur les déterminations de Méton. Alors on cherche, dans les documents de l'antiquité, les faits ou les observations compris dans cet intervalle, dont les époques absolues peuvent être retrouvées, et qui ont été mentionnés avec l'indication de dates attiques, soit de mois, soit de jours. Puis on examine si les tableaux de concordance, ci-dessus dressés, reproduisent exactement ces dates attiques d'après les dates absolues. Par malheur, les documents anciens qui réunissent ces conditions de doubles dates, sont, comme je l'ai dit, très-peu nombreux : et en outre, la vérification que l'on prétend établir sur la concordance de leurs dates attiques avec le calendrier métonien restitué, implique elle-même la supposition qu'elles ont dû y être conformes. Or rien ne l'atteste positivement. Car non-seulement le calendrier lunaire de Méton n'est mentionné dans aucun auteur ancien, comme ayant été effectivement employé à Athènes pour régler les dates civiles, mais même aucun d'eux n'en parle à un titre quelconque, quoiqu'ils citent souvent, avec de grands éloges, son parapegme populaire, en vantant la justesse des pronostics de tout genre qu'on y trouve exposés. Mais ce parapegme, essentiellement établi en relation avec les phases solaires, était tout à fait distinct d'un calendrier lunaire destiné à régler le cours des mois; et le caractère d'application attesté pour l'un ne peut rien faire préjuger pour l'autre.

151. Restreignant donc l'autorité de la vérification dans cette limite logique, les seuls éléments précis sur lesquels on puisse l'établir sont trois éclipses de lune observées à Babylone, et que Ptolémée a rapportées d'après Hipparque, avec la mention des mois attiques dans lesquels elles sont arrivées. La spécification des quantièmes de ces mois ne s'y trouve point. Mais, si le calendrier lunaire des Athéniens était alors exactement réglé, comme il a pu l'être s'ils l'ont assujetti aux déterminations de Méton, cette mention de quantième devenait inutile, les éclipses de lune devant toujours y arriver au milieu des mois, sauf les écarts des mouvements vrais autour des mouvements moyens, et en négligeant aussi les petites erreurs de 1, ou au plus 2 jours, que pouvait entraîner le mode systématique suivant lequel les mois pleins et caves étaient répartis. Ptolémée a donné les époques absolues de ces trois éclipses en dates égyptiennes vagues; je les ai transformées en dates juliennes que je mets en regard, avec les indications de mois attiques qui les accompagnent. Ces résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

INDICATION des endroits de l'Almageste où ces observations ont rapportées, dans l'édition de Halma, tome I.	DATES ÉGYPTIENNES, EN ANNÉES DE NABONASSAR, rapportées au méridien d'Alexandrie, et exprimées en heures équinoxiales, le jour civil énoncé commençant au lever du soleil. MILIEU DE L'ÉCLIPSE.	DATES CORRESPONDANTES dans LES ANNÉES DE LA PÉRIODE JULIENNE, rapportées aussi au méridien d'Alexandrie, et en heures équinoxiales, le jour julien énoncé commençant à minuit. MILIEU DE L'ÉCLIPSE.	INDICATION DU MOIS ATTIQUE et de l'archonte alors en fonction.
Liv. IV, p. 275.	Année 366, 26 de Thot, à $18^h\frac{1}{2}$ après le midi du 26.	Année 4331^e, décembre 23, jour 357^e, à $6^h\frac{1}{2}$.	Mois Posidéon, archonte Phanostrate.
Ibid., *ibid.*	Année 366, 24 de Phamenoth, à $8^h\frac{1}{4}$ après le midi du 24.	4332^c, juin 18, jour 169^e, à $20^h\frac{1}{4}$.	Mois Skirophorion, archonte Phanostrate.
Ibid., p. 278.	Année 367, 16 de Thot, à $10^h\frac{1}{6}$ après le midi du 16.	4332^c, décembre 12, jour 346^e, à $22^h\frac{1}{6}$.	Mois Posidéon I^{er}, archonte Évandre.

Nota. Il faut retrancher $0^h\,24^m\,36^s$ des heures marquées pour Alexandrie, afin d'avoir celles d'Athènes correspondant au même instant physique.

152. Pour montrer la manière de transformer ces dates juliennes en dates attiques par les tables d'Ideler, je prends d'abord la troisième éclipse comme exemple.

L'année de la période julienne 4332 répond à l'année de l'ère chrétienne 4332-4714 ou —382, date chronologique. Si l'on cherche sa correspondante dans le tableau II, on trouve que, suivant le système de concordance sur lequel il se fonde, la 13^e année du 3^e cycle métonien commence en —382 le 4 juillet, et finit en —381 au 22 juillet. Elle comprend donc notre troisième éclipse. Cette année métonienne est indiquée comme embolime par les dates qui la limitent. Elle devait l'être, en effet, d'après le rang qu'elle occupe dans le cycle, selon le système de Dodwell et d'Ideler. Le texte de Ptolémée lui confirme ce caractère, puisqu'en y marquant un mois Posidéon I^{er}, il montre qu'elle devait avoir un Posidéon II. La

même épreuve est contraire au système de Petau, puisque cette 13^{e} année y serait commune. Mais Petau repousse l'objection, en niant que le cycle lunaire de Méton ait jamais été employé dans l'usage civil par les Athéniens.

En accroissant d'une unité le quantième du jour julien initial assigné par Ideler, conformément à la convention que j'ai établie plus haut, j'en tire la concordance suivante, dont le premier membre est exprimé sous la forme julienne, le second sous la forme attique. J'y ai restitué à l'année —382 son énoncé de rang dans la période julienne, pour éviter l'emploi des signes négatifs.

4332, 5 juillet, jour 186^{e}, 0^{h} = 3^{e} cycle, 13^{e} année, jour 1, à minuit.

Il faut maintenant prolonger cette concordance jusqu'à l'époque de notre éclipse, qui est indiquée par sa date julienne pour le méridien d'Alexandrie. Cela exigerait d'abord que l'on retranchât de cette date 24^{m}36^{s}, pour la ramener immédiatement au méridien d'Athènes. Mais il sera aussi exact, et plus commode, d'effectuer cette réduction sur le résultat final, ce qui laissera en évidence les nombres primitivement obtenus. L'éclipse appartient au 346^{e} jour de l'année 4332, lequel est séparé du 186^{e} par 346—186 ou 160 jours complets. Ajoutant donc aux deux membres de la concordance précédente 160 jours, plus 22$^{h}\frac{1}{6}$, nous compléterons la date julienne de notre éclipse; et il en résultera la nouvelle équivalence qui suit :

Année 4332, jour 346^{e}, 22$^{h}\frac{1}{6}$ = 3^{e} cycle, 13^{e} année, jour 161^{e}, 22$^{h}\frac{1}{6}$ après minuit.

Le second membre est la date attique exprimée en jours comptés de l'origine de l'année; il ne reste qu'à la réduire

en quantièmes de mois lunaires. Pour assurer cette opération, je remplace les $22^h \frac{1}{6}$ par $1^j - 1^h \frac{5}{6}$. En effet, l'arc horaire qui précède minuit, ne remontant pas jusqu'au point où le soleil se couche, ne pourra pas changer le quantième de jour attique. La date à placer dans l'année désignée devient ainsi

Le jour 162e, $1^h \frac{5}{6}$ avant minuit.

Maintenant considérez, dans le tableau I, la composition intérieure qui est propre à la 13e année d'un cycle. Les cinq premiers mois comprennent 148 jours complets, lesquels, retranchés de 162, ramènent l'origine de la date au 1er jour du 6e mois, qui est Posidéon Ier. Ainsi, pour l'obtenir elle-même, il n'y a plus qu'à prendre l'excédant 162-148, ou 14 jours, à partir de cette origine. La date attique sera donc, pour le méridien d'Alexandrie,

3e cycle, 13e année, le 14 de Posidéon Ier, à $1^h \frac{5}{6}$ avant minuit.

Pour Athènes, l'arc horaire antérieur à minuit s'accroîtra de $24^m 36^s$; ce qui mettra le milieu de l'éclipse à $2^h 14^m 36^s$ avant minuit.

153. Après ces détails, je puis exposer plus brièvement la réduction des deux autres dates : la même méthode servira toujours. Prenons d'abord la première. Elle appartient à l'année de notre ère 4331—4714 ou —383. En consultant le tableau II, on voit que la 12e année du 3e cycle métonien commence au 15 juillet —383, et finit au 4 juillet —382. Elle contient donc notre éclipse. Elle comprend même aussi la deuxième, dans ses derniers mois. Alors, pour ramener la date julienne de celle-ci à la même origine, j'ajoute 365 au nombre des jours qui la marquent dans l'année — 382, et je la change ainsi en

— 383, jour 534^{e}, 20^{h} $\frac{1}{4}$. Cela fait, j'ajoute 1 au quantième de jour julien marqué par Ideler comme identique au 1er Hécatombéon, dans cette année-là; et lui restituant à elle-même son énoncé ordinal dans la période julienne, j'obtiens la concordance initiale suivante, qui devient applicable aux deux opérations que nous avons à faire :

Année 4331, 16 juillet, jour 197^{e} = 3^{e} cycle, 12^{e} année, jour 1er, à minuit.

Pour transporter cette concordance aux époques respectives de nos éclipses, il faut ajouter aux deux membres l'excès de leurs dates juliennes propres sur 197 jours. Cela donne : pour la première 357 — 197, ou 160^{j} 6^{h} $\frac{1}{2}$; pour la seconde 534 — 197, ou 337 20^{h} $\frac{1}{4}$; ou enfin 338^{j} — 3^{h} $\frac{3}{4}$. Alors le second membre exprimera leurs dates attiques, qui seront, dans l'année désignée :

Jour 161^{e}, 6^{h} $\frac{1}{2}$ après minuit; et jour 339^{e}, 3^{h} $\frac{3}{4}$ avant minuit.

Consultez maintenant, dans le tableau I, la composition de la 12^{e} année d'un cycle métonien, et retranchez de chaque date le nombre de jours qui composent une somme complète de mois antérieurs. Ce sera, pour la première, 147, comprenant cinq mois qui précèdent Posidéon; pour la deuxième, 325, comprenant onze mois qui précèdent Skirophorion, le dernier de l'année. Les dates attiques des deux éclipses, rapportées au méridien d'Alexandrie, seront ainsi finalement :

3^{e} cycle, 12^{e} année, le 14 Posidéon, 6^{h} $\frac{1}{2}$ après minuit;

et 3^{e} cycle, 12^{e} année, le 14 Skirophorion, 3^{h} $\frac{3}{4}$ avant minuit.

Il ne restera plus qu'à retrancher de chacune 24^{m} 36^{s}, pour les ramener au méridien d'Athènes.

154. On voit que ces trois éclipses de lune tombent au 14e jour du mois attique, qui leur est assigné par Ptolémée. Cela devait, en effet, toujours arriver ainsi quand le calendrier était bien réglé, puisque le principe de son arrangement était que le 1er jour de chaque mois coïncidât avec une néoménie. Il ne pouvait survenir de déviation à cette règle que par quelque faute d'intercalation, par une évaluation inexacte des mouvements moyens qui servaient de fondement au calcul, ou enfin par une différence, occasionnellement sensible, entre ces mouvements et les mouvements vrais. Ce sont probablement des écarts pareils qui ont fait quelquefois dire aux historiens grecs qu'une éclipse de lune ou de soleil était arrivée à tel quantième de tel mois, κατὰ σελήνην (suivant la lune); spécifiant ainsi la différence qui s'était manifestée entre l'époque vraie du phénomène et son époque légale ou théorique, fixée au 14 ou au 1er des mois lunaires civils.

155. L'accord de nos trois éclipses avec cette règle établit donc la double présomption qu'aux époques où elles eurent lieu le calendrier lunaire d'Athènes était juste, et que nous en avons fait ici une restitution fidèle. Par malheur, l'antiquité ne nous fournit pas d'autres éléments de vérification rigoureuse, et ils portent sur deux années attiques justement consécutives. L'indétermination du problème reste donc très-grande, d'autant que l'époque initiale des cycles n'est pas elle-même prouvée, mais seulement présumée par induction. La coïncidence qu'on lui suppose avec la néoménie la plus prochaine du solstice d'été observé par Méton me semble, pratiquement, difficile à admettre. Car, si Méton a établi son parapegme sur ce solstice, il lui aura fallu du temps pour calculer ses annonces en relation avec sa date;

et, par ce motif, ou par tout autre, il aurait pu également faire commencer son calendrier lunaire à une néoménie différente de celle qui le suivait immédiatement. Ce soupçon, très-légitime en soi, se fortifiera tout à l'heure, par l'impossibilité que nous trouverons à mettre l'ordre des intercalations des années de Calippe en continuité de raccordement avec celui des années métoniennes, tel qu'il est admis dans le système que je viens d'exposer.

156. Le tort de Méton n'a pas été seulement d'avoir altéré la durée de l'année solaire pour la commodité de son calcul. En égalant 235 lunaisons moyennes à 6940 jours, il attribuait implicitement à chacune d'elles $29^j\frac{25}{47}$, ou $29^j,531915$, ce qui est une évaluation trop forte. Car, si on la compare à celle de Ptolémée $29^j53o5941$, 235 de ces dernières n'embrassent que $6939^j,689613$; de sorte que chaque cycle métonien faisait la lune théorique trop lente de $o^j310386$. Ainsi, après 5 cycles et $\frac{7}{19}$, la lune moyenne véritable devait, proportionnellement, précéder le 1er Hæcatombéon théorique de $1^j\frac{2}{3}$. Tel était, comme nous allons le voir, l'état d'erreur où Calippe trouva le calendrier de Méton, quand il lui substitua ses périodes de 76 années de $365^j\frac{1}{4}$, ou 27759^j, comprenant 940 lunaisons. Or, indépendamment du retour à une valeur moins fautive de l'année solaire, ce changement avait un autre avantage que Calippe peut n'avoir pas aperçu. En effet, renfermant le même nombre de lunaisons quadruplé, dans le même nombre d'années pareillement quadruplé, mais individuellement moins longues, la durée moyenne de la lunaison en résultait plus courte, se trouvant ainsi réduite à $29^j\frac{499}{940}$, ou $29^j,53o8511$, ce qui la rapprochait beaucoup de sa valeur exacte $29^j,53o5941$,

que nous trouvons dans Ptolémée. On ne doit donc pas s'étonner que les astronomes grecs aient accueilli avec faveur une modification aussi heureuse, et qu'ils aient ensuite rapporté généralement leurs observations aux années des périodes calippiques, comme nous allons voir qu'ils l'ont fait. Cela nous fournira des épreuves assurées, pour fixer numériquement l'époque ainsi que les particularités, d'une innovation si importante.

CHAPITRE XII.

Périodes luni-solaires de Calippe.

ÈRE : DE LA PÉRIODE JULIENNE, ANNÉE 4384 ; DE L'ÈRE CHRÉTIENNE — 350, LE MARDI 28 JUIN, JOUR 179e, AU COUCHER DU SOLEIL QUI SUIVIT IMMÉDIATEMENT LA NÉOMÉNIE MATHÉMATIQUE COÏNCIDANTE AVEC LE SOLSTICE D'ÉTÉ ; CES DEUX PHÉNOMÈNES S'ÉTANT OPÉRÉS CE MÊME JOUR JULIEN, VERS 5 HEURES ET DEMIE DU MATIN, AU MÉRIDIEN D'ATHÈNES, AVEC UNE SIMULTANÉITÉ PRESQUE RIGOUREUSE, D'APRÈS LES TABLES ABRÉGÉES DE M. LARGETEAU.

Concordance initiale entre les dates juliennes et les dates attiques prises dans les périodes de Calippe.

Année de la période julienne 4384, 29 juin, jour 180e, à minuit, ou 0h = 1ère période, année lunaire 1, jour 1er, à minuit.

Nota. Le jour civil attique commence au coucher du soleil.

157. Pour justifier l'énoncé qui précède, il faut d'abord déterminer l'année de la période julienne dans laquelle le cycle de Calippe a commencé; puis assigner le jour qui lui a servi d'origine.

J'ai suffisamment expliqué la composition générale de ce cycle et son but. C'était une continuation perfectionnée de

celui de Méton. Calippe a dû se donner pour condition de l'y rattacher, en dérangeant le moins possible les usages reçus. Cette présomption, très-naturelle, va nous découvrir comment le raccordement a dû s'opérer.

158. Les années lunaires de Méton commençaient et finissaient à moins d'un mois de distance du solstice d'été courant. Admettons, pour un moment, qu'à l'époque où Calippe ouvrit son cycle, le 1^er^ jour du mois lunaire Hœcatombéon, le premier de l'année grecque, se trouvât avoir rejoint exactement ce solstice; et désignons par N le rang ordinal inconnu de l'année de la période julienne dans laquelle cette coïncidence s'opéra. Le même solstice sera aussi l'origine de la 1^re^ année calippique, de celle dont le rang est 1. Les suivantes 2, 3, 4 et n, étant sujettes à l'intercalation lunaire, commenceront respectivement quelques jours plus tôt ou plus tard que les solstices d'été des années juliennes correspondantes $N+1$, $N+2$, $N+3$, ... $N+n-1$, sans que leur origine s'écarte jamais de cette phase solaire jusqu'à la distance d'un mois. Donc, si l'on parvient à connaître les deux termes d'une seule de ces concordances, c'est-à-dire les nombres n et $N+n-1$, qui s'y réalisent simultanément, on connaîtra aussitôt N en retranchant $n-1$ du dernier d'entre eux.

159. Pour faire cette épreuve avec sûreté, il faut prendre dans Ptolémée une observation dont il donne la date de jour dans les années de Nabonassar, et pour laquelle il indique, en outre, le rang n de l'année calippique où elle est comprise. Il faut aussi que cette observation tombe à plus d'un mois de distance du solstice d'été vrai qui en est le plus proche, pour que le jeu de l'intercalation n'expose pas à se

méprendre sur le rang de cette phase auquel on la rapporte. Car une année lunaire embolime ayant 383 ou 384 jours, peut occasionnellement comprendre deux solstices d'été vrais. On pourrait même juger convenable d'étendre cette condition d'écart jusqu'à deux mois, pour échapper à l'hypothèse de coïncidence initiale avec le solstice, sur laquelle notre calcul est établi. Mais on s'aperçoit ultérieurement que cela serait inutile ; car toutes les valeurs qu'on obtient ainsi pour N conduisent à une époque où cette coïncidence était presque rigoureuse.

160. J'ai rassemblé les détails de ces épreuves dans une note mathématique insérée au *Journal des savants*, pour 1848, page 569. J'en reproduirai seulement ici les résultats. Toutes s'accordent à placer l'origine des années calippiques dans l'année de la période julienne 4384, comme les chronologistes l'avaient depuis longtemps constaté. Par une exception qui ne se reproduit avec la même rigueur qu'à des époques rares et distantes, le solstice d'été se trouva y coïncider, jour pour jour, et heure pour heure, avec une conjonction vraie. Sans doute, cette concordance ne pouvait pas être si précisément connue de Calippe, au moins par théorie. Toutefois, des observations antérieures, même imparfaites, étaient suffisantes pour la lui faire pressentir, avec une approximation qui devait lui offrir un puissant motif d'y placer l'origine de ses périodes; et une autre circonstance, que nous allons découvrir, lui donnait toute facilité pour agir ainsi.

161. Mais, avant de l'exposer, nous pouvons déjà tirer parti de ce qui précède pour en faire une application utile, qui souvent suffira aux besoins des astronomes, et qui a l'avantage de ne pas dépendre du mode d'intercalation que Calippe

a pu employer dans ses périodes. Elle consiste à déterminer l'année de la période julienne dans laquelle *commence* une année calippique quelconque, qui est désignée par son rang ordinal dans la période dont elle fait partie.

Les périodes calippiques complètes comprennent, par définition, 76 années juliennes de $365^{j}\frac{1}{4}$; leur durée totale est subdivisée en un pareil nombre d'années lunaires, d'inégale longueur. Mais l'intercalation d'où cette inégalité résulte maintient toujours leur origine individuelle à moins d'un mois de distance du solstice d'été courant; de sorte qu'elle se trouve toujours dans la même année julienne que ce solstice. La différence occasionnelle d'un jour qui existe entre les années juliennes communes et bissextiles, n'empêche pas cette simultanéité d'avoir lieu pour les unes comme pour les autres. De là on tire une règle fort simple pour transporter toutes les origines des années calippiques dans la série des juliennes. Une année calippique étant désignée par son rang ordinal n dans la période $m^{\text{ième}}$ dont elle fait partie, prenez les $m - 1$ périodes précédentes pour autant de fois 76 ans juliens; et prenez aussi comme juliennes, dans la période courante, les $n - 1$ années lunaires qui sont antérieures à celle que l'on vous désigne. La somme, ajoutée au rang ordinal de l'année julienne qui contient le solstice d'été initial, c'est-à-dire à 4384, vous donnera le rang de l'année ultérieure, également julienne, dans laquelle votre année calippique commence, avant ou après le solstice d'été, à une distance moindre qu'un mois. Le nombre qui désigne cette année-là dans la période julienne intercalée, sera ainsi :

$$4384 + 76(m - 1) + n - 1;$$

ou, par abréviation, $4383 + 76(m - 1) + n.$

Vous pouvez calculer la date absolue de ce solstice courant par les tables astronomiques ; ce sera l'affaire de quelques minutes, si vous employez celles de M. Largeteau. Il vous marquera l'origine *moyenne* de l'année calippique qu'on vous a désignée ; et son origine *vraie* ne pourra pas en différer de 30 jours en plus ou en moins. Si cette amplitude d'indétermination ne vous est pas indispensable à restreindre pour la recherche que vous avez entreprise, vous échapperez à toutes les incertitudes que l'on peut avoir aujourd'hui sur le mode d'intercalation que Calippe avait adopté. Tel est le cas dans lequel les astronomes se trouvent le plus ordinairement, pour les applications qui leur sont essentielles. J'en ai donné plusieurs exemples dans les deux articles du *Journal des savants* que j'ai cités plus haut ; je n'en reproduirai ici qu'un seul, dont le résultat nous sera ultérieurement nécessaire.

162. Au livre II de l'*Almageste*, chap. 2, page 162 de l'édition de Halma, Ptolémée mentionne un solstice d'été qui fut observé par Aristarque dans la 50^{e} année de la 1re période calippique, et à la page suivante il ajoute que l'observation fut faite *vers la fin de cette même année* (τῷ ν ἔτει λήγοντι). Cette dernière spécification prouve que le jeu de l'intercalation lunaire a étendu la 50^{e} année calippique au moins jusqu'au 51^{e} solstice d'été, compté depuis l'origine de la période ; ou, plus vraisemblablement, quelques jours au delà. Conséquemment, pour connaître l'année julienne à laquelle ce 51^{e} solstice appartient, on devra, au rang ordinal du solstice primitif, qui est 4384, ajouter 51 — 1 ou 50, et non pas 49 ; ce qui donnera 4434 pour le rang de l'année julienne dans laquelle il est compris. Nos tables y marquent

le solstice d'été au 27 juin julien. Ainsi, en supposant que l'observation eût été exempte d'erreur, sa date précise aurait dû être :

Année de la période julienne 4434^{e}, 27 juin, jour 178^{e}.

L'exactitude de cette transformation est confirmée par un autre passage de Ptolémée, où, sans spécifier davantage le jour de l'observation, il ajoute, page 163, qu'elle tombe dans la 44^{e} année depuis la fin d'Alexandre, qui est la 468^{e} de Nabonassar. En effet, si l'on transporte la date julienne précédente, dans le calendrier égyptien, on trouve pour sa concordance :

Année de Nabonassar 468, jour 239^{e}, Pharmouti, 29.

La désignation du jour y reste toujours théorique, et il est regrettable que Ptolémée n'ait pas indiqué celle qu'avait donnée l'observation, ainsi que sa place dans les mois attiques. Mais ceci nous fournit toujours deux résultats utiles : d'abord la confirmation de l'époque absolue à laquelle nous avons placé l'origine des années calippiques, puisque la date julienne du solstice d'Aristarque, que nous en déduisons, coïncide avec la date égyptienne que lui assigne Ptolémée; puis, la preuve certaine que la 50^{e} année de la 1re période calippique a dû s'étendre au moins jusqu'au 27 juin de l'année julienne 4434, ou même très-vraisemblablement un peu au delà. Ce dernier fait nous offrira tout à l'heure, pour la recherche du mode d'intercalation des années de Calippe, un élément de vérification auquel on n'avait pas songé.

163. Je reviens à l'exposé de la circonstance qui dut favoriser l'introduction et l'adoption de ses périodes. Le solstice d'été

qui avait servi d'origine aux cycles luni-solaires de Méton était celui de l'année julienne 4282. De là, jusqu'à celui de l'an 4384, il s'était écoulé 102 années solaires complètes; de sorte que la 1re année de Calippe était la 103e de Méton. Retranchant de ce nombre 5 fois 19 ou 95, le reste 8 montre que cette 1re année calippique était la 8e du 6e cycle métonien. Or, d'après notre tableau II de la page 425, dans le 1 r cycle, la date initiale de la 8e année, rapportée à la période julienne, était :

Année 4289e, 28 juin, jour 180e.

Donc, après cinq cycles révolus, la date correspondante devait s'être accrue de 5 fois 6940, ou 34700 jours. En divisant ce nombre par 1461, on en extrait d'abord 23 tétrades d'années juliennes complètes, contenant 92 années intercalées, dont l'adjonction à l'année primitive ne change point son rang dans les tétrades. La division présente pour reste 1097 jours, lesquels divisés par 365 se résolvent en 3 années communes plus 2 jours. Mais le point de départ auquel on doit les rattacher se trouvant être une année bissextile, il faut attribuer à cette première année 366 jours; ce qui donne en somme, pour l'accroissement de son rang ordinal, 92 + 3 ou 95, avec le surcroît de 1 jour seulement. La 8e année lunaire du 6e cycle métonien avait donc pour sa date initiale dans la période julienne :

Année 4384e, jour 181e, 30 juin.

C'est en effet, celle que lui attribue le tableau II, que j'ai emprunté à Ideler, sauf la substitution que j'ai faite de la période julienne au calendrier chrétien.

Or, d'après nos tables du soleil, le solstice d'été avait eu lieu, dans cette même année julienne, le 28 juin, comme je

l'ai déjà énoncé. Ainsi le 1^er^ Hæcatombéon théorique de Méton se trouvait être trop tardif de 2 jours, comparativement à ce phénomène, lorsque Calippe commença ses périodes. Il n'eut à lui appliquer que cette légère anticipation pour le remettre à sa place exacte; et il put le faire sans inconvénient, puisque les astronomes seuls devaient, tout au plus, s'en apercevoir.

164. Mais il se serait créé, fort inutilement, des difficultés bien plus sérieuses, et bien plus apparentes, s'il avait voulu déranger l'ordre des années de 12 et de 13 lunes, établi jusqu'alors, et que Méton s'était astreint à conserver. Aussi Géminus nous assure que les astronomes postérieurs n'y apportèrent jamais aucun changement. Toutefois, les incertitudes qui nous restent sur l'époque initiale du calendrier lunaire de Méton ne nous permettent pas d'appliquer ici cette condition de continuité avec une exigence trop absolue. En effet, on peut voir, dans la note du *Journal des savants* tout à l'heure citée, que les conséquences de cette identification rigoureuse se trouveraient en défaut. La conservation du mode d'intercalation, attestée par Géminus, pourrait bien ne s'appliquer qu'à l'ordre général dans lequel on faisait succéder les années communes et embolimes, sans exclure une différence d'origine dans le choix du terme de leur série par lequel on commençait leur succession. Puis enfin, si une telle différence s'offrait à nous comme nécessaire, il se pourrait encore qu'elle fût plus apparente que réelle, et qu'elle résultât seulement de l'inexactitude de l'interprétation, antérieurement appliquée au calendrier métonien. Tout ce que nous pouvons raisonnablement nous imposer, c'est de reproduire fidèlement toutes les dates attiques dont nous aurons

les concordances absolues sous une autre forme ; et de le faire, par un mode d'intercalation le plus rapproché qu'il sera possible de celui des octaétérides primitives, dont Géminus nous apprend la persistance dans tous les temps postérieurs. La question ainsi restreinte, peut être résolue, comme on va le voir, sans violer aucunement les analogies.

165. Dodwell et Ideler ont cru pouvoir reproduire les périodes calippiques, en les composant de quatre cycles métoniens, placés consécutivement ; de sorte que, dans chacun d'eux, l'intercalation des années embolimes recommence et se continue suivant les mêmes lois que dans un cycle métonien isolé. En effet, ces deux érudits reproduisent ainsi fort exactement les dates attiques de quatre observations de Timocharis, que Ptolémée mentionne sous cette forme, en donnant aussi leurs dates égyptiennes absolues. Mais ils ne satisfont pas à l'observation du solstice d'Aristarque que Ptolémée nous a également transmise, et dont l'application à ce genre d'épreuve leur a échappé, comme elle a échappé à tous les autres chronologistes. Cette observation contredit essentiellement les systèmes de Dodwell et d'Ideler, en ce qu'elle oblige d'étendre la 50^{e} année de la 1re période calippique, conséquemment de toutes ses homologues dans les périodes suivantes, bien au delà des bornes que fixe et nécessite le mode d'intercalation qu'ils ont admis. Petau n'a pas songé plus qu'eux à employer cette observation d'Aristarque, et cependant son système des années de Calippe y satisfait en même temps qu'à celles de Timocharis. C'est pourquoi je me bornerai à l'exposer, en y apportant seulement quelques modifications de détail, qui le mettront dans une harmonie plus complète avec les prescriptions de Géminus.

166. Le rapport que ce système établit entre l'ordre d'intercalation des années calippiques et le mode antérieurement adopté par Méton, se voit dans les lignes suivantes. Les supérieures présentent une suite continue de cycles métoniens, intercalés conformément au système que nous avons déduit de l'octaétéride; les inférieures présentent les 76 années qui leur correspondent respectivement dans une période calippique complète. Les années embolimes sont marquées, dans l'une et l'autre suite, par la lettre *e* mise en exposant.

Cycles métoniens.....	1	2	3e	4	5e	6	7	8e	9	10	11e	12	13e	14	15	16e	17	18	19e	1	2	3e	4	5e	6
nn. d'une période calippique.													1e	2	3	4e	5	6	7e	8	9	10e	11	12e	13
uite des cycles métoniens...	7	8e	9	10	11e	12	13e	14	15	16e	17	18	19e	1	2	3e	4	5e	6	7	8e	9	10	11e	12
uite de la période calippique.	14	15e	16	17	18e	19	20e	21	22	23e	24	25	26e	27	28	29e	30	31e	32	33	34e	35	36	37e	38
uite des cycles métoniens...	13e	14	15	16e	17	18	19e	1	2	3e	4	5e	6	7	8e	9	10	11e	12	13e	14	15	16e	17	18
uite de la période calippique.	39e	40	41	42e	43	44	45e	46	47	48e	49	50e	51	52	53e	54	55	56e	57	58e	59	60	61e	62	63
uite des cycles métoniens...	19e	1	2	3e	4	5e	6	7	8e	9	10	11e	12												
uite de la période calippique.	64e	65	66	67e	68	69e	70	71	72e	73	74	75e	76												

167. Dans le calendrier ecclésiastique des juifs et des chrétiens, la cérémonie de la Pâque se règle sur un cycle lunaire de 19 ans, dont le mode d'intercalation, adopté dès les premiers temps du christianisme, paraît avoir été déduit ou imité de ceux de Méton ou de Calippe avec un simple transport d'origine. Il est figuré dans la ligne suivante :

1	2	3e	4	5	6e	7	8e	9	10	11e	12	13	14e	15	16	17e	18	19e

portez cette ligne, sous celle du tableau précédent qui pré-

sente la série des cycles métoniens, et mettez son premier terme 1 en coïncidence avec le terme de ces cycles dont le rang est 6, comme on la fait ici, dans notre texte imprimé. Les années, tant communes qu'embolimes, se succéderont, à partir de cette origine, exactement suivant le même ordre dans les deux séries. Vous obtiendrez encore une coïncidence aussi exacte et aussi complète en portant ce même cycle pascal sous les années de Calippe, et faisant coïncider son premier terme avec celle de ces années dont le rang est 13, ou 13 plus un multiple quelconque de 19. C'est probablement sur la foi de cette ancienne dérivation que Petau a pris immédiatement le cycle pascal pour type du cycle métonien, sans s'inquiéter des paroles de Géminus. Mais les deux modes d'intercalation ne s'accordent que sous la condition d'un transport d'origine, comme nous l'avons démontré.

168. Après avoir déterminé l'ordre général d'intercalation des années calippiques, conformément aux analogies qui peuvent l'indiquer avec vraisemblance, il faut établir, dans leur composition intérieure, la distribution des mois pleins et caves, en se conformant, aussi exactement que possible, aux prescriptions de Géminus, puisqu'il nous atteste que leur usage s'est constamment conservé. Car on ne serait fondé à le contredire que si la règle déjà suivie ne pouvait être numériquement appliquée aux périodes calippiques, sans y occasionner des erreurs que l'on n'aurait pas dû tolérer. Mais, au contraire, elle s'y adapte parfaitement, avec une modification si légère, que les astronomes eux-mêmes n'auraient pu apercevoir de différence sensible entre les résultats qu'elle y donne, et ceux auxquels on était antérieurement accoutumé.

En effet d'après le calcul que nous avons fait, page 397, chaque période calippique de 940 lunaisons moyennes devait contenir 499 mois pleins et 441 caves. En raisonnant ici comme sur les périodes métoniennes, on avait 940 mois primitifs de 30 jours, formant en somme 28200 jours, dont il fallait supprimer 441. Le premier de ces nombres divisé par le deuxième donne au quotient $64 - \frac{3}{147}$, un peu moindre que 64. Alors les 440 premiers jours à supprimer pouvaient se répartir suivant le même principe de distribution égale, et précisément aux mêmes intervalles qu'on avait adoptés précédemment. Car le rang ordinal de ce 440^{e} étant 440.64 ou 28160, il tombait dans le pénultième mois de la période totale, laissant après lui 40 jours, c'est-à-dire seulement 24 de moins qu'il n'aurait fallu pour étendre la parfaite égalité de répartition jusqu'au 441^{e} inclusivement. Mais le remède était aussi évident que facile. Car ce principe d'égale répartition n'ayant rien d'absolu, étant même au contraire purement conventionnel, on y dérogeait à peine en reportant le 441^{e} jour à soustraire dans le 940^{e} mois de la période, ce qui rendait ses deux derniers caves; tous les autres, excepté celui-là, se succédant par les mêmes alternatives et dans le même ordre qui étaient usités précédemment. De sorte qu'on n'avait qu'à les écrire à la suite les uns des autres, sans aucun calcul, comme ils avaient été rangés jusqu'alors, dans la série des années tant communes qu'embolimes établie plus haut.

169. Je présente ici, dans le tableau III, la suite complète des années lunaires de la première période calippique, restituée d'après ces principes. On pourra l'étendre à toutes les périodes ultérieures, en ajoutant à la date julienne du

1er Hæcatombéon de chaque année attique un ou plusieurs intervalles de 76 années juliennes complètes, lesquels, contenant chacun 19 tétrades entières, ne changeront pas le quantième du jour julien marqué dans le tableau. Il ne reste plus qu'à examiner si le calendrier calippique, ainsi restitué, satisfait à toutes les épreuves que nous pouvons lui faire subir.

170. Il est évident d'abord qu'il satisfait à l'observation d'Aristarque. Car notre 50e année calippique, dans laquelle le texte de Ptolémée la place, renferme en effet sa date, qui tombe à son dernier mois, par conséquent vers sa fin, comme le texte le dit. Les systèmes de Dodwell et d'Ideler font ici complétement défaut. Car ils terminent cette 50e année au 16 juin de l'année de la période julienne 4434, bien en deçà du solstice d'été qu'elle doit comprendre, puisque ce phénomène est arrivé 12 jours plus tard, le 27 juin, comme nous l'avons reconnu. Les expressions de Ptolémée indiquent même évidemment qu'elle a dû s'étendre plus loin que cette date précise. Petau la prolonge jusqu'au 15 juillet, comme le fait notre tableau; mais il s'est écarté des prescriptions de Géminus quant à l'ordre de répartition des mois pleins et caves, au lieu que je m'y suis strictement conformé.

171. Accessoirement au solstice d'Aristarque, les seules données que l'on puisse faire servir au même genre d'épreuve, sont quatre observations de Timocharis que Ptolémée nous a conservées, avec l'indication des mois attiques et des quantièmes de ces mois auxquels elles répondent, en y joignant d'ailleurs leurs dates absolues égyptiennes, d'où l'on déduit les dates juliennes correspondantes. L'ensemble de ces concordances se voit dans le tableau suivant, où les

pages du texte de Ptolémée sont indiquées d'après l'édition de Halma:

PAGES du TOME II, liv. VII.	DATES CALIPPIQUES, toutes prises dans la 1re période.	DATES ÉGYPTIENNES ASTRONOMIQUES, exprimées en temps vrai équinoxial, compté de midi au méridien d'Alexandrie, depuis l'ère de Nabonassar.	DATES JULIENNES CORRESPONDANTES, exprimées aussi en temps vrai du méridien d'Alexandrie, le jour julien commençant à minuit.	DATE ATTIQUE DE L'OBSERVATION rapportée dans l'Almageste.
26	1re période; ann. 36	Ann. 454, 16 Phaophi (j. 46e), $15^h\frac{3}{5}$	441 9c, 21 déc. (j. 355e), $3^h\frac{2}{3}$	le 25 de Posidéon.
23	ann. 36	Ann. 454, 5 Tybi (j. 125e), 8^h	4420c, 9 mars (j. 68e), 20^h	le 15 d'Élaphébolion.
21	ann. 47	Ann. 465, 29 Athyr (j. 49e), $9^h\frac{2}{3}$	4431c, 29 janv. (j. 29e), $21^h\frac{2}{3}$	le 8 d'Anthestérion.
24	ann. 48	Ann. 466, 7 Thot (j. 7e), $15^h\frac{1}{6}$	4431c, 9 nov. (j. 313e), $3^h\frac{1}{6}$	le 6 de Pyanepsion (φθίνοντος), compté de la fin en remontant.

172. Pour voir si notre restitution de la période calippique satisfait à ces données, il faut d'abord remarquer que les dates attiques rapportées par Ptolémée doivent nécessairement être interprétées comme des dates *civiles*, dans lesquelles les jours, dont les *quantièmes* s'y trouvent mentionnés, sont supposés commencer au coucher du soleil; tandis que les dates juliennes des observations que nous avons déduites de leurs dates égyptiennes vagues supposent des jours commençant à minuit. Afin de transporter correctement ces dernières dans les années calippiques, il faut, comme opération préparatoire, ramener les jours de celles-ci à une origine pareille; et transformer ensuite, en dates civiles attiques, les concordances rigoureuses que nous aurons ainsi obtenues. C'est la précaution que j'ai prise, en énonçant les conditions de la concordance initiale, comme

je l'ai fait en tête du présent chapitre. Si nous voulons l'appliquer à notre tableau de la période calippique, l'effet en sera le même : c'est-à-dire que, pour y porter l'origine des jours à minuit, il suffira d'augmenter d'une unité le quantième julien du jour qu'il indique, comme commençant chaque année attique, sans rien changer d'ailleurs à la distribution intérieure des jours qui les composent, mais en comptant les heures à partir de minuit. C'est la même modification que j'ai appliquée, page 426, au canon métonien de Ideler, pour l'adapter facilement aux calculs de transport.

D'après ces principes, les quatre dates juliennes des observations de Timocharis se transportent dans les années calippiques, comme le montre le tableau suivant, où tous les détails du calcul sont explicitement exposés pour chacune d'elles, au-dessous des données qui la définissent. Quand on a ainsi obtenu la date attique correspondante, comptée de minuit, et que l'on pourrait appeler *astronomique*, on voit dans la dernière colonne la date civile équivalente dans laquelle le jour est supposé commencer au lever du soleil. Celles-ci concordent exactement toutes les quatre avec les énoncés de Ptolémée. La dernière montre que le cinquième mois attique était appelé par lui, ou par Timocharis, Pyanepsion, et non pas Maimactérion ; car il est écrit ainsi dans tous les manuscrits de l'Almageste.

	RANG de L'ANNÉE CALIPPIQUE désignée, 1ère période.	SA DATE JULIENNE INITIALE, comptée de minuit.	DATE JULIENNE DE L'OBSERVATION, comptée de minuit.	DATE CIVILE CORRESPONDANTE, le jour commençant au coucher du soleil.
	36e	4419c, jour 184e, 0h	4419c, jour 355e, $3^h\frac{2}{3}$	
Du commencement de l'année julienne 4419c, au commencement de l'année attique 36e... Intervalle.			183j 0h	
Différence, ou date attique de l'observation, comptée de minuit :			Année 36e, jour 172e, $3^h\frac{2}{3}$	
Nombre des jours complets contenus dans les 5 premiers mois de cette			36e année, 147	
Différence, ou date de l'observation en quantième du VIe mois :			Posidéon, jour 25e, $3^h\frac{2}{3}$	Posidéon, j. 25e, $3^h\frac{2}{3}$, après minuit.
	36e	4419c, jour 184e, 0h	4419c, jour 433e, 20h	
Du commencement de l'année julienne 4419c, au commencement de l'année attique 36e... Intervalle.			183j 0h	
Différence, ou date attique de l'observation, comptée de minuit :			Année 36e, jour 250e, 20h	
Nombre des jours complets contenus dans les 8 premiers mois de cette			36e année, 236	
Différence, ou date de l'observation en quantième du IXe mois :			Élaphébolion, jour 14e, 20h	Élaphébolion, j. 15e, 4h, avant minuit.
	47e	4430c, jour 182e, 0h	4430c, jour 394e, $21^h\frac{2}{3}$	
Du commencement de l'année julienne 4430c, au commencement de l'année attique 47e... Intervalle.			181j 0h	
Différence, ou date attique de l'observation, comptée de minuit :			Année 47e, jour 213e, $21^h\frac{2}{3}$	
Nombre des jours complets contenus dans les 7 premiers mois de cette			47e année, 206	
Différence, ou date de l'observation en quantième du VIIIe mois :			Anthestérion, jour 7e, $21^h\frac{2}{3}$	Anthestérion, j. 8e, $2^h\frac{1}{3}$, avant minuit.
	48e	4431c, jour 171e, 0h	4431c, jour 313e, $3^h\frac{1}{8}$	
Du commencement de l'année julienne 4431c, au commencement de l'année attique 48e... Intervalle.			170j 0h	
Différence, ou date attique de l'observation, comptée de minuit :			Année 48e, jour 143e, $3^h\frac{1}{8}$	
Nombre des jours complets contenus dans les 4 premiers mois de cette			48e année, 118	
Différence, ou date de l'observation en quantième du Ve mois :			Pyanepsion, jour 25e, $3^h\frac{1}{8}$	Pyanepsion, j. 25e, $3^h\frac{1}{8}$, après minuit, ou le 6e jour en remontant à partir de la fin, ce mois ayant 30 jours dans l'année 48 de la période.

173. La distribution des années et des jours dans la période calippique, telle que notre tableau de la page 447 la présente, est donc la seule qui satisfasse complétement à toutes les données critiques et astronomiques par lesquelles on peut aujourd'hui la définir. Cette considération m'a déterminé à en présenter ici la restitution, avec autant de détails. D'ailleurs, les quatre conversions de dates juliennes en dates attiques, qu'elle vient de nous donner ici l'occasion d'effectuer, m'ont paru ne pas être inutiles à exposer, comme exemples de la marche à suivre dans tout autre cas pareil.

174. Il me reste à présenter une dernière remarque, plutôt chronologique, à la vérité, qu'astronomique, mais qui complète la liaison que nous avons déjà découverte, page 445, entre les anciennes périodes luni-solaires grecques et notre cycle lunaire actuel. Nous avons reconnu, page 319, que l'ère de Dioclétien tombe dans l'année de la période julienne 4997. Ce nombre, divisé par 19, donne pour quotient 263 sans reste. D'après les conventions fondamentales exposées §§ 17 et 20, ceci nous montre que l'année dont il s'agit termine une des évolutions de notre cycle lunaire actuel, reporté numériquement jusqu'à l'origine de cette période par une computation rétrograde. L'année suivante 4998, qui était la 2^{e} de Dioclétien, commençait donc un de ces cycles. Comme les premiers chrétiens empruntaient les éléments de leur comput ecclésiastique aux savants d'Alexandrie, chez qui l'ère de Dioclétien était usuelle, et que la nécessité leur a fait, en conséquence, employer pendant longtemps cette ère qui leur répugnait à tant de titres, on peut, ainsi que l'a remarqué Ideler, présumer avec vraisemblance qu'ils ont également pris à

cette source la date initiale de leur cycle pascal, coïncidant avec la deuxième année de Dioclétien. Car le calcul qui nous découvre cette coïncidence d'origine n'est qu'une application rétrograde des évolutions de ce cycle même, qui se serait ainsi continué depuis cette ancienne origine jusqu'à nous.

CHAPITRE XIII.

Années lunaires des Arabes, comptées de l'hégire.

ÈRE ASTRONOMIQUE DE L'HEGIRE : ANNÉE DE LA PÉRIODE JULIENNE 5535e, LE MERCREDI 14 JUILLET AU SOIR, A L'INSTANT DU COUCHER DU SOLEIL, QUI SUIVAIT LA NÉOMÉNIE MATHÉMATIQUE IMMÉDIATEMENT POSTÉRIEURE AU SOLSTICE D'ÉTÉ.

CONCORDANCE INITIALE. — Année arabe 1, jour 1er, à minuit vrai au méridien de la Mecque = année de la période julienne 5535e, le 15 juillet, jour 196e, à minuit vrai, ou 0h, au même méridien.

Nota. Le jour civil des Arabes commence au coucher du soleil.

174. Les Arabes sont le seul peuple connu, parmi les nations civilisées, qui ait adopté et conservé jusqu'aujourd'hui une année purement lunaire, dont ils laissent développer librement le cours, sans chercher à la maintenir en concordance avec les phases de l'année solaire par le procédé de l'intercalation. Cet usage, que l'on croit avoir existé chez eux très-anciennement, a reçu depuis l'islamisme le caractère d'une prescription religieuse, Mahomet ayant formellement prohibé tout artifice qui aurait pour but de fixer l'année civile. Peut-être voulut-il, par cette défense.

soustraire en ce point les Arabes aux coutumes des peuples environnants, comme Moïse avait soustrait les Hébreux à celles des Égyptiens par une prescription contraire. Quoi qu'il en puisse être, son précepte a été fidèlement observé par les musulmans.

Leurs mois civils, dans l'usage vulgaire, sont réglés sur la première apparition physique du croissant de la lune nouvelle. Mais, pour les usages astronomiques, les seuls que je veuille ici considérer, les mois lunaires sont établis sur une évaluation de la révolution synodique moyenne, qui paraît avoir été empruntée à Ptolémée. En effet, d'après le témoignage d'Albatégni, confirmé par la pratique de tous les astronomes orientaux, l'année arabe *moyenne* se compose de $354^j \frac{11}{30}$; et comme chaque année a 12 mois, la durée moyenne d'un mois, ou d'une lunaison, est le douzième de ce nombre, ce qui la fait égale à $29^j\ 12^h\ 44^m$. Or la lunaison de Ptolémée est $29^j\ 12^h\ 44^m\ 3^s \frac{1}{3}$, comme nous l'avons trouvé, page 383. La petite différence $3^s \frac{1}{3}$ ne produit que 40^s pour une année lunaire de 12 mois; et comme un jour de 24^h contient 86400^s, elle ne donnerait 1 jour d'écart qu'après 2160 années pareilles. On a donc pu sciemment s'en tenir à cette approximation, qui donnait un résultat simple dont l'application était très-facile. Elle exigeait seulement que l'on répartît 11 jours additionnels entre 30 années, chacune de 354, de manière que l'écart final de celles-ci, autour de la moyenne régulatrice, fût maintenu constamment moindre que $\frac{1}{2}$ jour ou $\frac{15}{30}$ de jour. Or, pour chaque année de 354, cet écart sera $-\frac{11}{30}$; et pour chaque année de 355 il sera $+\frac{19}{30}$. Alors le calcul progressif de ces résidus accumulés fait aisément découvrir à quels termes de la période l'addition d'un

jour devient nécessaire. C'est ce que montre le tableau suivant, où la lettre *e*, mise en exposant, désigne les années qui doivent avoir exceptionnellement 355 jours:

RANG ORDINAL des années, tant communes qu'embolimes.	LEUR ÉCART FINAL, autour de l'année moyenne, en trentièmes de jour.	RANG ORDINAL des années, tant communes qu'embolimes.	LEUR ÉCART FINAL, autour de l'année moyenne, en trentièmes de jour.	RANG ORDINAL des années, tant communes qu'embolimes.	LEUR ÉCART FINAL autour de l'année moyenne, en trentièmes de jour.
1	— 11	11	— 1	21e	+ 9
2e	+ 8	12	— 12	22	— 2
3	— 3	13e	+ 7	23	— 13
4	— 14	14	— 4	24e	+ 6
5e	+ 5	15 ou 15e	— 15 ou + 15	25	— 5
6	— 6	16e ou 16	+ 4	26e	+ 14
7e	+ 13	17	— 7	27	+ 3
8	+ 2	18e	+ 12	28	— 8
9	— 9	19	+ 1	29e	+ 11
10e	+ 10	20	— 10	30	0

On voit qu'à la 15e année, l'écart final devient — 15 ou + 15, selon que l'on veut la faire commune ou embolime. Le choix est donc libre entre ces deux partis, sous la condition d'appliquer ou de ne pas appliquer l'embolisme à l'année suivante, c'est-à-dire à la 16e. D'après les expressions d'Ulugbeg (*Ép. cel.*, c. I), le premier mode, qui fait porter l'embolisme sur la 15e, semble être le plus généralement usité.

175. Toutes les années, tant communes qu'embolimes, ont 12 mois, procédant par alternatives de 30 et de 29 jours, ce qui fait en somme 354. Lorsqu'elles doivent en contenir occasionnellement 355, le jour additionnel s'applique à la fin du douzième mois, qui en prend 30 alors.

Voici le tableau complet des mois qui composent une année arabe :

TABLEAU I.

RANG ORDINAL DES MOIS.	LEURS DÉNOMINATIONS.	LEUR DURÉE individuelle en jours.	SOMME DES JOURS écoulés à la fin de chacun d'eux.	RANG ORDINAL DES MOIS.	LEURS DÉNOMINATIONS.	LEUR DURÉE individuelle en jours.	SOMME DES JOURS écoulés à la fin de chacun d'eux.
1	Moharram.	30	30	7	Rajab.	30	207
2	Safar.	29	59	8	Shaaban.	29	236
3	Rabi I.	30	89	9	Ramadân.	30	266
4	Rabi II.	29	118	10	Shouâl.	29	295
5	Jomadi I.	30	148	11	Dulkaadab.	30	325
6	Jomadi II.	29	177	12	Dulheggiah.	29	354
				Années embolimes.	Dulheggiah.	30	355

176. A ce tableau il est utile d'en joindre un autre, présentant par ordre la somme des jours écoulés depuis l'origine d'une période de 30 ans arabes, jusqu'à la fin de chacune des années, tant communes qu'embolimes, qui la composent. Je marque celles-ci de la lettre *e*, comme précédemment, et j'applique l'embolisme à la 15^{e}, selon l'usage le plus commun.

TABLEAU II.

RANG ordinal DES ANNÉES de la période.	SOMME des JOURS ÉCOULÉS à la fin de chacune d'elles.	RANG ordinal DES ANNÉES de la période.	SOMME des JOURS ÉCOULÉS à la fin de chacune d'elles.	RANG ordinal DES ANNÉES de la période.	SOMME des JOURS ÉCOULÉS à la fin de chacune d'elles.
1	354	11	3898	21e	7442
2e	709	12	4252	22	7796
3	1063	13e	4607	23	8150
4	1417	14	4961	24e	8505
5e	1772	15e	5316	25	8859
6	2126	16	5670	26e	9214
7e	2481	17	6024	27	9568
8	2835	18e	6379	28	9922
9	3189	19	6733	29e	10277
10e	3544	20	7087	30	10631

Nota. Si l'on avait transporté l'embolisme de la 15e année à la 16e, le nombre placé devant 15 serait 5315 au lieu de 5316. Les autres ne changeraient pas.

177. Avant d'employer les documents contenus dans les tableaux I et II à la transformation des dates arabes en dates juliennes, je dois justifier l'époque absolue que j'ai attribuée à l'hégire qui leur sert de point de départ.

Je l'ai établie sur les témoignages unanimes d'Alfergani, Ebn-Jounis, et Ulugbeig, confirmés par leurs propres calculs, et par ceux de tous les astronomes orientaux. Ces auteurs s'accordent pour attester que l'ère *astronomique* de l'hégire est antérieure à celle d'Iezdejerd de 3624 jours complets, formant 9 années vagues, persanes ou égyptiennes, plus 339 jours. Or, suivant ce que j'ai établi, page 359, d'après leur

commune assertion, la date égyptienne de l'ère d'Iezdejerd est :

Année de Nabonassar 1380, jour 91^{e}, à midi vrai.

Otez de là..... 9^{a} + 339^{j}

Vous aurez :

Date égyptienne de l'hégire : année de Nabonassar 1370, jour 117^{e}, à midi vrai.

Il faut maintenant convertir cette indication en date julienne. Pour cela notre tableau de la page 280 nous forme la concordance suivante :

Année de Nabonassar 1370, 1er Thot, à midi vrai = 5335^{e}, 21 mars, jour 80^{e}, à 12^{h} vraies.

Ajoutez des deux parts :

Jours complets..... 116 116

Vous aurez :

Année de Nabonassar 1370, jour 117^{e}, à midi vrai = 5335^{e}, 15 juillet, jour 196^{e}, à 12^{h} vraies.

Telle est donc la concordance initiale de l'hégire avec le calendrier julien, qui se déduit des auteurs arabes eux-mêmes. Mais, pour en bien interpréter la signification, et aussi pour en faire un usage pratique, il faut remplacer, dans son premier membre, les éléments égyptiens par les éléments arabes qui leur sont équivalents. Le jour civil égyptien, ici énoncé, commence au lever du soleil ; le jour civil arabe qui a le même midi a dû commencer au coucher précédent de cet astre. Puisqu'il est le 1er de l'hégire, on peut le substituer à l'égyptien avec ce caractère initial, en lui attribuant son origine propre. La concordance ne sera point troublée par cette substitution, puisqu'elle est établie pour l'instant de midi, qui leur est commun. On aura alors, dans ce nouvel énoncé :

Année de l'hégire 1, jour 1er, à midi vrai = 5335^{e}, 15 juillet, jour 196^{e}, à 12^{h} vraies ;

ou, en retranchant de chaque membre 12^h :

(3) Année de l'hégire 1, jour 1^{er}, à minuit vrai = 5335^e, 15 juillet, jour 196^e, à 0^h.

C'est la forme sous laquelle je l'ai présentée en tête de ce chapitre, parce qu'elle est plus commode pour les applications quand le jour civil commence au coucher du soleil. Je l'ai déjà employée pour les années des Séleucides par le même motif.

178. Il ne sera pas inutile de confirmer cette concordance par un détail que les auteurs arabes ne manquent jamais d'y annexer. C'est l'indication du jour de la semaine chrétienne qui contient le midi du 1^{er} jour arabe de l'hégire. Nous le découvrirons, d'après la date julienne que nous venons d'obtenir, en suivant la règle générale établie pour cette recherche dans la page 241. Divisant donc d'abord 5335 par 28, nombre des années du cycle solaire, on trouve pour quotient 190, et pour reste 15. Ce reste, porté dans le tableau de la page 240, nous montre que l'année julienne 5335 a commencé par un vendredi. Le quantième ordinal du jour désigné, 196, étant ensuite divisé par 7, donne pour quotient 28 sans reste. Conséquemment ce jour, 15 juillet, terminait une période hebdomadaire commencée, comme la première, par un vendredi. C'était donc un jeudi julien. Tel est aussi le caractère que lui donnent les auteurs que j'ai cités. Mais il faut bien prendre garde que la concordance de ce jeudi avec le 1^{er} jour civil de l'hégire a lieu seulement dans la portion de ce dernier qui est ultérieure à minuit. Car, selon l'usage arabe, ce 1^{er} jour civil ayant dû commencer au coucher du soleil, toute la portion de sa durée qui était antérieure à minuit était comprise dans les dernières heures du 14 juillet julien précédent,

lequel avait son origine au minuit antérieur. La spécification de l'heure pour laquelle on établit sa concordance avec le jeudi est donc indispensable dans une définition précise; et l'on ne saurait croire combien l'omission trop commune de cette circonstance a occasionné de vague, d'obscurité, ou même de méprises, dans la plupart des énoncés européens.

179. Les Arabes appellent l'hégire l'*Ère de la fuite*, parce qu'ils admettent que la 1^er^ année lunaire qui en dérive, contient l'époque à laquelle Mahomet se réfugia de la Mecque à Médine, fuyant ses persécuteurs. Mais le calcul donne une présomption presque certaine que l'ère elle-même, telle que les auteurs arabes l'emploient, a été choisie *astronomiquement*, d'après des conditions tout à fait pareilles à celles qui avaient servi pour l'établissement des périodes lunaires grecques. En effet, suivant les tables de M. Largeteau, le solstice d'été de l'année julienne 5335 eut lieu le 20 juin vers 3^h^ du matin sous le méridien de la Mecque; et la première conjonction vraie de la lune avec le soleil, qui suivit ce solstice, eut lieu le 14 juillet vers 8^h^ du matin, sous le même méridien, le temps étant toujours compté de minuit. C'est au soir même de ce 14 juillet, au coucher du soleil, que commence le 1^er^ jour arabe de l'hégire, comme les concordances précédemment calculées nous l'ont fait découvrir. La première apparition du croissant lumineux put-elle devenir perceptible ce même soir? Ou prit-on, sciemment, son existence mathématique comme un indice suffisant de son existence phénoménale? Cela ne nous importe pas à savoir; d'autant que ce choix d'origine dut être, sans doute, décidé postérieurement au fait, d'après un calcul rétrospectif. Il nous suffit d'avoir établi les circonstances astronomiques, qui

caractérisent l'époque admise ainsi pour ère, et d'avoir exposé exactement les règles numériques d'après lesquelles les dates arabes en dérivent, sans discuter les traditions historiques ou religieuses qu'on a pu vouloir y rattacher. Nous n'avons plus qu'à suivre fidèlement ces principes dans les applications.

180. Le calendrier arabe et le calendrier julien étant assujettis à des intermittences d'intercalation qui leur sont propres, et qui ont des lois très-dissemblables, le transport des dates, de l'un dans l'autre, ne peut s'effectuer que par un double travail de décomposition et de recomposition, qui a toujours pour point de départ une des concordances que j'ai tout à l'heure établies. J'admettrai d'abord que l'on choisit celle qui est relative à l'instant de minuit, et que j'ai désignée par (3), page 460. C'est la même que j'avais présentée en tête du chapitre. Alors la traduction des dates arabes en dates juliennes s'obtiendra par les règles suivantes, qui portent en elles-mêmes leur démonstration.

Une date arabe étant donnée, le fait qu'elle marque sera postérieur au minuit du jour civil désigné, ou lui sera antérieur.

S'il est postérieur, conservez l'énoncé du jour civil, et rapportez le fait à son minuit, en y ajoutant le nombre d'heures écoulées depuis cet instant.

Si, au contraire, le fait énoncé est antérieur au minuit du jour civil désigné, rapportez-le, de la même manière, au minuit du jour civil précédent, auquel vous ajouterez les heures ultérieurement écoulées, en les comptant continûment de 0^h à 24^h.

Soit h le nombre d'heures, ou, en général, la fraction de jour reconnue comme additive au minuit ainsi spécifié :

Cherchez alors le nombre de jours complets qui se sont écoulés, depuis ce minuit, jusqu'au minuit pour lequel la concordance initiale (3) a été établie. J'expliquerai, dans un moment, les détails de cette opération. Soit n le nombre qu'elle donne. La date julienne correspondante à la date arabe sera :

Année 5335^{e}, jour 196^{e} + n + h, le temps étant compté de minuit.

Il ne restera plus qu'à grouper la somme totale des jours explicitement exprimés, de manière à en composer des années intercalées à la manière julienne, qui fassent suite à 5334^{e}. Ce sera l'objet d'une dernière opération que j'aurai pareillement à exposer.

181. Mais, avant d'appliquer ces règles, j'ai besoin de faire remarquer que la concordance (3), établie pour minuit, ne se déduit légitimement de la précédente (2), avec l'application aux mêmes quantièmes de jour, qu'autant que les jours civils désignés dans le premier membre ont effectivement leurs origines conventionnelles antérieures au minuit auquel on les rapporte, ou placées à ce minuit même, comme cela a lieu pour les jours juliens. Car, si cette condition n'était pas remplie, la soustraction des 12^{h} de chaque membre de la concordance établie pour midi ne pourrait pas se faire en conservant dans le premier membre le même quantième de jour qu'on y avait introduit auparavant. D'après cela, s'il arrivait qu'un auteur arabe eût occasionnellement omis de conformer les énoncés de dates de l'hégire à cette règle conventionnelle de leur origine que notre concordance (3) suppose, les dates juliennes qu'on obtiendrait en la leur appliquant pourraient se trouver en erreur d'un jour.

Ce cas se présente fréquemment dans Ebn-Jounis, pour les dates de l'hégire qu'il applique à des observations de nuit. Non-seulement elles ne sont pas adaptées à l'origine civile régulière du jour arabe, mais elles ne s'en écartent pas toujours suivant un même principe, ou du moins je n'ai pas trouvé le moyen de les y ramener. Cette difficulté avait été déjà remarquée par Ideler. On rectifie aisément ces indications par l'emploi des autres sortes de dates qu'Ebn-Jounis annexe constamment à celles-là ; comme aussi en les raccordant avec les époques absolues tirées de nos tables astronomiques, lorsque le phénomène mentionné est de nature à ne pas pouvoir comporter dans l'observation une erreur d'un jour. Au reste, Ebn-Jounis paraît avoir senti les inexactitudes d'interprétation que ce genre de dates pouvait introduire dans ses énoncés ; car il les accompagne habituellement de concordances nombreuses qui peuvent au besoin les suppléer. Même il semble en faire peu de compte, ou désirer de les éviter ; car le plus souvent il ne mentionne que le mois de l'hégire dans lequel l'observation a été faite, sans mentionner le jour de ce mois. Mais surtout, pour les observations de nuit, il ne manque jamais d'indiquer très-exactement le jour de la semaine *qui suit* cette nuit-là; ce qui suffit pour achever de la définir avec une certitude complète.

182. Ces explications étant données, je passe aux applications, en commençant par les observations de jour, dont l'énoncé ne présente aucune des incertitudes que je viens de signaler.

Le premier exemple que je choisirai me fournira l'occasion d'exposer, en détail, les deux opérations distinctes de calcul numérique qu'il est nécessaire d'effectuer, pour ré-

duire à la forme julienne une date astronomique exprimée en années, mois et jours de l'hégire. Cet exemple est relatif à une éclipse de soleil qu'Ebn-Jounis dit avoir observée au Caire, en l'an 383 de l'hégire, dans la matinée du 29 de Joumadi II. Le commencement, conclu de la hauteur observée du soleil, eut lieu $4^h\ 18^m\ 18^s$ avant le midi de ce jour.

L'observation étant postérieure au minuit du 29 civil, ce quantième doit être conservé dans le calcul de réduction. Les heures écoulées, ultérieurement à ce même minuit, seront le complément de $4^h\ 18^m\ 18^s$ à 12^h. La date astronomique sera ainsi :

Année de l'hégire 383, 29 Joumadi II, à $7^h\ 41^m\ 42^s$, temps compté de minuit.

Depuis le minuit initial jusqu'au minuit terminal, d'où l'on compte ici les heures, il s'est écoulé 382 années arabes complètes, plus la portion de la 383^e qui, partant de son origine, comprend les 28 premières révolutions entières, comptées de minuit à minuit, appartenant au mois Joumadi II. Pour convertir les années en jours de 24 heures, divisez d'abord leur nombre 382 par 30 ; et ayant trouvé pour quotient 12, plus 22 pour reste, remplacez le tout par l'expression équivalente $12.30^a + 22^a$. Vous verrez alors que le nombre donné contient, en premier lieu, 12 périodes entières de trente ans arabes, chacune de 10631 jours, dont le produit total est facile à évaluer directement. Les 22 ans de reste, qui appartiennent à la 13^e période, et qui commencent à son origine, vous seront donnés en jours de 24 heures par la table II. Enfin, la fraction d'année arabe, qui s'étend jusqu'au 28 de Joumadi 11 inclusivement, vous sera donnée sous la même forme par la table I. Vous

n'aurez qu'à faire la somme de ces trois quantités, ce sera le nombre que nous avons désigné par n. Voici le spécimen du calcul, qui servira de modèle pour tous les autres cas :

Périodes entières de 30 ans; 12. Produit en jours, 12. 10631...	127572
22 ans complets; tableau II.....	7796
Mois révolus antérieurement à Joumadi II, 5 : durée en jours par la table I.....	148
Révolutions entières de minuit à minuit, appartenant à Joumadi II.....	28
Nombre total de jours de 24^h, écoulés depuis le minuit initial, jusqu'au minuit du 29 Joumadi II..... $n =$	135544
Ajoutez le nombre de jours révolus, depuis le minuit où commence l'année julienne 5335^e, jusqu'au minuit initial de l'hégire.	195
Vous aurez pour somme totale.....	135739

Alors la date julienne de l'observation sera :

Année de la période julienne 5335^e, jour 135740^e, $7^h\,41^m\,42^s$, temps compté de minuit.

183. Il reste maintenant, à recomposer le nombre explicite des jours en années juliennes intercalées, faisant suite aux 5534 antérieurement accomplies. Pour cela il faut se rappeler que l'année 1 de la période julienne est bissextile. Ainsi, les quatre premières de cette période, prises ensemble, forment une somme complète de 1461 jours, qui se répète continuement à la fin de chaque tétrade ultérieure. De sorte que, toute année dont le rang ordinal est divisible par 4, se termine après un nombre entier de tétrades révolues, au delà duquel l'intercalation reprend son cours, en recommençant par une année bissextile, comme à l'origine de la période. Ici, par exemple, l'année qui termine la dernière tétrade,

immédiatement antérieure à celle qui comprend 5335, est 5232. Depuis sa fin, jusqu'au commencement de 5335, il y a d'abord l'année 5333 qui est bissextile, et contient 366 jours. Ensuite vient l'année 5334, qui est commune, et contient 365 jours : cela fait en tout 731 jours. Retirant donc cette somme du nombre des années pour la joindre au nombre des jours déjà exprimés explicitement, la date julienne de l'observation pourra s'écrire de la manière suivante :

Année de la période julienne 5333^{B}, jour 136471^{e}, $7^{h}\,41^{m}\,42^{s}$, temps compté de minuit.

Alors, la recomposition des jours révolus, en années juliennes intercalées, devient bien facile. Car il n'y a qu'à diviser leur nombre total 136470, par 1461, pour en extraire les tétrades entières, qui ajouteront autant de fois 4 au nombre ordinal primitif 5333, et conduiront encore à une année bissextile commençante. Puis, du reste de la division, nécessairement moindre que 1461, on extraira une, deux, ou au plus trois années complètes, dont la première devra être faite bissextile, les autres communes ; et l'on ajoutera leur nombre au nombre ordinal déjà fourni par les tétrades seules. Le surplus des jours se rangera dans l'année commencée, conformément au caractère propre que son rang ordinal lui assignera.

Par exemple, 136740, divisé par 1461, donne au quotient $93^{T} + 597^{j}$. Les 93 tétrades fournissent 372 ans juliens complets. Les 597 jours de reste fournissent une seule année entière de 366 jours, plus 231 jours révolus. L'année courante à laquelle cet excédant appartient aura donc pour rang ordinal $5333 + 372 + 1$, ou 5706^{e} ; elle sera commune, et je la

marque comme telle. Les 231 jours révolus depuis son origine nous conduisent au 232^{e} jour ; ou, pour parler plus exactement, au 232^{e} minuit, comme étant celui duquel partent les heures excédantes h. La date julienne de l'observation sera ainsi :

Année de la période julienne 5706^{c}, 20 août, jour 232^{e}, à $7^{h}\,41^{m}\,42^{s}$, temps compté de minuit.

C'est identiquement celle que nous avons déjà déduite, pages 326, 342 et 364, des autres formes sous lesquelles Ebn-Jounis l'a énoncée.

184. Les explications que je viens de donner me permettront d'être plus bref pour les exemples suivants ; je n'aurai presque qu'à présenter les détails figurés des calculs individuels qui s'y rapportent.

Le premier sera encore une éclipse de soleil observée par Ebn-Jounis au Caire, en l'année 394 de l'hégire, le 29 du mois Rabi I. Le commencement eut lieu à $3^{h}\,40^{m}\,20^{s}$ de temps vrai, après le midi du 29, à en juger d'après la hauteur que le soleil avait alors.

L'observation étant postérieure au minuit du jour civil désigné, il faut le conserver dans le calcul. La date astronomique sera donc :

Année de l'hégire 394, le 29 de Rabi I, à $15^{h}\,40^{m}\,20^{s}$, temps compté de minuit.

Ici, le nombre des années révolues est 393. Divisé par 30, il se résout en $13.30^{a} + 3^{a}$; c'est-à-dire 13 périodes complètes de 30 ans, plus 3 années. Alors le calcul des jours révolus, depuis le commencement de 5333 s'effectue comme il suit :

13 périodes entières de 30 ans arabes. Produit en jours, 13. 10631^{j}.	138203^{j}
3 ans : tableau II	1063
Mois révolus, 2. Fin de Safar ; tableau I	59
Jours révolus de Rabi I, comptés de minuit à minuit	28
Réduction au commencement de 5333, 195^{j} + 731^{j}, en somme 926^{j}. Constante additive	926
Somme totale des jours de 24^{h}, écoulés depuis le minuit initial de 5333 jusqu'au minuit du 29 Rabi I désigné	140279^{j}

Date julienne de l'observation, rapportée à 5333^{B} :

Année de la période julienne 5333^{B}, jour 140280^{e}, 15^{h} 40^{m} 20^{s}, temps compté de minuit.

Le nombre des jours révolus 140279, étant divisé par 1461, se résout en 96^{T} + 23^{j}, où T indique des tétrades juliennes complètes. Les 96 tétrades forment 384 ans intercalés ; et le reste 23 jours, étant moindre que 366, exprimera les jours révolus de l'année finale courante. La date julienne définitive sera donc :

Année de la période julienne 5717^{B}, 24 janvier, jour 24^{e}, 15^{h} 40^{m} 20^{s}, temps compté de minuit.

C'est encore identiquement celle que nous avons déjà déduite, pages 324, 341 et 367, des autres formes sous lesquelles Ebn-Jounis avait énoncé la même observation.

185. Enfin, comme dernière application à des observations de jour, je choisis une autre éclipse de soleil qu'Ebn-Jounis dit avoir également observée au Caire, et à laquelle il assigne pour date arabe la septième férie, 29 du mois Shoual, an 367 de l'hégire. Le commencement eut lieu à 2^{h} 28^{m} 19^{s}, la fin à 4^{h} 47^{m} 45^{s} de temps vrai après le midi de ce jour ; ces époques étaient conclues des hauteurs mesurées.

Si l'on désigne par h les heures des deux phases, comptées de midi, leur date astronomique sera :

Année de l'hégire 367, le 29 Shoual, à $12^h + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Ici, le nombre des années révolues est 366. Divisé par 30, il se résout en $12\ 30^a + 6^a$; c'est-à-dire, en 12 périodes complètes de 30 ans, plus 6 années. Alors, l'énumération des jours écoulés, depuis le commencement de l'année julienne 5333^B, s'effectue comme il suit :

12 périodes de 30 ans. Produit en jours, 12.10631.....	127572
6 ans : tableau II.....	2126
Mois révolus, 9. Fin de Ramadan.....	266
Jours révolus de Shoual, comptés de minuit à minuit.....	28
Réduction au commencement de 5333^B. Constante additive...	926
Somme totale des jours de 24^h, écoulés depuis le minuit initial de 5333^B, jusqu'au minuit du 29 Shoual désigné.....	130918^j

Date julienne de l'observation rapportée à l'année 5333^B :

Année de la période julienne 5333^B, jour 130919^e, $12^h + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Le nombre des jours révolus 130918, étant divisé par 1461, se résout en $89^T + 889^j$. Les 89^T forment 356 années juliennes intercalées. Les 889 jours restants se décomposent, par soustraction successive, en $366^j + 365^j + 158^j$. Ils fournissent ainsi 2 années complètes, faisant suite à celles des tétrades : ce qui en porte le nombre total à 358, immédiatement additif à 5333^B. La date julienne définitive des deux phases extrêmes de l'éclipse sera donc :

Année de la période julienne 5691^e, jour 159^e, 8 juin, à $12^h + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est encore exactement la même que nous avons précédemment déduite, pages 328, 342 et 365, des autres formes sous lesquelles Ebn-Jounis l'avait présentée.

186. En divisant 5691 par 28, on trouve au quotient 203, avec le reste 7. Ce reste, porté dans le tableau du cycle solaire page 240, montre que l'année 5691 a eu pour premier jour un mardi. Divisant ensuite le quantième du jour, 159, par 7, on a au quotient 22, plus 5 de reste. Ce jour était donc le 5^{e} d'une période hebdomadaire commençant par un mardi. C'était donc un samedi, qui est en effet la septième férie, c'est-à-dire le septième jour de la semaine commençant à un dimanche, conformément au caractère ordinal que lui attribue Ebn-Jounis.

187. Ces trois exemples m'ont paru suffisants, mais tous trois nécessaires, pour constater complétement l'exactitude de la méthode, par laquelle nous sommes parvenus à convertir en dates juliennes les dates de l'hégire, appliquées par cet auteur aux observations faites pendant le jour. Les dates analogues qu'il applique aux observations de nuit ne se prêtent pas à un mode d'interprétation aussi uniforme. Mais on va voir qu'en s'aidant des tables abrégées de M. Largeteau, dont l'emploi est si facile, on peut toujours leur donner leur véritable sens, qui se trouve ensuite confirmé par les indications auxiliaires dont ces dates sont constamment accompagnées.

188. Voici un premier exemple qui présentera le type général de ces énoncés, sous leur forme la moins ambiguë. Il s'agit d'une éclipse de lune. Le texte porte qu'elle eut lieu « la nuit d'avant la 2^{e} férie, 15 de Rabi II, an 392 de l'hé-« gire, *qui était* le 17 Asfendarmed de l'an 370 d'Iezdejerd. »

(*Notice des manuscrits*, tome VII, page 192.) D'après des indications de hauteurs d'étoiles, dont l'identification n'est pas exempte d'incertitude, Bouvard trouve le commencement de l'éclipse à $0^h\ 30^m\ 54^s$ de temps vrai, avant minuit. (*Mémoires de l'Institut*, tome II, page 10.)

Je considère d'abord la date persane. Le 17 Asfendarmed qu'elle mentionne, est le jour persan, commençant au lever du soleil *qui a suivi* la nuit de l'observation. Cette nuit appartenait donc au 16 Asfendarmed civil, et le commencement de l'éclipse s'y trouvait placé à $12^h - 0^h\ 30^m\ 54^s$, ou $11^h\ 29^m\ 6^s$, après le midi de ce 16. La date astronomique sera ainsi :

Année d'Iezdejerd 370, 16 Asfendarmed, jour 351^e, à $11^h\ 29^m\ 6^s$, temps vrai, compté de midi au Caire.

D'après les principes de conversion établis précédemment, page 363, l'année correspondante de Nabonassar est $1379 + 370$, ou 1749, avec le quantième de jour $90 + 351$, ou 441, qui se décompose en $365 + 76$. La date égyptienne vague sera ainsi :

Année de Nabonassar 1750, jour 76^e, à $11^h\ 29^m\ 6^s$, temps vrai, compté de midi au Caire.

et de là, par la table de concordance dressée page 280, on tire cette date équivalente :

Année de la période julienne 5715^e, jour 60^e, 1er mars, à $23^h\ 29^m\ 6^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

En effet, les tables de M. Largeteau indiquent, dans cette même année julienne, une conjonction écliptique, ayant eu lieu pour Paris, le 1er mars à 23 heures temps moyen, compté de minuit; ce qui la met, pour le Caire, à $23^h + 1^h\ 55^m\ 41^s$;

conséquemment, au 2 mars à $0^h 55^m 41^s$ de temps moyen, également compté de minuit. Le commencement de l'éclipse observée par Ebn-Jounis devait nécessairement être antérieur à cette phase médiane ; aussi le trouve-t-on tel par les indications qu'il en donne. Notre interprétation de la date persane est donc fidèle.

189. Elle est confirmée par la désignation du jour de la férie. En effet, 5715 divisé par 28 donne au quotient 204, avec 3 pour reste. Avec ce dernier nombre, la table du cycle solaire, page 240, montre que l'année 5715 a eu pour premier jour un jeudi. Divisant ensuite le quantième de jour 60 par 7, on a au quotient 8, et pour reste 4. Ce jour était donc le quatrième d'une période hebdomadaire commençant par un jeudi ; c'était donc un dimanche, veille du lundi, c'est-à-dire de la 2e férie, comme Ebn-Jounis l'a désigné.

190. Ceci nous apprend que, dans l'énoncé de la date de l'hégire, le 15 Rabi II est mentionné comme concourant avec la 2e férie qui va suivre la nuit de l'observation. Il a dû commencer à l'entrée de cette même nuit au coucher du soleil. L'observation est antérieure à son minuit ; il faut donc la prendre, astronomiquement, comme postérieure au minuit du 14. Sa date arabe ainsi définie sera donc :

Année de l'hégire 392, 14 Rabi II, à $23^h 29^m 6^s$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Ici, le nombre des années révolues est 391, qui se résout en $13.30^a + 1^a$, c'est-à-dire en 13 périodes entières de 30 ans, plus une année. Alors, l'énumération des jours révolus depuis le commencement de 5333^B s'effectue comme il suit :

13 périodes entières de 30 ans arabes. Produit en jours, 13.10631^{j}.	138203^{j}
1 an : tableau II.	354
Fin de Rabi I : table I.	89
Jours écoulés de Rabi II, comptés de minuit à minuit.	13
Réduction au commencement de 5333^{B}. Constante additive. . .	926
Somme totale des jours de 24^{h}, écoulés depuis le minuit initial de 5333^{B} jusqu'au minuit du 14 Rabi II désigné.	139585^{j}

Date julienne de l'observation rapportée à l'année 5333^{B} :

Année de la période julienne 5333^{B}, jour 139586^{e}, à 23^{h} 29^{m} 6^{s}, temps vrai, compté de midi au Caire.

Le nombre des jours révolus 139585, étant divisé par 1461, se résout en 95^{T} + 790^{j}. Les 95^{T} forment 380 années juliennes intercalées. Les 790 jours restants se décomposent, par soustraction successive, en 366^{j} + 365^{j} + 59^{j}. Ils fournissent ainsi deux années complètes faisant suite à celles des tétrades, ce qui en porte le nombre total à 382, immédiatement additives à 5333^{B}. La date julienne définitive de l'observation sera ainsi :

Année de la période julienne 5715^{e}, jour 60^{e}, 1er mars, à 23^{h} 29^{m} 6^{s}, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est exactement ce que nous avons déduit tout à l'heure de la date persane ; et nous avons vu que l'indication de la férie, ainsi que les tables astronomiques, confirment ce résultat.

191. L'exemple suivant, également relatif à une éclipse de lune observée au Caire, nous offrira un énoncé moins nettement défini de la date arabe. Le texte porte qu'elle eut lieu « dans le mois de Rabi II, l'année 369 de l'hégire, la nuit « d'avant la VI^{e} férie, 13 du mois. *Ce jour était* le 21 Aban de « l'an 368 d'Iezdejerd. » Viennent ensuite d'autres concordan-

ces. Le commencement et la fin, conclus des hauteurs de la lune, furent observés respectivement à $10^h\,23^m\,25^s$ et $13^h\,37^m\,38^s$, temps vrai, compté de midi au Caire. (*Notice des manuscrits,* tome VII, page 184.)

Les mots « ce jour-là » se rapportent évidemment à la VI^e férie, désignée comme succédant à la nuit de l'observation. L'indication du quantième 13, du mois Rabi II, semblerait donc devoir aussi désigner le jour civil, commencé à l'entrée de cette même nuit, au coucher du soleil, avec lequel la VI^e férie a dû concourir. Mais le calcul montre que, soit par une inadvertance de l'auteur, soit par une faute de transcription, ce 13 Rabi II doit être entendu ici astronomiquement, comme contenant le minuit antérieur auquel l'observation fait suite. De sorte qu'en nommant h l'une ou l'autre des heures ci-dessus énoncées à partir de midi, la date astronomique de l'observation correspondante est :

Année de l'hégire 369, 13 de Rabi II, à $12^h + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Suivons cette interprétation. Le nombre des années arabes révolues, 368, se résout en $12.30^a + 8^a$. Ainsi, l'énumération des jours révolus depuis le commencement de 5333^B s'obtient de la manière suivante :

12 périodes complètes de 30 ans arabes. Produit en jours : 12.10631.	127572'
8 ans arabes révolus : table II.	2835
3 mois révolus. Fin de Rabi I.	89
Jours révolus de Rabi II, comptés de minuit à minuit.	12
Réduction au commencement de 5333^B. Constante additive. . .	926
Somme totale des jours écoulés depuis le minuit initial de 5333^B jusqu'au minuit du 13 Rabi II désigné.	131434'

Date julienne de l'observation rapportée à 5333^{B} :

Année de la période julienne 5333^{B}, jour 131435^{e}, à $12^{h} + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

Le nombre des jours révolus 131434, étant divisé par 1461, se résout en $89^{T} + 1405^{j}$. Les 89^{T} forment 356 années juliennes intercalées. Les 1405 jours restants se décomposent, par soustraction successive, en $366^{j} + 365^{j} + 365^{j} + 309^{j}$. Ils fournissent ainsi 3 années complètes, faisant suite à celles des tétrades. Cela en porte le nombre total à 359, immédiatement additives à 5333^{B}. La date julienne définitive sera ainsi :

Année de la période julienne 5692^{e}, jour 310^{e}, 6 novembre, à $12^{h} + h$, temps vrai, compté de minuit au Caire.

C'est exactement ce que nous avons aussi conclu, pages 334, 344 et 370, des autres formes de dates attachées à cette éclipse par Ebn-Jounis.

Ces exemples me paraissent suffire pour que l'on puisse, dans tous les cas, interpréter et traduire exactement les dates d'observations, tant de nuit que de jour, qui sont données par Ebn-Jounis en années de l'hégire. La même méthode servira pour les énoncés analogues des autres auteurs arabes, en prenant soin de constater les modifications particulières et conventionnelles que chacun d'eux pourrait avoir eu l'habitude d'y introduire.

TABLES ABRÉGÉES

POUR LE

CALCUL DES ÉQUINOXES

ET DES SOLSTICES;

PAR M. C. L. LARGETEAU.

Les recherches chronologiques exigent très-souvent la connaissance de l'époque à laquelle ont eu lieu des phases cardinales de l'année solaire, c'est-à-dire des équinoxes et des solstices qu'il suffit d'avoir avec certitude à quelques minutes de temps près. Mais pour les déduire des Tables solaires avec ce degré d'approximation, il faut faire un calcul aussi complet que pour une détermination astronomique, ce qui, outre l'habitude pratique des Tables qu'un tel calcul exige, entraîne aussi un travail superflu. Le désir de simplifier ces recherches approximatives m'a engagé à faire pour les Tables du Soleil une abréviation du même genre que celle que j'ai faite pour les Tables de la Lune; la forme seule en est et devait être différente. Ici, avec un calcul arithmétique très-court, on obtiendra toujours l'époque d'un

équinoxe ou d'un solstice à quelques minutes près, pour telle année julienne que l'on voudra assigner dans les limites de quarante siècles avant et de vingt siècles après l'ère chrétienne. Et ces approximations ne seront pas inutiles, même aux astronomes, car les dates qu'elles leur fourniront ainsi en quelques instants abrégeront notablement le calcul complet qu'ils devront faire s'ils ont besoin d'obtenir avec une rigueur astronomique les mêmes déterminations.

Mes Tables étant surtout destinées à la supputation des temps anciens, j'ai exprimé les dates qui servent d'arguments en années de la période julienne à laquelle on a l'habitude de comparer les divers calendriers, et dont l'étendue dépasse les plus anciennes époques historiques. L'origine des années de cette période julienne coïncide, dans toute l'étendue de mes Tables, avec celle des années du calendrier julien; en sorte que si l'on veut se servir de mes Tables pour calculer un solstice ou un équinoxe postérieur au 4 octobre 1582, il faudra, après avoir obtenu le résultat donné par les Tables, ajouter à ce résultat le nombre de jours exprimant la différence entre les dates julienne et grégorienne. Les heures sont comptées de 0 à 24 à partir de minuit au méridien de Paris.

La Table I contient des dates telles que celles-ci :

$$\text{mars } 60^{j}\,5^{h}\,50^{m}\,46^{s}.$$

Cette manière de s'exprimer est l'équivalent de la suivante :

$$\text{le 29 avril à } 5^{h}\,50^{m}\,46^{s};$$

de même

$$\text{juin } 62^{j}\,1^{h}\,19^{m}\,14^{s}$$

peut être remplacé par

1^er août à 1^h 19^m 14^s.

J'ai adopté la première forme pour la continuité des expressions.

La première chose à faire avant de se servir des Tables, c'est de convertir une date julienne proposée en année de la période julienne ; voici la règle à suivre à cet égard :

Si l'année proposée est postérieure à l'ère chrétienne, ajoutez 4713 au nombre qui exprime l'année proposée, et vous aurez l'année correspondante de la période julienne.

Exemple. Le concile de Nicée a été tenu en l'an 325 de l'ère chrétienne ; quelle est l'année correspondante de la période julienne ? J'ajoute 4713 à 325, et la somme 5038 est l'année demandée.

Si l'année proposée est antérieure à l'ère chrétienne, retranchez de 4713 le nombre qui exprime cette année, le reste désignera l'année correspondante de la période julienne. Nous supposons ici que les années antérieures à l'ère chrétienne sont comptées selon l'usage des astronomes.

Exemple. La bataille d'Arbelles a été livrée en l'an — 330 (astronomique) ; quelle est l'année correspondante de la période julienne ? Je retranche 330 de 4713, et le reste 4383 est l'année demandée.

Si la date proposée et antérieure à l'ère chrétienne était exprimée suivant l'usage des chronologistes, c'est de 4714 qu'il faudrait retrancher le nombre exprimant cette date.

Les Tables des équinoxes et des solstices sont disposées d'une manière tout à fait semblable ; chaque Table I se compose de quantités constantes dont il faut retrancher les nombres obtenus à l'aide de la Table II, quantités constantes

que l'on choisit selon que l'année proposée est bissextile, ou la première, la deuxième, la troisième après la bissextile. Pour connaître le caractère de cette année rapportée à la période julienne, divisez par 4 le nombre exprimé par les deux derniers chiffres (à droite) de celui qui désigne l'année proposée : si le reste de la division est 1, ou si le nombre est de la forme $4n+1$, l'année proposée est bissextile; si le reste de la division est 2, l'année proposée est la première après la bissextile; si le reste est 3, l'année est la deuxième après la bissextile; enfin si la division par 4 se fait exactement, ou si le nombre qui exprime l'année est de la forme $4n$, l'année proposée est la troisième après la bissextile.

Dans chaque Table II on trouve deux nombres, D et δ. Le premier correspond aux années séculaires de la période julienne, et se prend avec ces mêmes années séculaires comme argument; le second, ou le nombre δ, convient à toutes les années comprises entre deux années séculaires consécutives, et doit être multiplié par le nombre dont l'année proposée surpasse l'année séculaire qui la précède immédiatement. Le produit ainsi obtenu, exprimant des secondes, doit être converti en heures, minutes et secondes, et ajouté au nombre D; la somme est ensuite retranchée de la quantité constante donnée par la Table I, et le reste est la date du solstice ou de l'équinoxe demandé.

Pour mieux faire comprendre l'usage des Tables, je vais calculer les équinoxes et les solstices de l'an -1779 astronomique, ou de l'an 2934 de la période julienne. Cette année est une de celles où l'année vague des Égyptiens s'est trouvée en concordance avec l'année solaire vraie. (*Voyez* Recherches de M. Biot sur l'année vague des Égyptiens.) En divisant 34

par 4, on a pour reste 2; l'année proposée est donc la première après la bissextile.

CALCUL DE L'ÉQUINOXE VERNAL.

L'année 2934 est comprise entre les années séculaires 2900 et 3000, et elle surpasse la première de 34; 34 est donc le nombre par lequel je dois multiplier la valeur de δ correspondante à l'intervalle compris entre les années séculaires consécutives 2900 et 3000. La Table II, équinoxe vernal, donne pour cette valeur de δ 0,688^s,39. Le produit par 34 est, en nombre entier, 23405 secondes. Il faut convertir ce nombre en heures, minutes et secondes. Pour cela, je divise 23405 par 60, j'ai le quotient 390 qui exprime des minutes, et le reste 5 qui représente des secondes; je divise encore par 60 le quotient 390 que je viens d'obtenir, et j'ai le second quotient 6 qui désigne des heures, et le reste 30 qui exprime des minutes; d'où je conclus

$$23405^s = 6^h\,30^m\,5^s.$$

Voici l'opération figurée :

23405	60		
540	390	60	
05	30	6	

On peut se dispenser de faire ces deux divisions, en recourant à la Table III qui donne la conversion faite par parties. Voici le type du calcul :

20000^s	=	5^h 33^m	20^s
3000	=	50	0
400	=	6	40
5	=		5
Somme	=	6^h 30^m	5^s

Le produit de δ par 34 est donc, dans le cas actuel, $6^h\ 30^m\ 5^s$, que je dois ajouter à la valeur de D donnée par la Table II vis-à-vis 2900, qui est l'année séculaire précédant immédiatement l'année proposée 2934.

D =	23^j	6^h	15^m	9^s
$34\,\delta$ =		6	30	5
Somme =	23^j	12^h	45^m	14^s

L'année proposée étant la première après la bissextile, je prends dans la Table I la quantité constante. . mars $60^j\ 11^h\ 50^m\ 46^s$

J'en retranche la somme $23\ 12\ 45\ 14$

Le reste = mars $36^j\ 23^h\ 5^m\ 32^s$
= avril $5^j\ 23^h\ 5^m\ 32^s$

est la date demandée de l'équinoxe vernal en l'an — 1779 (astronomique.

CALCUL DU SOLSTICE D'ÉTÉ.

La valeur de δ correspondante à l'intervalle compris entre les années séculaires 2900 et 3000 est $684^s,40$; le produit de ce nombre par $34 = 23270^s = 6^h\ 27^m\ 50^s$; avec 2900 comme argument, la Table II donne:

D =	22^j	0^h	45^m	29^s
$34\,\delta$ =		6	27	50
Somme =	22	7	13	19
Table I, quantité constante, juin	61	13	19	14

Différence = juin $39^j\ 6^h\ 5^m\ 55^s$
= juillet $9^j\ 6^h\ 5^m\ 55^s$

= Date du solstice d'été en l'an — 1779 (astronomique).

CALCUL DE L'ÉQUINOXE D'AUTOMNE.

La valeur de δ correspondante à l'intervalle compris entre les années séculaires 2900 et 3000 est $609^s,28$; le produit de ce nombre par $34 = 20716^s = 5^h\,45^m\,16^s$; avec 2900 comme argument, la Table II donne :

D =	19^j	21^h	16^m	18^s
$34\,\delta$ =		5	45	16
Somme =	20	3	1	34
Table I, quantité constante, septembre	58	8	1	4
Différence = septembre	38^j	4^h	59^m	30^s
= octobre	8^j	4^h	59^m	30^s

= Date de l'équinoxe d'automne en l'an — 1779 (astronomique).

CALCUL DU SOLSTICE D'HIVER.

La valeur de δ correspondante à l'intervalle compris entre les années séculaires 2900 et 3000 est $612^s,81$; le produit de ce nombre par $34 = 20836^s = 5^h\,47^m\,16^s$; avec 2900 comme argument, la Table II donne :

D =	21^j	0^h	55^m	2^s
$34\,\delta$ =		5	47	16
Somme =	21	6	42	18
Table I, quantité constante, décembre	56	20	55	31
Différence = décembre	35^j	14^h	13^m	13^s
= an — 1778, janvier	4^j	14^h	13^m	13^s

= Date du solstice d'hiver en l'an — 1778 (astronomique).

Dans cet exemple, le solstice d'hiver se trouve reporté au commencement de l'année qui suit celle que l'on a d'abord considérée. Si l'on veut la date du solstice d'hiver de l'année — 1779, il faut faire le calcul pour l'année 2933 de la période julienne.

ÉQUINOXE VERNAL.

TABLE I.

ANNÉE de la PÉRIODE JULIENNE.	QUANTITÉS CONSTANTES desquelles IL FAUT RETRANCHER LES NOMBRES DONNÉS PAR LA TABLE II.		
			j h m s
$4n + 1$	année bissextile	mars	60. 5.50.46
$4n + 2$	1re année après la bissextile	mars	60.11.50.46
$4n + 3$	2e année après la bissextile	mars	60.17.50.46
$4n$	3e année après la bissextile	mars	60.23.50.46

TABLE II. — Argument : année de la période julienne.

ANNÉES.	D.	δ.	ANNÉES.	D.	δ.
	j h m s	s		j h m s	s
700	5.14.45 44	694,18	3700	29.14.39.29	682,23
800	6.10. 2.42	694,35	3800	30. 9.36.32	681,36
900	7. 5.19.57	694,47	3900	31. 4.32. 8	680,46
1000	8. 0.37.24	694,54	4000	31.23.26.14	679,55
1100	8.19.54.58	694,58	4100	32.18.18.49	678,63
1200	9.15.12.36	694,58	4200	33.13. 9.52	677,69
1300	10.10.30.14	694,52	4300	34. 7.59.21	676,73
1400	11. 5.47.46	694,43	4400	35. 2.47.14	675,77
1500	12. 1. 5. 9	694,30	4500	35.21.33.31	674,79
1600	12.20.22.19	694,12	4600	36.16.18.10	673,81
1700	13.15.39.11	693,90	4700	37.11. 1.11	672,81
1800	14.10.55.41	693,65	4800	38. 5.42.32	671,82
1900	15. 6.11.46	693,35	4900	39. 0.22.14	670,81
2000	16. 1.27.21	693,01	5000	39.19. 0.15	669,81
2100	16.20.42.22	692,65	5100	40.13.36.36	668,79
2200	17.15.56.47	692,23	5200	41. 8.11.15	667,78
2300	18.11.10.30	691,78	5300	42. 2.44.13	666,77
2400	19. 6.23.28	691,31	5400	42.21.15.30	665,77
2500	20. 1.35.39	690,78	5500	43.15.45. 7	664,76
2600	20.20.46.57	690,23	5600	44.10.13. 3	663,77
2700	21.15.57.20	689,65	5700	45. 4.39.20	662,78
2800	22.11. 6.45	689,04	5800	45.23. 3.58	661,80
2900	23. 6.15. 9	688,39	5900	46.17.26.58	660,83
3000	24. 1.22.28	687,71	6000	47.11.48.21	659,86
3100	24.20.28.39	687,00	6100	48. 6. 8. 7	658,92
3200	25.15.33.39	686,27	6200	49. 0.26.19	657,98
3300	26.10.37.26	685,51	6300	49.18.42.57	657,06
3400	27. 5.39.57	684,72	6400	50.12.58. 3	656,16
3500	28. 0.41. 9	683,92	6500	51. 7.11.39	655,27
3600	28.19.41. 1	683,08	6600	52. 1.23.46	654,43
3700	29.14.39.29		6700	52.19.34.29	

SOLSTICE D'ÉTÉ.

TABLE I.

ANNÉE de la PÉRIODE JULIENNE.	QUANTITÉS CONSTANTES desquelles IL FAUT RETRANCHER LES NOMBRES DONNÉS PAR LA TABLE II.		
			j h m s
$4n+1$	année bissextile	juin	61. 7.19.14
$4n+2$	1re année après la bissextile	juin	61.13.19.14
$4n+3$	2e année après la bissextile	juin	61.19.19.14
$4n$	3e année après la bissextile	juin	62. 1.19.14

TABLE II. — Argument : année de la période julienne.

ANNÉES	D	δ.	ANNÉES.	D	δ.
	j h m s	″		j h m s	″
700	5. 3.29. 3	642,86	3700	28.10. 6. 2	696,87
800	5.21.20.29	644,81	3800	29. 5.27.29	698,28
900	6.15.15 10	646,77	3900	30. 0.51.17	699,63
1000	7. 9.13. 7	648,73	4000	30.20.17.20	700,95
1100	8. 3.14.20	650,70	4100	31.15.45.35	702.22
1200	8.21 18.50	652,68	4200	32.11.15.57	703,46
1300	9.15.26.38	654,64	4300	33. 6.48.23	704,64
1400	10. 9.37.42	656,61	4400	34. 2.22.47	705,78
1500	11. 3.52. 3	658,56	4500	34.21.59. 5	706,88
1600	11.22. 9.39	660,51	4600	35.17.37.13	707,92
1700	12.16.30.30	662,45	4700	36.13.17. 5	708,93
1800	13.10.54.35	664,37	4800	37. 8.58.38	709,89
1900	14. 5.21.52	666,28	4900	38. 4.41 47	710,80
2000	14 23.52.20	668,19	5000	39. 0.26.27	711,65
2100	15.18.25.59	670,07	5100	39.20.12 32	712,46
2200	16.13. 2.46	671,94	5200	40.15.59 58	713,23
2300	17. 7.42.40	673,79	5300	41.11.48.41	713,94
2400	18. 2.25.39	675,62	5400	42. 7.38.35	714,60
2500	18.21.11.41	677,42	5500	43. 3 29 35	715,20
2600	19.16. 0.43	679,21	5600	43.23.21.35	715,77
2700	20.10.52.44	680,96	5700	44.19.14.32	716,28
2800	21. 5.47.40	682,69	5800	45.15. 8.20	716,73
2900	22. 0.45.29	684,40	5900	46.11. 2.53	717.15
3000	22.19.46. 9	686,08	6000	47. 6.58. 8	717,50
3100	23 14.49.37	687,72	6100	48. 2.53.58	717,81
3200	24. 9.55.49	689,33	6200	48.22.50.19	718,07
3300	25. 5. 4.42	690,92	6300	49.18.47. 6	718,28
3400	26. 0.16.14	692,46	6400	50.14.44.14	718,44
3500	26.19.30.20	693,97	6500	51.10.41.38	718,56
3600	27.14.46.57	695,45	6600	52. 6.39.14	718,62
3700	28.10. 6. 2		6700	53. 2.36.56	

ÉQUINOXE D'AUTOMNE.

TABLE I.

ANNÉE de la PÉRIODE JULIENNE.	QUANTITÉS CONSTANTES desquelles IL FAUT RETRANCHER LES NOMBRES DONNÉS PAR LA TABLE II.		j	h	m	s
$4n + 1$	année bissextile	septembre	58.	2.	1.	4
$4n + 2$	1re année après la bissextile	septembre	58.	8.	1.	4
$4n + 3$	2e année après la bissextile	septembre	58.	14.	1.	4
$4n$	3e année après la bissextile	septembre	58.	20.	1.	4

TABLE II. — Argument : année de la période julienne.

ANNÉES.	D.	δ.	ANNÉES.	D.	δ.
	j h m s	s		j h m s	s
700	4.17.36.43	585,85	3700	25.13.57.44	623,02
800	5. 9.53. 8	586,37	3800	26. 7.16. 6	624,89
900	6. 2.10.25	586,95	3900	27. 0.37 35	626,78
1000	6.18.28.40	587,60	4000	27.18. 2.13	628,70
1100	7.10.48. 0	588,30	4100	28.11.30. 3	630,66
1200	8. 3. 8.30	589,05	4200	29 5. 1. 9	632,63
1300	8.19.30.15	589,85	4300	29.22 35.32	634,63
1400	9.11.53.20	590,71	4400	30.16.13.15	636,65
1500	10. 4.17.51	591,62	4500	31. 9.54.20	638,69
1600	10.20.43.53	592,57	4600	32. 3.38.49	640,75
1700	11.13.11.30	593,58	4700	32.21.26.44	642,83
1800	12. 5.40.48	594,63	4800	33.15.18. 7	644,92
1900	12.22.11.51	595,73	4900	34. 9.12.59	647,03
2000	13.14.44.44	596,89	5000	35. 3.11.22	649,15
2100	14. 7.19.33	598,08	5100	35.21.13.17	651,28
2200	14.23.56.21	599,33	5200	36.15.18.45	653,43
2300	15.16.35.14	600,61	5300	37. 9.27.48	655,57
2400	16. 9.16.15	601,96	5400	38. 3.40.25	657,73
2500	17. 1.59.31	603,34	5500	38.21.56.38	659,89
2600	17.18.45. 5	604,76	5600	39.16.16.27	662,05
2700	18.11.33. 1	606,23	5700	40.10.39.52	664,22
2800	19. 4.23.24	607,74	5800	41. 5. 6.54	666,38
2900	19.21.16.18	609,28	5900	41.23.37.32	668,54
3000	20.14.11.46	610,88	6000	42.18.11.46	670,70
3100	21. 7. 9.54	612,50	6100	43.12.49.36	672,85
3200	22. 0.10.44	614,17	6200	44. 7.31. 1	674,99
3300	22.17.14 21	615,87	6300	45. 2.16. 0	677,13
3400	23.10.20.48	617,60	6400	45.21. 4.33	679,25
3500	24. 3.30. 8	619,38	6500	46.15.56.38	681,36
3600	24.20.42.26	621,18	6600	47.10.52.14	683,48
3700	25.13.57.44		6700	48. 5.51.22	

SOLSTICE D'HIVER.

TABLE I.

ANNÉE de la PÉRIODE JULIENNE.	QUANTITÉS CONSTANTES desquelles IL FAUT RETRANCHER LES NOMBRES DONNÉS PAR LA TABLE II.		
			j h m s
$\frac{a}{4}+1$	année bissextile	décembre	56.14.55.31
$\frac{a}{4}+2$	1re année après la bissextile	décembre	56.20.55.31
$\frac{a}{4}+3$	2e année après la bissextile	décembre	57. 2.55.31
$\frac{a}{4}$	3e année après la bissextile	décembre	57. 8.55.31

TABLE II. — Argument : année de la période julienne.

ANNÉES	D.	δ.	ANNÉES.	D	δ
	j h m s	s		j h m s	s
700	5. 4 18. 6	634,18	3700	26.16.41.59	609,24
800	5 21.55. 4	632,95	3800	27. 9.37.23	608,99
900	6.15.29.59	631,74	3900	28. 2.32.22	608,79
1000	7. 9. 2.53	630,54	4000	28.19.27. 1	608,64
1100	8. 2.35.47	629,36	4100	29.12.21.25	608,52
1200	8.20. 2.43	628,20	4200	30. 5.15 37	608,46
1300	9 13.29.43	627,07	4300	30.22. 9.43	608,45
1400	10. 6.54.50	625,95	4400	31.15. 3.48	608,48
1500	11. 0.18. 5	624,87	4500	32. 7.57.56	608,56
1600	11.17.39.32	623,80	4600	33. 0.52.12	608,69
1700	12.10.59.12	622,76	4700	33.17.46.41	608,87
1800	13. 4.17. 8	621,75	4800	34.10.41.28	609,10
1900	13.21.33 23	620,77	4900	35. 3.36.38	609,37
2000	14.14.48. 0	619,83	5000	35.20.32.15	609,70
2100	15. 8. 1. 3	618,91	5100	36.13.28.25	610,07
2200	16. 1.12.34	618,02	5200	37. 6.25.12	610,49
2300	16.18.22.36	617,17	5300	37.23.22.41	610,97
2400	17.11.31.13	616,35	5400	38.16.20.58	611,48
2500	18. 4 38.28	615,57	5500	39. 9.20. 6	612,06
2600	18.21.44.25	614,82	5600	40. 2.20.12	612,68
2700	19.14.49. 7	614,11	5700	40.19.21.20	613,34
2800	20. 7.52.38	613.44	5800	41.12.23.34	614,06
2900	21. 0 55. 2	612,81	5900	42. 5.27. 0	614,83
3000	21.17.56.23	612,21	6000	42.22.31.43	615,63
3100	22.10.56.44	611,66	6100	43.15.37.46	616,49
3200	23. 3.56.10	611,15	6200	44. 8.45.15	617,40
3300	23.20.54.45	610,68	6300	45. 1.54.15	618,34
3400	24.13.52.33	610,25	6400	45.19. 4.49	619,34
3500	25. 6.49 38	609.88	6500	46.12.17. 3	620,40
3600	25.25.46. 6	609,53	6600	47. 5.31. 3	621,49
3700	26.16.41.59		6700	47.22.46.52	

TABLE III.

CONVERSION DES SECONDES EN HEURES ET MINUTES.

s		h m s
60	=	0. 1. 0
70	=	0. 1.10
80	=	0. 1.20
90	=	0. 1.30
100	=	0. 1.40
200	=	0. 3.20
300	=	0. 5. 0
400	=	0. 6.40
500	=	0. 8.20
600	=	0.10. 0
700	=	0.11.40
800	=	0.13.20
900	=	0.15. 0
1000	=	0.16.40
2000	=	0.33.20
3000	=	0.50. 0
4000	=	1. 6.40
5000	=	1.23.20
6000	=	1.40. 0
7000	=	1.56.40
8000	=	2.13.20
9000	=	2.30. 0
10000	=	2.46.40
20000	=	5.33.20
30000	=	8.20. 0
40000	=	11. 6.40
50000	=	13.53.20
60000	=	16.40. 0
70000	=	19.26.40

TABLES POUR LE CALCUL

DES

SYZYGIES ÉCLIPTIQUES

OU QUELCONQUES,

PAR M. C. L. LARGETEAU.

On trouve dans les anciens ouvrages d'astronomie des tables d'épactes qui sont destinées à faire connaître les nouvelles et pleines lunes à une époque quelconque, mais qui sont loin d'offrir la précision dont les astronomes ont besoin, même pour préparer leurs calculs. Ces tables, en effet, ne tiennent pas compte de l'accélération du moyen mouvement de la lune, et la plupart ne donnent que des syzygies moyennes. Elles sont d'ailleurs fondées sur des éléments qui n'ont pas, à beaucoup près, l'exactitude de ceux qui ont servi à la construction des tables actuelles du soleil et de la lune; par conséquent elles ne pourraient offrir des bases solides pour les supputations de la chronologie astronomique.

De Zach a publié à Florence, en 1809, avec ses tables

abrégées de la lune, des tables de syzygies qui satisferaient à tout ce que l'on peut désirer à cet égard si elles embrassaient un intervalle de temps plus considérable; mais elles ne s'étendent que de 1700 à 1900 ; en sorte qu'elles ne fournissent aucun secours pour le calcul des observations anciennes.

Nous avons donc pensé qu'il pourrait être utile aux astronomes et aux chronologistes d'avoir des tables qui, fondées sur les déterminations les plus récentes des mouvements de la lune et du soleil, fissent connaître les positions relatives de ces deux astres, et notamment les conjonctions ou oppositions écliptiques. Cela nous a déterminé à composer les tables que nous offrons à ces deux classes de savants. L'astronome y trouvera un moyen prompt et sûr de savoir s'il y a une éclipse à une date donnée, soit qu'il veuille vérifier l'exactitude de la date indiquée, soit qu'il désire s'assurer s'il sera utile d'entreprendre un calcul rigoureux de cette éclipse. Ces vérifications de dates sont aussi fort importantes pour le chronologiste, qui peut en outre avoir besoin de connaître à quelles époques d'une année donnée ont eu lieu des phases lunaires qui sont mentionnées par les historiens ; ce qu'il obtiendra facilement avec nos tables.

Nous avons emprunté aux tables de Delambre les mouvements du soleil, en ayant égard à l'équation du centre et négligeant toutes les perturbations. Les tables de Damoiseau nous ont donné ce qui est relatif au mouvement de la lune. Nous avons tenu compte des cinq premières équations, ainsi que des variations séculaires de la longitude, de l'anomalie et du nœud.

Pour étendre l'usage de nos tables et en rendre l'emploi

facile aux personnes qui ne sont pas familiarisées, comme le sont les astronomes, avec les calculs longs et compliqués, nous nous sommes proposé de leur donner une forme simple et commode, qui n'exigeât que la connaissance des procédés élémentaires de l'arithmétique, et nous avons dû subordonner leur précision à la nature des questions qu'elles sont destinées à résoudre.

Il n'est sans doute pas inutile de dire quelques mots des quantités que, par abréviation, nous avons désignées par les lettres A, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

$a =$ longitude *moyenne* ☾ — longitude *moyenne* ☉,
$A =$ longitude *vraie* ☾ — longitude *vraie* ☉.

Les quantités désignées par *b*, *c*, *d*, *e*, dépendent de la position relative de la lune et de la terre, et de la situation respective de ces deux astres dans leur orbite; elles servent, ainsi que *a* elle-même, à déterminer ce qu'il faut ajouter à *a* pour en conclure A; elles sont les *arguments* des tables qui donnent les *corrections* ou *équations* de *a*. Quant à la quantité *f*, elle est destinée, ainsi que nous l'expliquerons plus tard, à faire connaître si une syzygie est ou n'est pas écliptique. Dans les tables spécialement destinées aux astronomes, ces diverses quantités sont données en degrés, minutes, secondes et fractions de seconde; mais, pour l'objet qui nous occupe, il nous a paru plus commode d'exprimer ces mêmes quantités en parties décimales de la circonférence prise pour unité. A, *a* et les équations de *a*, qui toutes ont été rendues positives, sont exprimées en dix-millièmes de la circonférence; et comme, à une valeur angulaire quelconque, on peut, sans la changer, ajouter une circonférence entière,

il s'ensuit que les expressions

$$a = 0, \qquad a = 10\,000, \qquad a = 20\,000,$$

sont équivalentes entre elles. Il en est de même de

$$a = 7\,647, \qquad a = 17\,647, \qquad a = 27\,647,$$

ou de

$$\mathrm{A} = 7, \qquad \mathrm{A} = 10\,007.$$

Les quantités b, c, d, e, f, représentent des millièmes de la circonférence; en sorte que

$$b = 814, \qquad b = 1814, \qquad b = 2814,$$

peuvent être pris indifféremment l'un pour l'autre. On en peut dire autant de

$$c = 731, \qquad c = 1731, \qquad c = 2731,$$

ou de

$$f = \ 8, \qquad f = 1008, \qquad f = 2008.$$

L'origine du jour a été fixée à minuit, temps moyen de l'Observatoire de Paris, et les heures sont comptées de 0 à 24, ou d'un minuit au minuit suivant. Jusqu'au 4 octobre 1582, le calendrier est *julien*, et c'est en conformité avec ce calendrier que les dates doivent être exprimées; postérieurement à cette époque, c'est-à-dire à partir du 15 octobre 1582, les dates doivent être énoncées selon le *style grégorien*. Les années qui précèdent l'ère chrétienne sont comptées suivant l'usage des astronomes qui, pour désigner une année, emploient un nombre plus petit d'une unité que celui des chronologistes, et disent par exemple : l'an — 2799, lorsque les chronologistes disent : l'an 2800 avant J. C.

De la signification de A il résulte que l'on doit avoir

à la nouvelle lune.... A = 0,
au premier quartier... A = 2500,
à la pleine lune..... A = 5000,
au dernier quartier... A = 7500.

S'il s'agissait d'une autre phase quelconque, voici comment il faudrait procéder pour avoir la valeur de A. Soit par exemple

$$\text{longitude vraie } \mathbb{C} - \text{longitude vraie } \odot = 137^\circ\, 37'\, 54'',7.$$

Convertissez les secondes en parties décimales de minute, en les divisant par 60, ce qui donne

$$137^\circ\, 37',912;$$

Convertissez les minutes en parties décimales de degré, en les divisant aussi par 60; ce qui donne

$$137^\circ,6319;$$

Avancez la virgule de trois rangs vers la droite, puis divisez par 36, et vous aurez la valeur cherchée

$$A = \frac{137\,631,9}{36} = 3823.$$

Les problèmes que nos tables sont destinées à résoudre se divisent en deux parties bien distinctes :

1° La date est donnée, et il s'agit de chercher ou de vérifier la valeur de A correspondante.

2° A est donné, et on demande à quelles époques d'une certaine année a lieu la phase indiquée par la valeur de A.

Nous nous occuperons d'abord de la première question, et nous montrerons, sur divers exemples, comment il faut procéder pour la résoudre.

Premier exemple. — La date proposée est comprise dans le XIX^e^ siècle.

La *Connaissance des temps* annonce, pour le 7 août 1850, une éclipse totale de soleil, la nouvelle lune ayant lieu à $21^h\,43^m$ temps moyen de Paris compté de minuit. Nous devons trouver pour A, 0 ou 10000. Calculons donc la valeur de A qui correspond à 1850, août, $7^j\,21^h\,43^m$.

TYPE DU CALCUL.

1850 août $^{j}\,7\,.\,^{h}\,21\,.\,^{m}\,43$.	a	b	c	d	e	f
Table III, arg. 1850..	5514	82	80	0	954	745
Table IV, arg. 7 août.....	3822	912	853	597	11	278
Table V, arg. 21^h..... ...	296	32	28	2	32	3
Id arg. 43^m.....	10	1	1	0	1	0
	9642	27	962	599	998	8
Table VI, arg. a = 9642.....	18					
Table VII, arg. b = 27.....	215					
Table VIII, arg. c = 962.....	26					
Table IX, arg. d = 599.....	93					
Table X, arg. e = 998.....	3					
A = 9997						

La table III donne, pour chaque année du XIX^e^ siècle et pour le 1^er^ janvier à 0^h, les quantités a, b, c, d, e, f; prenez dans cette table les valeurs qui correspondent à l'année proposée 1850, et placez-les comme on les voit dans le type de calcul ci-dessus.

La table IV donne le mouvement de a, b, c, d, e, f pour chaque jour de l'année ; prenez-y les valeurs qui correspondent au 7 août, et placez-les sous leurs analogues trouvées précédemment.

La table V donne le mouvement des mêmes quantités pour les heures et minutes ; écrivez dans leurs cases respectives les valeurs pour 21^h, ensuite pour 43^m, et faites la somme des nombres compris dans chaque colonne. D'après ce que nous avons dit plus haut, on doit supprimer les dizaines de mille qui peuvent se trouver dans la valeur de a, et les mille dans celles de b, c, d, e, f. Dans notre exemple, la somme des diverses parties de b est 1027 ; nous écrivons seulement 27.

Les valeurs que vous venez de trouver pour a, b, c, d, e, sont les arguments respectifs des tables VI, VII, VIII, IX et X ; les différences des nombres donnés par ces tables sont assez petites pour que l'interpolation, dans chaque cas particulier, puisse facilement se faire à vue. Écrivez sous la valeur de a, trouvée précédemment, les cinq résultats fournis par ces dernières tables ; faites la somme des six quantités, et vous aurez la valeur demandée $A = 9997$. Si la somme eût donné des dizaines de mille, il eût fallu les supprimer.

Si nos tables eussent donné un résultat identique avec celui qui provient des calculs de la *Connaissance des temps*, nous eussions trouvé $A = 10000$ au lieu de $A = 9997$; la différence est de 3 unités. Pour avoir une idée précise de l'erreur qu'elle indique, il faut recourir à la table XI. Cette table a pour argument la quantité Δ, dont la valeur calculée de A diffère, en plus ou en moins, de 0 ou 10000 pour les nouvelles lunes, et de 5000 pour les pleines lunes, et elle

donne ce qu'il faut ajouter à l'époque adoptée, ou en retrancher, pour avoir (d'après nos tables) l'instant de la syzygie. Dans notre exemple $\Delta = 3$, vis-à-vis de ce nombre, la table XI donne $0^h\,13^m$, qu'il faut évidemment ajouter à l'époque adoptée pour avoir, suivant nos tables, l'heure de la nouvelle lune. Ce résultat est certainement moins exact que celui qui est donné par la *Connaissance des temps*, et notre seul but, en l'obtenant, a été de donner un aperçu de l'usage que l'on peut faire de la table XI. C'est au reste un sujet sur lequel nous reviendrons bientôt avec plus de détails.

Il nous reste à voir maintenant si nos tables accusent une éclipse de soleil. C'est ce que nous apprendra la quantité f, destinée à faire connaître celles des syzygies où il peut y avoir, soit une éclipse de lune, soit une éclipse de soleil; et voici les règles qui ont été données par Delambre et par de Zach :

A la nouvelle lune l'éclipse de soleil est :	certaine	si f est entre 924 et 1000, ou entre 0 et 76.
	douteuse	si f est entre 894 et 924, ou entre 76 et 106.
	impossible	si f est entre 106 et 894.
A la pleine lune l'éclipse de lune est	certaine	si f est entre 950 et 1000, ou entre 0 et 50.
	douteuse	si f est entre 930 et 950, ou entre 50 et 70.
	impossible	si f est entre 70 et 930.

Nous devons toutefois prévenir que ces déterminations peuvent être quelquefois en défaut, surtout dans le voisinage

des limites. Dans ces cas douteux, il faut recourir à un calcul rigoureux de l'éclipse.

En appliquant la règle précédente à notre exemple, nous voyons que $f = 8$ indique une éclipse de soleil *certaine*.

Deuxième exemple. — La date proposée est antérieure au XIX^e^ siècle.

Que la date proposée soit antérieure à l'ère chrétienne, ou qu'elle lui soit postérieure, il faut chercher dans le XIX^e^ siècle une année qui soit séparée de l'année proposée par un nombre *entier* de siècles. Cette année du XIX^e^ siècle, nous la nommerons *la correspondante* de l'année proposée. Voici comment on l'obtient :

Si la date proposée est antérieure à l'ère chrétienne, *retranchez de* 100 *le nombre exprimé par les deux derniers chiffres* (à droite) *de celui qui désigne l'année proposée ; vous aurez un reste composé de deux chiffres, celui de gauche pouvant être un zéro. Écrivez ces deux chiffres à droite du nombre* 18, *le résultat sera l'année correspondante.*

Exemple. L'année proposée est l'an — 720 : je retranche 20 de 100, j'ai pour reste 80, que j'écris à droite de 18, et j'ai 1880 pour correspondante de l'an — 720.

Toutes les fois que l'année proposée est séculaire, c'est-à-dire, désignée par un nombre terminé par deux zéros, la correspondante est l'an 1900.

D'après cette règle

les années....	— 2127,	— 2008,	— 1894,	— 1000,
ont pour correspondantes...	1873,	1892,	1806,	1900.

Pour trouver l'intervalle séculaire compris entre l'année proposée et sa correspondante, *faites la somme des nombres*

qui expriment ces années, supprimez les deux zéros à droite de cette somme; le résultat sera le nombre de siècles demandé. On trouve ainsi :

Année proposée.....	— 2127,	— 2008,	— 1894,	— 1000.
» correspondante.....	1873,	1892,	1806,	1900,
Intervalle séculaire.....	40	39	37	29

Voici maintenant la règle relative aux époques postérieures à l'ère chrétienne. *Prenez les deux derniers chiffres du nombre qui désigne l'année proposée; placez-les à droite de* 18, *et vous aurez l'année correspondante demandée. Si l'année proposée est séculaire, la correspondante est* 1900. On a ainsi :

Année proposée.....	4,	1008,	1582,	1600,	1800.
» correspondante...	1804,	1808,	1882,	1900,	1900.

Pour avoir le nombre de siècles compris entre l'année proposée et sa correspondante, *retranchez l'un de l'autre les nombres qui expriment ces années; supprimez les deux zéros à droite du reste; le résultat sera le nombre de siècles demandé.*

On a par conséquent :

Année proposée.....	4,	1008,	1582,	1600,	1800.
» correspondante....	1804,	1808,	1882,	1900,	1900,
Intervalle séculaire.....	18	8	3	3	1

Ces préliminaires établis, proposons-nous, comme exemple, de vérifier la date de la plus ancienne éclipse de lune qui soit mentionnée par Ptolémée. (Voyez Almageste, tome I, page 244, traduction de Halma.) Cette éclipse, observée à Babylone, fut totale; elle eut lieu le 19 mars de l'an —720,

et suivant des calculs qui nous sont propres, la lune fut pleine à $18^h\,14^m$ temps moyen de Paris compté de minuit. Nous allons donc chercher la valeur de A correspondante à la date suivante : an -720, mars, $19^j\,18^h\,14^m$.

TYPE DU CALCUL.

An — 720, mars, $19^j\,18^h\,14^m$.		a	b	c	d	e	f
Table I,	arg. 26 siècles.....	2258	75	376	102	516	580
Table II,	arg. — 720.	52	23	987	0	2	994
Table III,	arg. 1880.....	5904	730	511	998	604	967
Table IV,	arg. 19 mars.	6413	831	452	214	866	450
Table V,	arg. 18^h.....	254	27	24	2	28	4
Id.	arg. 14^m.....	3	0	0	0	0	0
		4884	686	350	316	16	995
Table VI,	arg. $a = 4884$.....	24					
Table VII,	arg. $b = 686$.....	28					
Table VIII,	arg. $c = 350$.....	63					
Table IX,	arg. $d = 316$.....	6					
Table X,	arg. $e = 16$.....	2					
		A = 5007					

La table I a pour argument le nombre des siècles compris entre l'année proposée et sa correspondante du XIX^e siècle, qui est l'an 1880; l'intervalle séculaire est 26. Prenez dans la table I les valeurs de a, b, c, d, e, f, qui répondent à 26, et placez-les comme on les voit dans le tableau ci-dessus.

La table II a pour argument l'année proposée. Pour ne

pas donner à cette table trop d'étendue, on a fait procéder les arguments par intervalles de 100 années. L'an —720 est compris entre —799 et —699; une interpolation facile à faire donne les nombres que nous avons inscrits à la seconde ligne du tableau.

Entrez maintenant dans la table III avec la correspondante, c'est-à-dire, avec 1880 comme argument, et prenez-y a, b, c, d, e, f.

La table IV avec 19 mars (pris dans la colonne des années bissextiles), et la table V, avec $18^h\ 14^m$ vous donneront les mouvements de a, b, c, d, e, f, que vous inscrirez à leurs places respectives.

Faites la somme dans chaque colonne, et en suivant la marche que nous avons indiquée dans le premier exemple, vous trouverez $A = 5007$ et $f = 995$.

La valeur que nous venons de trouver pour A vérifie la date assignée à la pleine lune, et la valeur de f prouve que cette syzygie a été écliptique.

La table XI montre que le résultat fourni par nos tables diffère de 30^m de celui qu'on obtiendrait par un calcul rigoureux. Cette erreur est évidemment sans importance pour l'objet qui nous occupe.

Comme troisième exemple d'un calcul de A, prenons une époque tout à fait arbitraire, l'an 1300, septembre, $8^j\ 11^h\ 54^m$ temps moyen de Paris.

TYPE DU CALCUL.

An 1300, septembre, $8^{j}\ 11^{h}\ 54^{m}$.		a	b	c	d	e	f
Table I,	arg. 6 siècles.....	2878	122	454	49	74	572
Table II,	arg. 1300.....	2	1	999	0	0	0
Table III,	arg. 1900.....	9610	840	142	997	49	117
Table IV,	arg. 8 septembre.....	4997	109	890	687	224	448
Table V,	arg. 11^{h}.....	155	17	14	1	17	3
Id.	arg. 54^{m}.....	13	1	1	0	1	0
		7655	90	500	734	365	140
Table VI,	arg. $a = 7655$.....	10					
Table VII,	arg. $b = 90$.....	283					
Table VIII,	arg. $c = 500$.....	35					
Table IX,	arg. $d = 734$.....	117					
Table X,	arg. $e = 365$.....	6					
		A = 8106					

Ici la correspondante est l'an 1900, l'intervalle séculaire est 6. 6 est donc l'argument de la table I (1); celui de la table II est 1300; celui de la table III est 1900. Quant à la

(*) Il est bon de remarquer que la table I, dans la partie relative aux siècles passés, a deux arguments 3, l'un 3 J et l'autre 3 G; le premier doit être employé lorsque la date proposée est comprise entre le commencement du XVI^{e} siècle et le 4 octobre 1582 inclusivement : c'est au contraire l'argument 3 G qui convient lorsque la date est entre le 15 octobre 1582 inclusivement et la fin du XVI^{e} siècle.

table IV, l'argument est le 8 septembre que l'on doit prendre dans la colonne intitulée : Année bissextile, parce que l'an 1300, qui appartient au calendrier julien, est une année bissextile(1). Le reste du calcul s'achève comme précédemment, et l'on trouve A = 8106. Cette valeur de A montre que la phase correspondante à l'époque adoptée est entre le dernier quartier et la nouvelle lune.

Enfin, comme dernier exemple, proposons-nous de vérifier une éclipse de lune annoncée comme devant avoir eu lieu le 9 avril 1800, la lune étant nouvelle à $16^h\ 25^m$ temps moyen de Paris. Calculons donc A pour le 9 avril 1800 à $16^h\ 25^m$.

(*) A l'égard des années séculaires, qui, toutes, ont pour correspondante 1900, il y a une remarque importante à faire. Si l'année séculaire proposée est *bissextile*, il faut, en vous servant de la table IV, prendre le jour du mois dans la colonne des années bissextiles. Mais si l'année séculaire proposée est *commune*, comme le sont les années 1700, 1800 du calendrier grégorien, prenez le jour du mois dans la colonne intitulée : Année commune.

TYPE DU CALCUL.

An 1800, avril, 9 j 16 h 25 m		a	b	c	d	e	f
Table I,	arg. 1 siècle.....	1808	484	878	5	809	256
Table II,	arg. 1800.....	0	0	0	0	0	0
Table III,	arg. 1900.....	9610	840	142	997	49	117
Table IV,	arg. 9 avril.....	3186	557	81	268	601	565
Table V,	arg. 16^h.....	226	24	21	2	24	4
Id.	arg. 25^m.....	6	1	1	0	1	0
		4836	906	123	272	484	942
Table VI,	arg. $a = 4836$.....	22					
Table VII,	arg. $b = 906$.....	81					
Table VIII,	arg. $c = 123$.....	60					
Table IX,	arg. $d = 272$.....	1					
Table X,	arg. $e = 484$.....	4					
		$A = 5004$					

Ici la correspondante est encore 1900, l'intervalle séculaire $= 1$, et comme l'année 1800, qui appartient au calendrier grégorien, est une année commune, en faisant usage de la table IV, nous avons pris le 9 avril dans la colonne des années communes. $A = 5004$ montre que nos tables donnent, pour l'instant de la pleine lune, une époque qui diffère peu (17 minutes) de celle qui avait été indiquée; $f = 942$ annonce une éclipse douteuse. L'éclipse a eu lieu, mais elle a été peu considérable.

Nous avons expliqué avec assez de développement, et montré sur un assez grand nombre d'exemples la manière de

calculer la valeur de A relative à une époque donnée quelconque, pour que ce calcul n'offre aucune espèce de difficulté. Nous pouvons maintenant aborder la seconde partie du problème que nous avons ainsi énoncée :

A est donné, et on demande à quelles époques d'une certaine année a lieu la phase indiquée par la valeur de A.

La manière de procéder pour résoudre cette question étant la même, quelle que soit la valeur de A, nous supposerons, pour éviter des répétitions inutiles, que A = 5000, c'est-à-dire, qu'il s'agit de trouver les dates des pleines lunes, et nous prendrons comme exemple l'an — 381.

TYPE DU CALCUL.

An — 381, décembre, $13^{j}\ 0^{h}$.	a	b	c	d	e	f
Table I, arg. 22 siècles.....	6382	285	992	91	427	578
Table II, arg. — 381.....	38	18	990	0	2	995
Table III, arg. 1819.....	1185	152	145	0	854	411
Constantes de l'année.....	7605	455	127	91	283	984
Table IV, arg. 13 décembre.....	7167	557	876	947	715	996
	4772	12	3	38	998	980
Table VI, arg. a = 4772.....	20					
Table VII, arg. b = 12.....	198					
Table VIII, arg. c = 3.....	36					
Table IX, arg. d = 38.....	45					
Table X, arg. e = 998.....	3					
A = 5074						

Calculez d'abord les valeurs de a, b, c, d, e, f pour le 1^er^ janvier à 0^h, comme cela se voit dans le type ci-dessus où nous avons désigné ces valeurs sous le nom de *constantes de l'année*. Retranchez la valeur que vous avez trouvée pour a de 5000, ou de son équivalent 15000, si a est plus grand que 5000 (*). Dans le cas actuel, le reste = 7395; cherchez maintenant dans la table IV, colonne a, quel est dans chaque mois le jour qui correspond, soit à ce reste 7395, soit au nombre *immédiatement inférieur;* le jour ainsi trouvé est celui de la pleine lune, ou celui qui le suit. On voit ainsi que dans l'année — 321, la lune est pleine *vers* les 22 janvier, 21 février, 22 mars, 21 avril, 20 mai, 19 juin, 19 juillet, 17 août, 16 septembre, 15 octobre, 14 novembre et 13 décembre. Si nous voulons pousser plus loin notre investigation et déterminer avec plus de précision la pleine lune de décembre, par exemple, nous regarderons décembre $13^j\ 0^h$ comme une époque voisine de l'époque cherchée, et nous calculerons pour cet instant la valeur de A, afin de voir si elle est égale à 5000, auquel cas décembre $13^j\ 0^h$ serait précisément l'époque de la pleine lune; dans le cas contraire, pour voir de combien A diffère de 5000 en plus ou en moins. Ce calcul donne A = 5074.

Cette valeur de A étant plus grande que 5000, il est évident qu'en décembre la pleine lune a eu lieu *avant* le 13 à 0^h. Pour savoir à peu près de combien la pleine lune a précédé

(*) Si, au lieu des dates des pleines lunes, on demandait les époques où ont lieu les phases qui correspondent à une autre valeur de A, par exemple, A = 3823 (p. 495), ce ne serait plus de 5000, mais bien de 3823 ou de 13823 qu'il faudrait retrancher la valeur trouvée pour a. A cela près, le calcul est le même dans les deux cas.

cet instant, nous aurons recours à la table XI dont il a déjà été question. Nous avons $\Delta = 74$, et vis-à-vis de ce nombre la table XI donne $5^h\,15^m$. C'est ce qu'il faut retrancher de l'époque adoptée pour avoir plus exactement l'heure de la pleine lune, qui, par conséquent, a eu lieu le 12 à $18^h\,45^m$.

Lorsque la table XI donne, comme cela a lieu dans le cas actuel, une correction de plusieurs heures, on doit, si l'on vise à une grande exactitude, considérer le résultat obtenu comme une première approximation, et calculer de nouveau la valeur de A pour l'époque ainsi déterminée. On aura ainsi une seconde valeur de l'instant de la syzygie beaucoup plus exacte que la première, et presque toujours suffisante. Pour appliquer ce procédé, calculons de nouveau A, en prenant pour époque décembre $12^j\,18^h\,45^m$.

TYPE DU CALCUL.

An — 381, décembre, 12 j 18 h 45 m.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Constantes de l'année.....	7605	455	127	91	283	984
Table IV, arg. 12 décembre.....	6828	521	845	945	678	991
Table V, arg. 18^h.....	254	27	24	2	28	4
Id. arg. 45^m.....	11	1	1	0	1	0
	4698	4	997	38	990	979
Table VI, arg. $a = 4698$.....	19					
Table VII, arg. $b = 4$.....	189					
Table VIII, arg. $c = 997$.....	34					
Table IX, arg. $d = 38$.....	45					
Table X, arg. $e = 990$.....	3					
	A = 4988					

Cette fois nous trouvons $A = 4988$, d'où $\Delta = 12$. La table XI donne $0^h\,51^m$, qui doivent s'ajouter à l'époque adoptée $12^j\,18^h\,45^m$; par conséquent la pleine lune a eu lieu le 12 à $19^h\,36^m$.

Le calcul complet, fait avec les tables de Delambre et de Damoiseau, donne $12^j\,19^h\,39^m$, d'où, erreur de la première approximation $= -54^m$, de la seconde $= -3^m$.

La valeur de $f = 979$ indique une éclipse de lune *certaine*. L'éclipse a en effet été observée à Babylone, et elle est mentionnée par Ptolémée. (Voyez Almageste, tome I, page 278, traduction de Halma.)

Pour donner une idée précise de la grandeur de l'erreur qui peut résulter de l'emploi de nos tables, nous devons dire qu'en supposant que toutes les quantités négligées soient à leur maximum et agissent dans le même sens, l'erreur des tables ne peut pas dépasser $1^h\,45^m$.

TABLE I.

SIÈCLES ANTÉRIEURS AU 19e.

SIÈCLES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
50	7514	820	683	166	46	589
49	6045	372	837	163	274	339
48	4576	925	991	160	502	88
47	3107	477	145	158	730	838
46	1638	29	298	155	958	588
45	169	582	452	153	185	337
44	8700	134	606	150	413	87
43	7231	686	760	147	641	836
42	5762	238	914	145	869	586
41	4293	791	68	142	97	336
40	2824	343	222	139	325	85
39	1355	895	376	137	553	835
38	9886	448	529	134	781	584
37	8417	0	683	131	9	334
36	6948	552	837	129	237	84
35	5479	105	991	126	464	833
34	4010	657	145	123	692	583
33	2541	209	299	121	920	332
32	1072	762	453	118	148	82
31	9603	314	607	115	376	832
30	8134	866	761	113	604	581
29	6665	418	914	110	832	331
28	5196	971	68	107	60	80
27	3727	523	222	105	288	830
26	2258	75	376	102	516	580
25	789	628	530	99	743	329
24	9320	180	684	97	971	79
23	7851	732	838	94	199	828
22	6382	285	992	91	427	578
21	4913	837	146	89	655	328
20	3444	389	299	86	883	77
19	1975	942	453	83	111	827
18	506	494	607	81	339	576
17	9037	46	761	78	567	326
16	7568	599	915	75	795	76

SIÈCLES ANTÉRIEURS AU 19e.

SIÈCLES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
15	6099	151	69	73	22	825
14	4630	703	223	70	250	575
13	3161	255	377	67	478	324
12	1692	808	531	65	706	74
11	223	360	684	62	934	824
10	8754	912	838	59	162	573
9	7285	465	992	57	390	323
8	5816	17	146	54	618	72
7	4347	569	300	51	846	822
6	2878	122	454	49	74	572
5	1409	674	608	46	301	321
4	9940	226	762	43	529	71
3 J.	8471	779	916	41	757	820
3 G.	5084	416	601	13	390	763
2	3615	968	755	11	618	512
1	1808	484	878	5	809	256

SIÈCLES POSTÉRIEURS AU 19e.

SIÈCLES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	8192	516	122	995	191	744
2	6723	68	276	992	419	493
3	4916	584	399	987	610	237
4	3108	100	521	981	801	981
5	1300	616	644	976	993	725
6	9831	169	798	973	220	475
7	8024	685	920	968	412	218
8	6216	201	42	962	603	962
9	4409	717	165	957	794	706
10	2939	269	319	954	22	456

TABLE II.

ANNÉES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	ANNÉES.	*a*	*b*	*e*	*d*	*e*	*f*
—3199	194	89	949	0	8	976	—199	33	15	992	0	1	996
3099	187	86	951	0	7	977	— 99	29	14	992	0	1	996
2999	180	83	953	0	7	978	+ 1	26	12	993	0	1	997
2899	173	79	955	0	7	979	101	24	11	994	0	1	997
2799	166	76	957	0	6	980	201	21	10	995	0	1	997
2699	159	73	959	0	6	981	301	18	8	995	0	1	998
2599	152	70	960	0	6	981	401	16	7	996	0	1	998
2499	145	67	962	0	6	982	501	14	6	996	0	1	998
2399	139	64	964	0	5	983	601	12	5	997	0	0	999
2299	133	61	966	0	5	984	701	10	5	997	0	0	999
2199	126	58	967	0	5	984	801	8	4	998	0	0	999
2099	120	55	969	0	5	985	901	7	3	998	0	0	999
1999	114	53	970	0	4	986	1001	5	2	999	0	0	999
1899	109	50	972	0	4	987	1101	4	2	999	0	0	0
1799	103	47	973	0	4	987	1201	3	1	999	0	0	0
1699	98	45	975	0	4	988	1301	2	1	999	0	0	0
1599	92	42	976	0	4	989	1401	1	1	0	0	0	0
1499	87	40	977	0	3	989	1501	1	0	0	0	0	0
1399	82	38	979	0	3	990	1601	0	0	0	0	0	0
1299	77	35	980	0	3	991	1701	0	0	0	0	0	0
1199	72	33	981	0	3	991	1801	0	0	0	0	0	0
1099	68	31	982	0	3	992	1901	0	0	0	0	0	0
999	63	29	984	0	2	992	2001	0	0	0	0	0	0
899	59	27	985	0	2	993	2101	1	0	0	0	0	0
799	55	25	986	0	2	993	2201	1	1	0	0	0	0
699	51	23	987	0	2	994	2301	2	1	999	0	0	0
599	47	21	988	0	2	994	2401	3	1	999	0	0	0
499	43	20	989	0	2	995	2501	4	2	999	0	0	999
399	39	18	990	0	2	995	2601	5	3	999	0	0	999
299	36	17	991	0	1	996	2701	7	3	998	0	0	999
199	33	15	992	0	1	996	2801	9	4	998	0	0	999

TABLE III.

ANNÉES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	ANNÉES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1801	5018	571	493	2	271	479	1826	7066	950	523	0	819	165
1802	8619	817	967	1	684	585	1827	667	196	997	0	232	271
1803	2220	64	440	0	98	691	1828 B	4268	443	471	999	645	377
1804 B	5820	310	914	0	511	797	1829	8207	725	976	1	95	489
1805	9760	593	419	2	960	909	1830	1808	972	450	0	508	595
1806	3360	839	893	1	374	15	1831	5408	218	923	0	921	701
1807	6961	86	366	0	787	121	1832 B	9009	465	397	999	334	807
1808 B	561	332	840	0	200	227	1833	2948	748	902	1	784	919
1809	4501	615	345	2	650	339	1834	6549	994	376	0	197	25
1810	8101	861	819	1	63	445	1835	150	240	849	0	610	131
1811	1702	108	292	0	476	551	1836 B	3750	487	323	999	24	237
1812 B	5303	354	766	999	889	657	1837	7689	770	828	1	473	349
1813	9242	637	271	1	339	769	1838	1290	16	302	0	887	455
1814	2843	884	745	1	752	875	1839	4891	263	776	999	300	561
1815	6443	130	219	0	165	981	1840 B	8491	509	249	999	713	667
1816 B	44	376	692	999	578	87	1841	2431	792	754	1	163	779
1817	3983	659	197	1	28	199	1842	6031	38	228	0	576	885
1818	7584	906	671	1	441	305	1843	9632	285	702	999	989	991
1819	1185	152	145	0	854	411	1844 B	3233	531	175	999	402	97
1820 B	4785	399	618	999	267	517	1845	7172	814	681	1	852	209
1821	8724	681	124	1	717	629	1846	773	60	154	0	265	315
1822	2325	928	597	1	130	735	1847	4373	306	628	999	678	421
1823	5926	174	71	0	543	841	1848 B	7974	553	102	999	91	527
1824 B	9526	421	545	999	956	947	1849	1913	836	607	1	541	639
1825	3466	703	50	1	406	59	1850	5514	82	80	0	954	745

TABLE III (SUITE).

ANNÉES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	ANNÉES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1851	9114	329	554	999	367	851	1876 B	1163	708	585	998	915	537
1852 B	2715	575	28	998	780	957	1877	5102	991	90	0	365	649
1853	6654	858	533	0	230	69	1878	8702	237	563	999	778	755
1854	255	104	7	0	643	175	1879	2303	483	37	998	191	861
1855	3856	351	480	999	56	281	1880 B	5904	730	511	998	604	967
1856 B	7456	597	954	998	469	387	1881	9843	13	16	0	54	79
1857	1396	880	459	0	919	499	1882	3444	259	490	999	467	185
1858	4996	127	933	0	332	605	1883	7044	506	963	998	880	291
1859	8597	373	406	999	745	711	1884 B	645	752	437	998	293	397
1860 B	2198	619	880	998	158	817	1885	4584	35	942	0	743	509
1861	6137	902	385	0	608	929	1886	8185	281	416	999	156	615
1862	9737	149	859	0	21	35	1887	1786	528	889	998	569	721
1863	3338	395	333	999	434	141	1888 B	5386	774	363	997	982	827
1864 B	6939	642	806	998	847	247	1889	9326	57	868	999	432	939
1865	878	924	311	0	297	359	1890	2926	303	342	999	845	45
1866	4479	171	785	999	710	465	1891	6527	550	816	998	258	151
1867	8079	417	259	999	123	571	1892 B	128	796	289	997	671	257
1868 B	1680	664	732	998	537	677	1893	4067	79	794	999	121	369
1869	5619	946	237	0	986	789	1894	7667	325	268	999	534	475
1870	9220	193	711	999	399	895	1895	1268	572	742	998	947	581
1871	2821	439	185	999	813	1	1896 B	4869	818	215	997	360	687
1872 B	6421	686	659	998	226	107	1897	8808	101	721	999	810	799
1873	361	968	164	0	675	219	1898	2409	347	194	999	223	903
1874	3961	215	637	999	89	325	1899	6009	594	668	998	636	11
1875	7562	461	111	998	502	431	1900 C	9610	840	142	997	49	117

TABLE IV.

JANVIER.								FÉVRIER.							
ANNÉE								ANNÉE							
COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	498	125	974	85	139	179
2	2	339	36	31	3	37	6	2	2	836	161	6	88	176	185
3	3	677	73	63	5	73	12	3	3	1175	198	37	90	213	190
4	4	1016	109	94	8	110	17	4	4	1513	234	69	93	249	196
5	5	1355	145	126	11	147	23	5	5	1852	270	100	96	286	202
6	6	1693	181	157	14	184	29	6	6	2191	306	132	99	323	208
7	7	2032	218	189	16	220	35	7	7	2529	343	163	101	360	213
8	8	2370	254	220	19	257	40	8	8	2868	379	195	104	396	219
9	9	2709	290	251	22	294	46	9	9	3207	415	226	107	433	225
10	10	3048	327	283	25	331	52	10	10	3545	452	257	110	470	231
11	11	3386	363	314	27	367	58	11	11	3884	488	289	112	507	237
12	12	3725	399	346	30	404	63	12	12	4223	524	320	115	543	242
13	13	4064	436	377	33	441	69	13	13	4561	561	352	118	580	248
14	14	4402	472	409	36	478	75	14	14	4900	597	383	120	617	254
15	15	4741	508	440	38	514	81	15	15	5238	633	415	123	654	260
16	16	5079	544	472	41	551	87	16	16	5577	669	446	126	690	265
17	17	5418	581	503	44	588	92	17	17	5916	706	477	129	727	271
18	18	5757	617	534	47	625	98	18	18	6254	742	509	131	764	277
19	19	6095	653	566	49	661	104	19	19	6593	778	540	134	801	283
20	20	6434	690	597	52	698	110	20	20	6932	815	572	137	837	288
21	21	6773	726	629	55	735	115	21	21	7270	851	603	140	874	294
22	22	7111	762	660	57	772	121	22	22	7609	887	635	142	911	300
23	23	7450	798	692	60	808	127	23	23	7947	923	666	145	948	306
24	24	7789	835	723	63	845	133	24	24	8286	960	697	148	984	312
25	25	8127	871	754	66	882	138	25	25	8625	996	729	151	21	317
26	26	8466	907	786	68	919	144	26	26	8963	32	760	153	58	323
27	27	8804	944	817	71	955	150	27	27	9302	69	792	156	95	329
28	28	9143	980	849	74	992	156	28	28	9641	105	823	159	131	335
29	29	9482	16	880	77	29	162		29	9979	141	855	162	168	340
30	30	9820	52	912	79	66	167								
31	31	159	89	943	82	102	173								

TABLE IV (SUITE).

MARS.								AVRIL.							
ANNÉE								ANNÉE							
COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		9979	141	855	162	168	340	1		477	266	829	246	307	519
2	1	318	177	886	164	205	346	2	1	816	303	861	249	344	525
3	2	657	214	918	167	242	352	3	2	1154	339	892	252	381	531
4	3	995	250	949	170	278	358	4	3	1493	375	923	255	418	537
5	4	1334	286	980	172	315	364	5	4	1831	411	955	257	454	542
6	5	1672	323	12	175	352	369	6	5	2170	448	986	260	491	548
7	6	2011	359	43	178	389	375	7	6	2509	484	18	263	528	554
8	7	2350	395	75	181	425	381	8	7	2847	520	49	266	565	560
9	8	2688	432	106	183	462	387	9	8	3186	557	81	268	601	565
10	9	3027	468	138	186	499	392	10	9	3525	593	112	271	638	571
11	10	3366	504	169	189	536	398	11	10	3863	629	143	274	675	577
12	11	3704	540	200	192	572	404	12	11	4202	665	175	277	712	583
13	12	4043	577	232	194	609	410	13	12	4540	702	206	279	748	589
14	13	4382	613	263	197	646	415	14	13	4879	738	238	282	785	594
15	14	4720	649	295	200	683	421	15	14	5218	774	269	285	822	600
16	15	5059	686	326	203	719	427	16	15	5556	811	301	287	859	606
17	16	5397	722	358	205	756	433	17	16	5895	847	332	290	895	612
18	17	5736	758	389	208	793	439	18	17	6234	883	364	293	932	617
19	18	6075	794	420	211	830	444	19	18	6572	919	395	296	969	623
20	19	6413	831	452	214	866	450	20	19	6911	956	426	298	6	629
21	20	6752	867	483	216	903	456	21	20	7250	992	458	301	42	635
22	21	7091	903	515	219	940	462	22	21	7588	28	489	304	79	640
23	22	7429	940	546	222	977	467	23	22	7927	65	521	307	116	646
24	23	7768	976	578	224	13	473	24	23	8265	101	552	309	153	652
25	24	8106	12	609	227	50	479	25	24	8604	137	584	312	189	658
26	25	8445	48	641	230	87	485	26	25	8943	174	615	315	226	664
27	26	8784	85	672	233	124	490	27	26	9281	210	646	318	263	669
28	27	9122	121	703	235	160	496	28	27	9620	246	678	320	300	675
29	28	9461	157	735	238	197	502	29	28	9959	282	709	323	336	681
30	29	9800	194	766	241	234	508	30	29	297	319	741	326	373	687
31	30	138	230	798	244	271	514		30	636	355	772	329	410	692
	31	477	266	829	246	307	519								

TABLE IV (SUITE).

MAI.

ANNÉE COMMUNE.	ANNÉE BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		636	355	772	329	410	692
2	1	974	391	804	331	447	698
3	2	1313	428	835	334	483	704
4	3	1652	464	866	337	520	710
5	4	1990	500	898	339	557	715
6	5	2329	536	929	342	594	721
7	6	2668	573	961	345	630	727
8	7	3006	609	992	348	667	733
9	8	3345	645	24	350	704	739
10	9	3684	682	55	353	741	744
11	10	4022	718	87	356	777	750
12	11	4361	754	118	359	814	756
13	12	4699	790	149	361	851	762
14	13	5038	827	181	364	888	767
15	14	5377	863	212	367	924	773
16	15	5715	899	244	370	961	779
17	16	6054	936	275	372	998	785
18	17	6393	972	307	375	35	790
19	18	6731	8	338	378	71	796
20	19	7070	45	369	381	108	802
21	20	7408	81	401	383	145	808
22	21	7747	117	432	386	181	814
23	22	8086	153	464	389	218	819
24	23	8424	190	495	391	255	825
25	24	8763	226	527	394	292	831
26	25	9102	262	558	397	328	837
27	26	9440	299	589	400	365	842
28	27	9779	335	621	402	402	848
29	28	118	371	652	405	439	854
30	29	456	407	684	408	475	860
31	30	795	444	715	411	512	865
	31	1133	480	747	413	549	871

JUIN.

ANNÉE COMMUNE.	ANNÉE BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		1133	480	747	413	549	871
2	1	1472	516	778	416	586	877
3	2	1811	553	810	419	622	883
4	3	2149	589	841	422	659	889
5	4	2488	625	872	424	696	894
6	5	2827	661	904	427	733	900
7	6	3165	698	935	430	769	906
8	7	3504	734	967	433	806	912
9	8	3842	770	998	435	843	917
10	9	4181	807	30	438	880	923
11	10	4520	843	61	441	916	929
12	11	4858	879	92	444	953	935
13	12	5197	916	124	446	990	941
14	13	5536	952	155	449	27	946
15	14	5874	988	187	452	63	952
16	15	6213	24	218	454	100	958
17	16	6552	61	250	457	137	964
18	17	6890	97	281	460	174	969
19	18	7229	133	312	463	210	975
20	19	7567	170	344	465	247	981
21	20	7906	206	375	468	284	987
22	21	8245	242	407	471	321	992
23	22	8583	278	438	474	357	998
24	23	8922	315	470	476	394	4
25	24	9261	351	501	479	431	10
26	25	9599	387	533	482	468	16
27	26	9938	424	564	485	504	21
28	27	276	460	595	487	541	27
29	28	615	496	627	490	578	33
30	29	954	532	658	493	615	39
	30	1292	569	690	496	651	44

TABLE IV (SUITE).

JUILLET.

ANNÉE COMMUNE.	ANNÉE BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		1292	569	690	496	651	44
2	1	1631	605	721	498	688	50
3	2	1970	641	753	501	725	56
4	3	2308	678	784	504	762	62
5	4	2647	714	815	506	798	67
6	5	2986	750	847	509	835	73
7	6	3324	787	878	512	872	79
8	7	3663	823	910	515	909	85
9	8	4001	859	941	517	945	91
10	9	4340	895	973	520	982	96
11	10	4679	932	4	523	19	102
12	11	5017	968	35	526	56	108
13	12	5356	4	67	528	92	114
14	13	5695	41	98	531	129	119
15	14	6033	77	130	534	166	125
16	15	6372	113	161	537	203	131
17	16	6710	149	193	539	239	137
18	17	7049	186	224	542	276	142
19	18	7388	222	256	545	313	148
20	19	7726	258	287	548	350	154
21	20	8065	295	318	550	386	160
22	21	8404	331	350	553	423	166
23	22	8742	367	381	556	460	171
24	23	9081	403	413	559	497	177
25	24	9420	440	444	561	533	183
26	25	9758	476	476	564	570	189
27	26	97	512	507	567	607	194
28	27	435	549	538	569	644	200
29	28	774	585	570	572	680	206
30	29	1113	621	601	575	717	212
31	30	1451	658	633	578	754	217
	31	1790	694	664	580	791	223

AOUT.

ANNÉE COMMUNE.	ANNÉE BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		1790	694	664	580	791	223
2	1	2129	730	696	583	827	229
3	2	2467	766	727	586	864	235
4	3	2806	803	758	589	901	241
5	4	3144	839	790	591	938	246
6	5	3483	875	821	594	974	252
7	6	3822	912	853	597	11	258
8	7	4160	948	884	600	48	264
9	8	4499	984	916	602	85	269
10	9	4838	20	947	605	121	275
11	10	5176	57	979	608	158	281
12	11	5515	93	10	611	195	287
13	12	5854	129	41	613	232	292
14	13	6192	166	73	616	268	298
15	14	6531	202	104	619	305	304
16	15	6869	238	136	621	342	310
17	16	7208	274	167	624	379	316
18	17	7547	311	199	627	415	321
19	18	7885	347	230	630	452	327
20	19	8224	383	261	632	489	333
21	20	8563	420	293	635	526	339
22	21	8901	456	324	638	562	344
23	22	9240	492	356	641	599	350
24	23	9578	529	387	643	636	356
25	24	9917	565	419	646	673	362
26	25	256	601	450	649	709	367
27	26	594	637	481	652	746	373
28	27	933	674	513	654	783	379
29	28	1272	710	544	657	820	385
30	29	1610	746	576	660	856	391
31	30	1949	783	607	663	893	396
	31	2288	819	639	665	930	402

TABLE IV (SUITE).

SEPTEMBRE. ANNÉE COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		2288	819	639	665	930	402
2	1	2626	855	670	668	967	408
3	2	2965	891	702	671	3	414
4	3	3303	928	733	673	40	419
5	4	3642	964	764	676	77	425
6	5	3981	0	796	679	113	431
7	6	4319	37	827	682	150	437
8	7	4658	73	859	684	187	442
9	8	4997	109	890	687	224	448
10	9	5335	145	922	690	261	454
11	10	5674	182	953	693	297	460
12	11	6013	218	984	695	334	466
13	12	6351	254	16	698	371	471
14	13	6690	291	47	701	408	477
15	14	7028	327	79	704	444	483
16	15	7367	363	110	706	481	489
17	16	7706	400	142	709	518	494
18	17	8044	436	173	712	555	500
19	18	8383	472	204	715	591	506
20	19	8722	508	236	717	628	512
21	20	9060	545	267	720	665	518
22	21	9399	581	299	723	702	523
23	22	9737	617	330	726	738	529
24	23	76	654	362	728	775	535
25	24	415	690	393	731	812	541
26	25	753	726	425	734	849	546
27	26	1092	762	456	736	885	552
28	27	1431	799	487	739	922	558
29	28	1769	835	519	742	959	564
30	29	2108	871	550	745	996	569
	30	2447	908	582	747	32	575

OCTOBRE. ANNÉE COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		2447	908	582	747	32	575
2	1	2785	944	613	750	69	581
3	2	3124	980	645	753	106	587
4	3	3462	16	676	756	142	593
5	4	3801	53	707	758	179	598
6	5	4140	89	739	761	216	604
7	6	4478	125	770	764	253	610
8	7	4817	162	802	767	289	616
9	8	5156	198	833	769	326	621
10	9	5494	234	865	772	363	627
11	10	5833	271	896	775	400	633
12	11	6171	307	927	778	436	639
13	12	6510	343	959	780	473	644
14	13	6849	379	990	783	510	650
15	14	7187	416	22	786	547	656
16	15	7526	452	53	788	583	662
17	16	7865	488	85	791	620	668
18	17	8203	525	116	794	657	673
19	18	8542	561	147	797	694	679
20	19	8881	597	179	799	730	685
21	20	9219	633	210	802	767	691
22	21	9558	670	242	805	804	696
23	22	9896	706	273	808	841	702
24	23	235	742	305	810	877	708
25	24	574	779	336	813	914	714
26	25	912	815	368	816	951	719
27	26	1251	851	399	819	988	725
28	27	1590	887	430	821	24	731
29	28	1928	924	462	824	61	737
30	29	2267	960	493	827	98	743
31	30	2605	996	525	830	135	748
	31	2944	33	556	832	171	754

TABLE IV (SUITE).

NOVEMBRE.								DÉCEMBRE.							
ANNÉE								ANNÉE							
COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	COMMUNE.	BISSEXTILE.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1		2944	33	556	832	171	754	1		3103	121	499	914	274	927
2	1	3283	69	588	835	208	760	2	1	3442	158	531	917	311	933
3	2	3621	105	619	838	245	766	3	2	3780	194	562	920	347	939
4	3	3960	142	650	840	282	771	4	3	4119	230	593	923	384	944
5	4	4299	178	682	843	318	777	5	4	4458	267	625	925	421	950
6	5	4637	214	713	846	355	783	6	5	4796	303	656	928	458	956
7	6	4976	250	745	849	392	789	7	6	5135	339	688	931	494	962
8	7	5315	287	776	851	429	794	8	7	5473	375	719	934	531	968
9	8	5653	323	808	854	465	800	9	8	5812	412	751	936	568	973
10	9	5992	359	839	857	502	806	10	9	6151	448	782	939	605	979
11	10	6330	396	871	860	539	812	11	10	6489	484	814	942	641	985
12	11	6669	432	902	862	576	818	12	11	6828	521	845	945	678	991
13	12	7008	468	933	865	612	823	13	12	7167	557	876	947	715	996
14	13	7346	504	965	868	649	829	14	13	7505	593	908	950	752	2
15	14	7685	541	996	871	686	835	15	14	7844	629	939	953	788	8
16	15	8024	577	28	873	723	841	16	15	8183	666	971	955	825	14
17	16	8362	613	59	876	759	846	17	16	8521	702	2	958	862	19
18	17	8701	650	91	879	796	852	18	17	8860	738	34	961	899	25
19	18	9039	686	122	882	833	858	19	18	9198	775	65	964	935	31
20	19	9378	722	153	884	870	864	20	19	9537	811	96	966	972	37
21	20	9717	758	185	887	906	869	21	20	9876	847	128	969	9	43
22	21	55	795	216	890	943	875	22	21	214	884	159	972	46	48
23	22	394	831	248	893	980	881	23	22	553	920	191	975	82	54
24	23	733	867	279	895	17	887	24	23	892	956	222	977	119	60
25	24	1071	904	311	898	53	893	25	24	1230	992	254	980	156	66
26	25	1410	940	342	901	90	898	26	25	1569	29	285	983	193	71
27	26	1749	976	373	903	127	904	27	26	1907	65	316	986	229	77
28	27	2087	13	405	906	164	910	28	27	2246	101	348	988	266	83
29	28	2426	49	436	909	200	916	29	28	2585	138	379	991	303	89
30	29	2764	85	468	912	237	921	30	29	2923	174	411	994	340	95
	30	3103	121	499	914	274	927	31	30	3262	210	442	997	376	100
									31	3601	246	474	999	413	106

TABLE V.

HEURES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	14	2	1	0	2	0
2	28	3	3	0	3	0
3	42	5	4	0	5	1
4	56	6	5	0	6	1
5	71	8	7	1	8	1
6	85	9	8	1	9	1
7	99	11	9	1	11	2
8	113	12	10	1	12	2
9	127	14	12	1	14	2
10	141	15	13	1	15	2
11	155	17	14	1	17	3
12	169	18	16	1	18	3
13	183	20	17	1	20	3
14	198	21	18	2	21	3
15	212	23	20	2	23	4
16	226	24	21	2	24	4
17	240	26	22	2	26	4
18	254	27	24	2	28	4
19	268	29	25	2	29	5
20	282	30	26	2	31	5
21	296	32	28	2	32	5
22	310	33	29	3	34	5
23	325	35	30	3	35	6
24	339	36	31	3	37	6

MINUTES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0	0
8	2	0	0	0	0	0
9	2	0	0	0	0	0
10	2	0	0	0	0	0
11	3	0	0	0	0	0
12	3	0	0	0	0	0
13	3	0	0	0	0	0
14	3	0	0	0	0	0
15	4	0	0	0	0	0
16	4	0	0	0	0	0
17	4	0	0	0	0	0
18	4	0	0	0	0	0
19	4	0	0	0	0	0
20	5	1	0	0	1	0
21	5	1	0	0	1	0
22	5	1	0	0	1	0
23	5	1	1	0	1	0
24	6	1	1	0	1	0
25	6	1	1	0	1	0
26	6	1	1	0	1	0
27	6	1	1	0	1	0
28	7	1	1	0	1	0
29	7	1	1	0	1	0
30	7	1	1	0	1	0

MINUTES.	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
31	7	1	1	0	1	0
32	8	1	1	0	1	0
33	8	1	1	0	1	0
34	8	1	1	0	1	0
35	8	1	1	0	1	0
36	8	1	1	0	1	0
37	9	1	1	0	1	0
38	9	1	1	0	1	0
39	9	1	1	0	1	0
40	9	1	1	0	1	0
41	10	1	1	0	1	0
42	10	1	1	0	1	0
43	10	1	1	0	1	0
44	10	1	1	0	1	0
45	11	1	1	0	1	0
46	11	1	1	0	1	0
47	11	1	1	0	1	0
48	11	1	1	0	1	0
49	12	1	1	0	1	0
50	12	1	1	0	1	0
51	12	1	1	0	1	0
52	12	1	1	0	1	0
53	12	1	1	0	1	0
54	13	1	1	0	1	0
55	13	1	1	0	1	0
56	13	1	1	0	1	0
57	13	1	1	0	1	0
58	14	1	1	0	1	0
59	14	1	1	0	2	0
60	14	2	1	0	2	0

TABLE VI.

Arg. a	Équ. a	Arg. a	Équ. a	Arg. a	Équ. a
0	26	3400	0	6800	29
100	28	3500	0	6900	27
200	30	3600	0	7000	24
300	31	3700	1	7100	22
400	33	3800	2	7200	20
500	34	3900	3	7300	18
600	35	4000	4	7400	15
700	36	4100	6	7500	13
800	36	4200	8	7600	11
900	37	4300	10	7700	9
1000	37	4400	12	7800	7
1100	36	4500	14	7900	6
1200	36	4600	17	8000	4
1300	35	4700	19	8100	3
1400	34	4800	21	8200	2
1500	32	4900	24	8300	2
1600	31	5000	26	8400	1
1700	29	5100	28	8500	1
1800	27	5200	30	8600	2
1900	25	5300	32	8700	2
2000	23	5400	34	8800	3
2100	20	5500	35	8900	4
2200	18	5600	36	9000	5
2300	16	5700	37	9100	7
2400	14	5800	38	9200	8
2500	11	5900	38	9300	10
2600	9	6000	38	9400	12
2700	7	6100	38	9500	15
2800	6	6200	37	9600	17
2900	4	6300	36	9700	19
3000	3	6400	35	9800	21
3100	2	6500	34	9900	23
3200	1	6600	32	10000	26
3300	0	6700	31		
3400	0	6800	29		

TABLE VII.

Arg. b	Équ. b	Arg. b	Équ. b	Arg b	Équ. b
0	184	340	326	680	31
10	196	350	320	690	26
20	207	360	313	700	22
30	219	370	306	710	18
40	230	380	298	720	15
50	242	390	290	730	12
60	253	400	281	740	11
70	263	410	272	750	10
80	273	420	263	760	9
90	283	430	254	770	9
100	293	440	244	780	10
110	301	450	235	790	12
120	310	460	225	800	15
130	317	470	215	810	18
140	325	480	205	820	21
150	331	490	194	830	26
160	337	500	184	840	31
170	342	510	174	850	37
180	347	520	163	860	43
190	350	530	153	870	51
200	353	540	143	880	58
210	356	550	133	890	67
220	358	560	124	900	75
230	359	570	114	910	85
240	359	580	105	920	95
250	358	590	96	930	105
260	357	600	87	940	115
270	356	610	78	950	126
280	353	620	70	960	138
290	350	630	62	970	149
300	346	640	55	980	161
310	342	650	48	990	172
320	337	660	42	1000	184
330	332	670	36		
340	326	680	31		

TABLE VIII.

Arg c	Equ. c	Arg. c	Équ. c	Arg. c	Équ. c
0	35	340	65	680	3
10	37	350	63	690	2
20	39	360	62	700	1
30	42	370	61	710	1
40	44	380	59	720	0
50	46	390	57	730	0
60	48	400	56	740	0
70	50	410	54	750	0
80	52	420	52	760	0
90	54	430	50	770	0
100	56	440	48	780	0
110	58	450	46	790	1
120	59	460	44	800	1
130	61	470	42	810	2
140	63	480	39	820	3
150	64	490	37	830	4
160	65	500	35	840	5
170	66	510	33	850	6
180	67	520	31	860	7
190	68	530	28	870	9
200	69	540	26	880	11
210	69	550	24	890	12
220	70	560	22	900	14
230	70	570	20	910	16
240	70	580	18	920	18
250	70	590	16	930	20
260	70	600	14	940	22
270	70	610	13	950	24
280	70	620	11	960	26
290	69	630	9	970	28
300	69	640	8	980	31
310	68	650	7	990	33
320	67	660	5	1000	35
330	66	670	4		
340	65	680	3		

TABLE IX.

Arg. d	Équ. d	Arg. d	Équ. d	Arg. d	Équ. d
0	59	340	10	680	112
10	55	350	12	690	113
20	52	360	14	700	114
30	48	370	17	710	115
40	44	380	19	720	116
50	41	390	22	730	117
60	37	400	25	740	117
70	34	410	28	750	118
80	30	420	31	760	118
90	27	430	35	770	117
100	24	440	38	780	117
110	21	450	41	790	116
120	18	460	45	800	115
130	16	470	48	810	114
140	13	480	52	820	113
150	11	490	55	830	111
160	9	500	59	840	109
170	7	510	63	850	107
180	5	520	66	860	105
190	4	530	70	870	102
200	3	540	73	880	100
210	2	550	77	890	97
220	1	560	80	900	94
230	1	570	83	910	91
240	0	580	87	920	88
250	0	590	90	930	84
260	1	600	93	940	81
270	1	610	96	950	77
280	2	620	99	960	74
290	3	630	101	970	70
300	4	640	104	980	66
310	5	650	106	990	63
320	6	660	108	1000	59
330	8	670	110		
340	10	680	112		

TABLE X.

Arg. e	Équ. e	Arg. e	Équ. e	Arg. e	Équ. e
0	3	340	6	680	1
10	3	350	6	690	1
20	2	360	6	700	1
30	2	370	6	710	1
40	1	380	6	720	2
50	1	390	6	730	2
60	1	400	6	740	3
70	1	410	6	750	3
80	0	420	6	760	3
90	0	430	5	770	4
100	0	440	5	780	4
110	0	450	5	790	5
120	0	460	5	800	5
130	0	470	4	810	5
140	0	480	4	820	5
150	0	490	3	830	6
160	0	500	3	840	6
170	0	510	3	850	6
180	1	520	2	860	6
190	1	530	2	870	6
200	1	540	1	880	6
210	1	550	1	890	6
220	2	560	1	900	6
230	2	570	1	910	6
240	3	580	0	920	5
250	3	590	0	930	5
260	3	600	0	940	5
270	4	610	0	950	5
280	4	620	0	960	5
290	5	630	0	970	4
300	5	640	0	980	4
310	5	650	0	990	3
320	5	660	0	1000	3
330	6	670	0		
340	6	680	1		

TABLE XI.

Arg. Δ	Équ. Δ	Arg. Δ	Équ. Δ	Arg. Δ	Équ. Δ
	h m		h m		h m
1	0 4	36	2 33	71	5 2
2	0 9	37	2 37	72	5 6
3	0 13	38	2 42	73	5 10
4	0 17	39	2 46	74	5 15
5	0 21	40	2 50	75	5 19
6	0 26	41	2 54	76	5 23
7	0 30	42	2 59	77	5 27
8	0 34	43	3 3	78	5 32
9	0 38	44	3 7	79	5 36
10	0 43	45	3 11	80	5 40
11	0 47	46	3 16	81	5 44
12	0 51	47	3 20	82	5 49
13	0 55	48	3 24	83	5 53
14	1 0	49	3 28	84	5 57
15	1 4	50	3 33	85	6 1
16	1 8	51	3 37	86	6 6
17	1 12	52	3 41	87	6 10
18	1 17	53	3 45	88	6 14
19	1 21	54	3 50	89	6 18
20	1 25	55	3 54	90	6 23
21	1 29	56	3 58	91	6 27
22	1 34	57	4 2	92	6 31
23	1 38	58	4 7	93	6 35
24	1 42	59	4 11	94	6 40
25	1 46	60	4 15	95	6 44
26	1 51	61	4 19	96	6 48
27	1 55	62	4 24	97	6 52
28	1 59	63	4 28	98	6 57
29	2 3	64	4 32	99	7 1
30	2 8	65	4 36	100	7 5
31	2 12	66	4 41		
32	2 16	67	4 45	200	14 11
33	2 20	68	4 49		
34	2 25	69	4 53	300	21 16
35	2 29	70	4 58		

ORGANOGRAPHIE

ET PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES.

MÉMOIRE SUR LA COMPOSITION ET LA STRUCTURE

DE PLUSIEURS

ORGANISMES DES PLANTES,

PAR MM. DE MIRBEL ET PAYEN.

DESCRIPTION DES PLANCHES (1).

PLANCHE I.

Fig. 1, 2, 3 *et* 4. *Appareil pour l'analyse élémentaire appliquée au dosage de l'azote.*

(Voyez sa description, pages 499 à 504 du 1^er^ Mémoire, tome XX des Mém. de l'Inst.).

Fig. 5. *Portion d'épiderme d'une très-jeune pousse de Cactus.*

a, *b* cuticule épidermique déjà formée; les cellules sous-jacentes sont remplies de granules et matière organique amorphe,

(1) Les planches 1, 1 *bis* et 3, sont intercalées pages 531 à 534 du tome XX : toutes les autres planches se trouvent dans ce volume-ci (XXII), à la fin de cette description.

abondants en substance azotée ou de composition quaternaire.

Fig. 6. *Coupe d'une partie un peu plus développée; on y remarque la formation d'un stomate, en b, c, et l'épaississement de la cuticule a, b, c, d.*

e, *f* première couche de cellules épidermiques.

g chambre à air correspondante à l'ouverture du stomate, et entourée de cellules graduellement agrandies, contenant des granules verts.

Fig. 7. *Tissu plus âgé du même cactus.*

a, *b* cuticule épidermique épaissie.

e, *f* cellules de l'épiderme, adhérentes à plusieurs rangées sous-jacentes, toutes entourées d'une matière (pectates et pectinates de chaux, soude et potasse, interposés dans la cellulose), qui épaissit de plus en plus les parois et intervalles compactes entre leurs cavités.

g chambre à air correspondante à un stomate dont l'ouverture n'a pas été atteinte par cette coupe. La chambre à air traverse plusieurs rangées de cellules épidermiques et pénètre jusque dans le tissu du parenchyme, dont les cellules, à parois plus minces, contiennent des granules verts.

Fig. 8. *Coupe perpendiculaire à la précédente, montrant la substance qui épaissit les parois des cellules, gonflée par la réaction de l'acide sulfurique à deux équivalents d'eau.*

g cavité ou chambre sous le stomate. Cette chambre est entourée, jusque près du fond, d'une membrane propre, adhérente à la cuticule épidermique, et formant ainsi un sac ouvert des deux bouts.

h, *h* parois épaissies sous l'influence de l'acide sulfurique.

i, *i* cellules épidermiques déformées et rétrécies par suite du gon-

flement considérable des parois, et renfermant des corpuscules à composition quaternaire ou azotée, la plupart rapprochés des parois internes de chaque cellule.

Fig. 9. *Coupe semblable à la précédente, mais vue sous un moindre grossissement, et montrant toute l'épaisseur des parois teintes en bleu violet par l'action d'une faible solution d'iode sur la cellulose désagrégée.*

g, g deux cavités correspondantes à deux stomates.

Fig. 10. *Portion d'une coupe semblable, montrant une dislocation des cellules épidermiques par les effets successifs, opérés sous le microscope : 1° de l'acide chlorhydrique (étendu de 10 volumes d'eau), qui a dissous les bases (chaux, soude et potasse); 2° de l'ammoniaque, qui s'est combinée à l'acide pectique, détruisant toute la consistance gélatineuse de cet acide, remplacé par la solution très-liquide du pectate d'ammoniaque formé; 3° enfin, de la solution d'iode ajoutée en excès, qui colore en jaune les corpuscules azotés réunis au milieu ou près de l'axe de chaque cellule; la membrane propre tapissant les parois latérales de la chambre à air est également colorée en jaune orangé par le même réactif, comme on le voit en* g.

Fig. 11. *Vue trois fois plus amplifiée du milieu de la figure précédente.*

g ouverture correspondante au stomate et prolongée dans l'épaisseur du tissu épidermique.

g' membrane qui recouvre les parois de l'ouverture et forme une sorte de manchon ouvert des deux bouts.

Fig. 12. *Vue, sous le même grossissement, d'une cellule isolée, après la dislocation du tissu épidermique par les réactions ci-dessus indiquées. On remarque plusieurs prolongements en entonnoirs qui, dans le tissu, se dirigeaient vers les cavités semblables des cellules voisines, et établissaient des communications entre ces cellules en réduisant à une mince membrane*

la séparation sur plusieurs points; les granulations azotées colorées en jaune par l'iode se voient rangées suivant l'axe de la cellule.

PLANCHE I *bis*.

CHAMPIGNONS ROUGES DU PAIN, CHAMPIGNON DU SUCRE, CHARBON DU BLÉ.)

a, *a* agglomérations des Champignons de couleur rouge-orangé, Oïdium aurantiacum, tels qu'on les voit à l'œil nu dans les vacuoles des pains infectés.

a' agglomération semblable coupée en deux, et montrant dans la zone rouge une couche épaisse composée d'innombrables sporules développées à l'extrémité des filets; ces derniers, irradiés d'un centre commun, sont d'un blanc jaunâtre et poussent dans les directions des rayons d'une sphère.

b plusieurs agglomérations semblables dont la végétation a eu lieu complétement à l'abri de la lumière, en sorte que la coloration rouge ne s'est pas produite. (Après une heure d'exposition à la lumière, la coloration commence à paraître comme en *b'*; elle fait ensuite des progrès très-rapides.)

c, *c* filet rameux, isolé des agglomérations et observé (à sec) sous le microscope à l'aide d'un grossissement d'environ cent cinquante fois le diamètre.

d extrémité jeune des filets avec leurs articulations, vue dans l'eau, sous une amplification de 300 diamètres, et au moment où les sporules commencent à se former; quelques-unes, disloquées, détachées par l'eau, se montrent libres en *d'*.

e articles et sporules des mêmes champignons rouges, disloqués par l'eau.

f fragment de filet et articles des parties des agglomérations non colorées.

f' sporules venues au bout de ces filets.

g sporule à l'état normal, vue, sous le microscope, à l'aide d'un grossissement de mille diamètres.

g' la même, un peu contractée et teinte en jaune orangé par une solution aqueuse d'iode.

g'' sporules traitées successivement sous le microscope par une solution de potasse étendue par l'eau, puis par une solution aqueuse alcoolisée d'iode, enfin par l'acide sulfurique graduellement plus concentré : cet acide désagrégeant les parties des enveloppes formées de cellulose non imprégnée de substance azotée, détermine la coloration bleue virant au violet, qui caractérise l'état de désagrégation intermédiaire entre la cellulose et la dextrine.

g''' sporule dont les enveloppes ont été désagrégées complétement par la réaction prolongée de l'acide sulfurique, laissant voir quelques guttules d'huile et des granules de corps azotés non dissous.

h portion de filet jeune, dont une des enveloppes de cellulose est colorée en bleu par l'action combinée comme ci-dessus de l'iode et de l'acide sulfurique; tout l'intérieur est rempli de substance azotée granuleuse, colorée en jaune par l'iode.

h' détritus de la désagrégation des articles et sporules montrant parfois la substance grasse oléiforme, réunie en gouttes plus ou moins volumineuses.

2^e^ *végétation cryptogamique rouge, ou variété à longs filaments.*

i végétation à l'état normal, vue à l'œil nu, très-développée sous l'influence d'une grande humidité locale. (Cette circonstance est probablement la seule cause des différences de formes, et surtout des dimensions très-allongées.)

j filets isolés vus dans l'air, sous le microscope.

k extrémités des mêmes filets rameux, vus à l'aide d'un grossissement plus fort (300 fois) dans l'eau; les sporules détachées se voient en *l*, *l*, *l*.

k' extrémité des filets plus développés, laissant voir quelques sporules ou de jeunes articles.

l' sporules traitées sous le microscope par l'iode et l'acide sulfurique, montrant les portions de cellulose presque pure bleuissant par suite des réactions précitées.

l'' détritus de l'action prolongée de l'acide sulfurique sur une sporule; on y remarque quelques guttules d'huile et des granules contenant des corps azotés.

m fragment de filet sous un pouvoir amplifiant de 1000 diamètres, laissant voir, par transparence, les substances azotées et les tissus de même nature et oléifères, disposés en globules organisés.

m' le même fragment après la réaction de l'iode et de l'acide sulfurique, dont les tissus, en partie désorganisés, laissent les guttules d'huile se réunir en globules formant hernie en plusieurs points ou mis en liberté, par la pression ou un léger glissement des lamelles de verre, en *m''*.

Champignons rouges du sucre.

Ces Champignons microscopiques, beaucoup plus petits que les précédents, ont détruit, dans plusieurs magasins et raffineries sis à Paris, des quantités notables de sucres bruts et de sucre en pains; les pains de sucre blanc attaqués, étaient, en quelques jours, tachés de stries rouges grisâtres, qui se creusaient parfois d'un ou de plusieurs millimètres.

Une agglomération des sporules rouges de ce champignon au centre de filaments, est représentée dans l'encoignure droite, au bas de la planche; on voit dans l'encoignure opposée un des filaments grossis huit cents fois, bifurqué, rempli de sporules prêtes à sortir de l'extrémité de ces filaments tubuleux.

Les trois corps arrondis à surface réticulée ou granuleuse (à droite du filament bifurqué), représentent les globules du champignon du blé (*charbon* Uredo Carbo); le quatrième, attaqué par l'acide sulfurique concentré, montre la matière grasse interne se réunissant en gouttes volumineuses; le cinquième et le sixième corps, plus irréguliers, indiquent les progrès

de l'altération par l'acide sulfurique. Enfin, le dernier corps arrondi (près des trois sporules bleuies g'') montre des sporules du Champignon du sucre se réunissant autour d'une bulle d'air qu'ils entourent complétement, et qu'ils maintiennent sphérique.

PLANCHE III.

Nervure médiane d'une feuille de Magnolia grandiflora.

La coupe générale d'une tranche mince de cette nervure (par un plan perpendiculaire à l'axe) offre l'ensemble des modes de consolidation qu'on retrouve, avec quelques variantes, dans toutes les autres feuilles qui résistent à la chute automnale.

On y remarque les effets de plusieurs réactifs employés successivement et avec des lavages intermédiaires; nous indiquerons comment ces réactions (1) décèlent la nature ou la composition chimique: le premier quart à droite, le moins coloré, a été éclairci par l'eau et l'acide acétique faible; le deuxième quart, immédiatement au-dessous, a de plus reçu un lavage à l'eau et une imprégnation d'iode (en solution légèrement alcoolisée); le troisième quart, contigu au précédent, montre le commencement de la double réaction de l'iode et de l'acide sulfurique; enfin, le quatrième quart, contigu au troisième et au premier, représente les mêmes effets, plus prononcés en raison de ce que l'acide sulfurique arrive moins affaibli, ayant mieux déplacé le liquide précédent; on remarque en examinant cette coupe générale de la périphérie au centre:

1° La cuticule épidermique fortement épaissie, qui reste légèrement co-

(1) Déjà employées par l'un de nous pour ses études sur les développements végétaux. (Voy. les Mémoires des Savants étrangers, t. VIII et IX.)

On parvient aisément à faire passer entre la lamelle de verre et le porte-objet du microscope tous les réactifs liquides et les eaux de lavage, en plaçant tout auprès et d'un côté de la lamelle, cinq ou six doubles de papier non collé formant un petit carré; le liquide entre les deux lames s'infiltre rapidement dans le papier, chaque goutte qu'on pose près du côté opposé s'introduit entre les deux lames et passe dans le papier; on ajoute un petit feuillet lorsque l'absorption se ralentit trop: toutes les réactions successives se règlent très-facilement ainsi, et chacune d'elles se prolonge à volonté.

lorée en verdâtre après le premier lavage; elle se colore en jaune par l'iode, en jaune graduellement plus orangé par l'action successive de l'iode et de l'acide sulfurique.

On peut voir à la partie supérieure cette cuticule commençant à se détacher, et à mieux montrer ses saillies anguleuses correspondantes aux coins entre les cellules; c'est que l'action prolongée de l'acide dissout ou désagrége par degrés tous les tissus sous la cuticule, tandis que celle-ci résiste; cependant ses parties internes, plus récemment agrégées et moins résistantes, se gonflent un peu; on conçoit que par suite de ce gonflement la cuticule s'enroule sur le côté externe.

Les colorations jaune, puis orangée, de la cuticule, sont dues à la matière azotée qui l'imprègne; sa résistance vient de sa forte cohésion et de la silice dont elle est injectée dans toute son épaisseur; ces trois conditions s'opposent à la désagrégation de la cellulose, qui forme la plus grande partie du poids de la cuticule.

2° Une rangée de cellules épidermiques à minces parois.

3° Trois rangées de cellules à parois épaisses, en cellulose, injectées d'une faible proportion de matière ligneuse, mélange qui se colore en jaune pâle par l'iode, et passe graduellement à une nuance verdâtre par l'acide sulfurique, qui désagrége et fait colorer la cellulose en bleu, la matière ligneuse en jaune, par conséquent l'ensemble en vert.

4° Tissu du parenchyme composé de cellules minces flexibles, renfermant des granules verdâtres qui contiennent des corpuscules azotés; l'iode jaunit ces corpuscules et la matière azotée en couche très-mince qui tapisse l'intérieur des cellules; quant à celles-ci, l'iode ne les teint pas, mais l'action additionnelle de l'acide sulfurique, en les désagrégeant, leur donne la propriété d'être teintes en bleu indigo graduellement plus foncé, caractérisant ainsi ce tissu de parenchyme dans toute la zone qu'il occupe. Les granules verts qu'il renferme deviennent jaune orangé foncé, sous l'influence combinée de l'iode et de l'acide.

Au milieu de cette zone, vers la face supérieure de la nervure, se trouvent deux faisceaux de filets ligneux j, j, au centre desquels passent un certain nombre de vaisseaux (1).

(1) On peut distinguer la masse de ces vaisseaux par leur teinte verdâtre au milieu des faisceaux

On remarque en outre dans la même zone parenchymateuse de la nervure trois groupes, *a*, *b*, *c*, de cellules ou fibres ligneuses très-irrégulières, fort épaisses, perforées d'un grand nombre de trous et ajoutant leur concours à la consolidation générale.

5° Concentriquement à la zone de parenchyme, on voit une série de faisceaux ligneux, *e*, *e*, protégeant les petites masses de faisceaux vasculaires contiguës à cette zone, et par conséquent aussi, disposées suivant un cercle autour de l'axe de la nervure.

6° Enfin, tout le tissu médullaire (circonscrit par cette double série de doubles faisceaux, vasculaires et ligneux) est formé de cellules à minces parois, graduellement agrandies jusques au centre; les détails ci-après, fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, montrent ces cellules médullaires criblées de trous.

Fig. 2. *Vue beaucoup plus amplifiée de l'épaisse cuticule, de la rangée de cellules épidermiques minces, et des rangées sous-jacentes de cellules épaisses.*

Fig. 3. *f, g, portion des fibres ligneuses soutenant les tissus qui environnent les faisceaux vasculaires; on voit un de ces faisceaux au milieu de la figure, et de chaque côté, sur les bords, une portion de faisceau semblable.*

Fig. 4. *Jonction du tissu concentrique aux faisceaux vasculaires avec le tissu médullaire formé de cellules minces juxtaposées et criblées de trous, communiquant ainsi toutes entre elles.*

Fig. 5. *Vue de la cellule médullaire centrale, la plus grande de toutes, et d'ailleurs criblée de trous comme les autres.*

Fig. 6. *Jonction du parenchyme avec les fibres ligneuses concentriques; celles-ci sont perforées de canalicules qui traversent entièrement leurs épaisses parois.*

---

de fibres ligneuses teintées en jaune orangé. Quant à la section de ces vaisseaux, elle devrait montrer des figures arrondies étroites, et non à angles vifs et larges comme la gravure les représente

Fig. 7. *Deuxième exemple d'une coupe des parties semblables à celles indiquées par la coupe fig.* 2. Voyez ci-dessus, p. 535.

Fig. 8. *Vue d'un renfort de cellulose injectée de matière ligneuse, formé de cellules épaisses, irrégulières, groupées ensemble et ajustées avec le tissu du parenchyme par leurs contours et leurs prolongements dans les méats intercellulaires. Cette coupe, faite parallèlement à l'axe de la feuille, montre la coupe longitudinale d'une des fibres ligneuses des faisceaux* e, e.

PLANCHE IV.

Détails complémentaires des tissus d'une feuille de Magnolia grandiflora.

Fig. 1. *Coupe perpendiculaire à la face inférieure sous un renfort, et perpendiculaire à la coupe fig.* 7, *pl.* 3.

a, *a* cuticule graduellement épaissie.
b, *b* rangée de cellules épidermiques minces.
c, *c*, *c* cellules épaisses allongées, perforées de nombreux canalicules.
d, *d* commencement du tissu fig. 5 *b*, *b*.
e extrémité d'un des renforts ligneux.

Fig. 2. *Vue d'un renfort ligneux au milieu du parenchyme.*
Fig. 3.

a, *a* glandes oléifères au milieu du parenchyme, près de la face inférieure : ces glandes renferment la substance huileuse aromatique interposée dans une matière molle azotée.
b, *b* cellules du parenchyme, partiellement remplies de granulations vertes.

Fig. 4. *Masse de vaisseaux scalariformes, ponctués, et offrant diverses formes de perforations et des trachées munies de tubes en hélices. (On voit*

sous un plus faible grossissement, fig. 10, *en* b, *le canal ligneux renfermant ces faisceaux vasculaires.*)

Fig. 5. *Coupe dans la partie inférieure de la nervure médiane.*

a, *a* vaisseau consolidé par un filet plein contourné en hélice, et des linéaments longitudinaux; on remarque des ouvertures elliptiques symétriquement distribuées entre les tours de l'hélice.
b, *b* cellules épaisses, perforées d'un grand nombre de trous.
c, *c* renfort, composé de cellules épaisses demi-ligneuses, allongées, coupées perpendiculairement à leur axe.

Fig. 6. *Coupe perpendiculaire à la face supérieure et perpendiculaire à la coupe fig.* 2 *de la pl.* 3.

a, *a* cuticule graduellement épaissie.
b, *b* cellules minces épidermiques.
c, *c* cellules épaisses allongées, perforées de trous.

Fig. 7. *Coupe transversale du bourrelet de fibres demi-ligneuses qui existe tout autour du limbe dans les bords de la feuille.*

a cuticule.
b, *b* cellules épidermiques.
c, *c* masse de cellules épaisses allongées, ou fibres demi-ligneuses.
d parenchyme.

Fig. 8. *Plus fort grossissement d'une partie de la coupe indiquée fig.* 7.

Fig. 9. *Coupe longitudinale des cellules épaissies, etc., de la fig.* 10.

Fig. 10. *Sorte de cloison formée par des cellules épaissies et des fibres demi-ligneuses, traversant le parenchyme entre les deux faces de la feuille, et entourant une nervule.*

a, *a* épiderme, face supérieure de la feuille.

a' a' épiderme, face inférieure.

b masse de vaisseaux enfermés dans une sorte de canal réservé au milieu des fibres demi-ligneuses.

c, c fibres demi-ligneuses qui constituent le support ou tissu résistant de la cloison.

d, d parenchyme de la feuille.

Fig. 11. *Coupe parallèle à la face supérieure.*

a, a projection des parois, perpendiculaires à cette coupe, des cellules de l'épiderme.

b, b cellules sous l'épiderme.

c, c attaches (plus ou moins lacérées) (*c* fig. 10) formées de cellules allongées dans la direction des nervules, développées entre les fibres ligneuses et l'épiderme. Ces cloisons, ainsi attachées sur l'un des épidermes, se projettent en lignes semblables, et fortement reliées sur l'autre face du limbe; partout, au milieu de ces supports, se trouve un canal cylindroïde ou tubulaire, dans lequel passent les vaisseaux des nervules ou *veines*.

Les nombreux espaces du parenchyme circonscrits entre ces *cloisons*, renforts des nervules, donnent lieu à un phénomène curieux, que l'on ne comprendrait pas sans la connaissance de la structure de ces tissus épaissis : si l'on expose au-dessus d'une flamme la surface d'une feuille bien développée du Magnolia, on entend bientôt une série de petites explosions dues à la rupture de l'épiderme, opérée successivement dans ces espaces clos; ainsi donc, le tissu autour des nervules est tellement serré, que la vapeur d'eau, ne pouvant les traverser rapidement, se comprime, et les stomates en partie oblitérés ne lui livrant point un passage libre, elle éclate en déchirant l'épiderme (1).

(1) Parmi les feuilles que des conditions analogues rendent décrépitantes au feu, celles du Magnolia produisent les plus nombreuses petites explosions. (Voyez les Mémoires sur les développements des végétaux, t. IX des Savants étrangers, p. 127 à 133.)

Les feuilles prises dans un bourgeon du même Magnolia n'ont offert que des cellules à parois minces, renfermant d'abondants corpuscules de substance azotée : ces très-jeunes feuilles étaient recouvertes d'une cuticule excessivement mince.

PLANCHE V.

ANATOMIE DE LA FEUILLE DE HOUX (ILEX AQUIFOLIUM).

Fig. 1, *coupe générale, et* 2, 3, 4 *et* 5, *détails de la nervure médiane.*

a, *a*, *fig.* 1 *et* 2, cuticule épaissie, pénétrant par des saillies notables dans tous les coins formés à la jonction des cellules de l'épiderme.

b, *b*, *fig.* 1 *et* 2, cellules à parois épaisses, à méats remplis, communiquant entre elles par de nombreux canalicules.

c, *c*, *fig.* 1, parenchyme contenant des granules verts; les cellules laissent entre elles un certain nombre de lacunes.

d, *f*, *fig.* 1, 3 *et* 4, cellules demi-ligneuses, épaisses, communiquant entre elles par de petits conduits dans le sens de rayons qui partent de la cavité centrale ; elles sont agglomérées en demi-cercle, et supportent les vaisseaux dont la section générale offre également une forme d'arc ou de croissant.

Les cellules très-fortes, demi-ligneuses, à section plus ou moins allongée, dans la section générale de toute l'agglomération, offrent encore un arc de cercle.

g, *g*, *fig.* 1 *et* 5, cellules très-épaisses, la plupart à section arrondie.

h, *h*, *fig.* 1 *et* 5, parenchyme supérieur rempli de granules verts; la plupart des cellules du parenchyme contiennent chacune une ou deux petites sécrétions huileuses de forme sphéroïdale.

b', *b'*, *et a'*, *a'*, *fig.* 1, cellules épaisses perforées, épiderme, cuticule épaisse, offrant des dispositions et une structure analogues à celles des parties inférieures décrites en *a* et *b*, fig. 1 et 2.

Fig. 6. *Coupe générale du limbe de la feuille de houx* (*dont on a supprimé*

dans la partie moyenne une largeur égale à l'épaisseur de la moitié du parenchyme.)

a, *a* cuticule.

b stomate à peine entr'ouvert.

c cellules courbes entourant le stomate.

d, *d* *e*, *e* cellules du parenchyme (partie inférieure) renfermant des granules verts et des sphérules oléifères; les trois autres rangées de cellules appartenant à ce système sont semblablement disposées.

f, *f* lacunes entre les cellules.

g, *g* cellules allongées, contiguës, sans lacunes (comme les deux autres rangées omises faute de place), appartenant toutes à la partie supérieure du parenchyme.

h, *h* cellules épaisses, communiquant entre elles par des pertuis.

i, *i* cellules de l'épiderme.

j, *j* cuticule fortement épaissie, moulée en quelque sorte sur la face externe des cellules épidermiques et jusque dans tous les joints intercellulaires.

Fig. 7 *et* 8. *Coupe perpendiculaire au bord et aux deux faces de la feuille.*

a, *a* triple rangée de cellules épidermiques superposées et recouvertes d'une cuticule plus résistante.

b, *b* double ou triple rangée de cellules à parois épaisses.

c, *c* faisceaux de cellules épaisses, longues, demi-ligneuses, formant un bourrelet consistant tout autour de la feuille; les parois de toutes les cellules sont perforées, perpendiculairement à leur cavité cylindrique, de canalicules établissant des communications libres entre elles.

c' faisceau plus interne de cellules semblables, contournant aussi le limbe, parallèlement aux bords de la feuille.

Fig. 9. *Coupe sous l'épiderme inférieur, parallèlement à la face de la feuille.*

a, *a* stomates dont les cellules jumelles spéciales sont remplies de sécrétions huileuses, globuliformes; l'ouverture du stomate est très-rétrécie par la membrane contiguë à la cuticule, et qui pénètre à l'intérieur entre les cellules courbes.

b, *b* cellules épidermiques.

Fig. 10. *Coupe parallèle à la face supérieure de la feuille, montrant les parois latérales sinueuses des cellules épidermiques, deux cloisons rectilignes séparant deux des cellules, en* a *et en* b.

c, *c* opercules traversant la paroi des cellules dirigée vers l'intérieur du limbe de la feuille.

Fig. 11 *à* 16. *Vue générale et détails de la coupe, perpendiculaire à l'axe, d'une épine de la feuille de houx.*

a, *a*, *fig.* 11 *et* 12, cuticule épidermique, dans l'épaisseur de laquelle se voient de nombreux vestiges de canalicules; cette cuticule présente des saillies correspondantes aux joints entre les cellules.

b, *b*, *fig.* 11 *et* 12, cellules de l'épiderme.

c cellules sous-jacentes et parenchyme.

d, *d*, *fig.* 11, 13, 14, 15, 16, fibres ligneuses à parois très-épaissies, et dont la cavité tubulaire communique par de nombreux canalicules avec les cavités des fibres contiguës.

e, *e*, *fig.* 11, 14 *et* 15, tissu moins dense, dont les cellules sont pleines de granules.

Fig. 17. *Coupe longitudinale, et* 18, 19, *détails plus amplifiés, de la même épine.*

a, *a*, *fig.* 17 *et* 18, cuticule fortement épaissie, traversée par des vestiges de canalicules.

b, *b*, *fig.* 17 *et* 18, cellules de l'épiderme, perforées, communiquant entre elles.

c, *c* tissu du parenchyme.

d, *d*, *fig.* 17 *et* 19, fibres ligneuses traversées par de nombreux canalicules.

e, *e*, *fig.* 17 *et* 19, parenchyme intérieur dont toutes les cellules sont perforées.

PLANCHE VI.

Feuilles de thé (thea viridis).

Fig. 1. *Coupe générale du limbe d'une feuille développée, montrant : 1° les cuticules épaisses moulées dans les joints des épidermes; 2° les cellules du parenchyme remplies de granules amylacés verdâtres, qui prennent au contact de l'iode une teinte bleu foncé.*

Fig. 2. *Bords de la même feuille, coupe montrant des caractères analogues à ceux indiqués par la première coupe.*

Fig. 3. *Épiderme de la face supérieure, coupe parallèle à cette face, montrant les formes sinueuses des parois latérales des cellules épidermiques.*

Fig. 4, 5, 6, 7, 8 *et* 9. *Coupe perpendiculaire aux deux faces, passant dans une nervule d'une feuille âgée, dans laquelle se sont formés un grand nombre de cristaux d'oxalate de chaux, et des renforts ligneux pénétrant sous des formes très-variées, irrégulières, allongées, entre les cellules du parenchyme.* (Une partie des tissus entre ces figures a été supprimée.)

a, *a* épiderme couvert d'une cuticule épaisse, fortement ondulée.

b, *b* tissu cellulaire contenant des cristaux irradiés et hérissés de pointes (oxalate de chaux).

c, *c* tissu plus rapproché des cellules demi-ligneuses allongées, et plus abondant en cristaux.

c', *c'* coupe perpendiculaire à l'axe des prolongements ligneux.

d, *d*, *fig.* 5 *et* 6, cellules allongées épaisses, demi-ligneuses, entourant les vaisseaux.

e, *e*, *fig.* 6 *et* 7, vaisseaux de structures variées.

f, *f*, *fig.* 8, cellules longues, entre lesquelles des cellules courtes interposées renferment des cristaux d'oxalate de chaux.

g, *g* cellules demi-ligneuses, allongées, perforées d'un grand nombre de trous.

Fig. 9. *Partie inférieure du parenchyme, dont la plupart des cellules* i, j, l, m, *renferment des cristaux d'oxalate de chaux séparés, ou agglomérés autour d'un centre commun, et présentant l'aspect de sphérules hérissées de pointes*, k, *renforts demi-ligneux.*

n, *n* épiderme de la face inférieure, recouvert d'une cuticule épaissie.

PLANCHE VII.

VUES RELATIVES A L'ANATOMIE DES FEUILLES DE THÉ QUI ONT ACQUIS LE PLUS DE DÉVELOPPEMENT.

Fig. 1. *Coupe perpendiculaire aux faces de la feuille.*

a, *a* épiderme à cuticule et membranes épaisses perforées, semblables à l'épiderme et à la cuticule inférieurs.

b, *b* deux renforts ligneux qui s'étendent d'une face à l'autre, traversant tout le parenchyme, s'appuyant sous l'épiderme supérieur par un très-large empatement ramifié, et présentant au milieu du parenchyme, et surtout près de l'épiderme inférieur, de nombreuses ramifications. Ces renforts et leurs ramifications sont cylindroïdes, tubuleux, à parois épaissies, perforées de nombreux canalicules.

c, *c* cellules longues du parenchyme, remplies de granules verts; tout le reste du parenchyme offre de nombreuses sécrétions de matières huileuses aromatiques sphéroïdales, *d*, et des cristaux d'oxalate calcaire, *e*, variés par leur forme ou leur mode d'agglomération; les cellules qui renferment ces cristaux en quantité un peu forte sont, comme on le voit, exemptes de granules verts.

Fig. 2. *Coupe au milieu du parenchyme, suivant un plan parallèle aux faces de la feuille.*

a cellules minces pleines de granules verts.
b, b coupe perpendiculaire à l'axe d'un renfort, montrant les ramifications latérales simples ou bifurquées qui se sont développées entre les cellules.

Fig. 3. *Coupe au-dessous d'une nervure, montrant les cellules épaissies du parenchyme et des cristaux d'oxalate calcaire.*

Fig. 4. *Suite de la même coupe.*

c cristaux.
b renfort ligneux formé entre les cellules.

Fig. 5. *Suite.*

Tissu *b* à épaisses parois.

Fig. 6. *Mode de consolidation dans la nervure.*

Fig. 7 *et* 8. *Suite et épiderme supérieur.*

On remarque encore dans ces deux figures des cristaux d'oxalate de chaux sous plusieurs formes.

Fig. 9. *Coupe dans l'épiderme inférieur et parallèle à la face de la feuille.*

On y remarque six stomates à cellules remplies de sécrétions oléiformes, rangés en cercle, autour d'un poil : celui-ci est implanté au milieu du tissu qui recouvre une volumineuse sécrétion sphérique de substance grasse.

Fig. 10. *Le même poil déformé par l'action successive de l'iode qui a jauni*

toute la cuticule enveloppant ce poil, et de l'acide sulfurique concentré qui a successivement gonflé toute la cellulose formant le tube interne a, *puis désagrégé cette cellulose au point correspondant à l'état des particules amylacées humides offrant alors la coloration spéciale violette intense; enfin, toute la cellulose se dissolvant en dextrine incolore disparaît : laissant (vide, résistante et teinte en jaune orangé) la cuticule qui enveloppait le poil, et que la figure montre ainsi disséquée.*

PLANCHE VIII.

ANATOMIE DES FEUILLES DE CAMÉLIA (*fig.* 1 *à* 7) ET D'OLEA FRAGRANS (*fig.* 8 *à* 12).

Fig. 1. *Vue générale. Coupe perpendiculaire aux faces d'une feuille de Camélia ayant* 62 *millimètres de longueur et* 37 *millimètres de largeur, développée sur une pousse de l'année.*

a, a épiderme supérieur.
c épiderme inférieur; les cuticules sont minces.
b développement d'un renfort; ses parois, perforées de trous nombreux, sont encore minces et très-peu ligneuses.

(Les plus jeunes feuilles de cette pousse n'ayant que 3 centimètres de longueur et 12 millimètres de largeur ne contenaient pas encore de *renforts* analogues à celui-ci ni au suivant fig. 2.)

Fig. 2. *Détail plus amplifié d'une coupe dans la même feuille.*

a épiderme.
b renfort commençant à se former.

Fig. 3. *Vue générale. Coupe perpendiculaire aux faces d'une feuille de deuxième année.*

a, a, et a'; a' épidermes supérieur et inférieur à cuticules fortement épaissies.

b, b' tissus de cellules épaisses, qui s'étendent d'une face à l'autre et soutiennent les vaisseaux de la feuille.

c, c' cellules allongées demi-ligneuses.

d, d' faisceaux de tubes cloisonnés.

e faisceau cylindroïde des différents vaisseaux ; ces quatre parties sont comprises dans les nervures.

f, f renforts tubuleux à parois épaissies, demi-ligneuses.

Fig. 4. *Portion du parenchyme de la même feuille ; détail sous un grossissement double, montrant des cristaux agglomérés (oxalate de chaux) dans une cellule, et toutes les autres cellules remplies de grains d'amidon.*

Fig. 5. *Coupe dans le parenchyme, parallèle aux faces de la feuille.*

a, a cellules (partie demi-ligneuse) accompagnant les vaisseaux et formant dans tout le limbe des cases irrégulières.

b, b coupe des renforts demi-ligneux (marqués de la lettre F, fig. 3).

Fig. 6. *Vue d'un des renforts rameux, à parois épaissies criblées de trous, dessiné sous un fort grossissement ; on voit les grains d'amidon dans les cellules, remplies d'ailleurs de granules verdâtres très-petits.*

Fig. 7. *Coupe, vue sous le même grossissement, d'un embranchement de l'un des renforts, montrant les canalicules traversant toute l'épaisseur des parois.*

Fig. 8. *Coupe d'une jeune feuille d'Olea fragrans ; toutes les cellules du parenchyme* a, a, *et même de l'épiderme, sont remplies de matière granuleuse azotée ; deux glandes oléifères,* b, b, *sont encore peu développées, et superficiellement adhérentes à la cuticule de chacun des épidermes.*

Fig. 9. *Mêmes glandes plus développées.*

Fig. 10. *Montre sur une feuille plus développée, une glande, plus volumineuse, qui a déprimé le tissu et s'y est plus intimement attachée.*

Fig. 11. *Renforts doubles, dans une feuille anciennement développée d'Olea fragrans, s'étendant d'une face à l'autre entre les deux épidermes, où se ramifient de larges empatements; la plupart des renforts ainsi disposés sont simples et forment d'épais et longs tubes étendus entre les deux faces de la feuille.*

Fig. 12. *Une glande vue sur une feuille anciennement développée se montre à demi introduite dans le tissu de la feuille.*

PLANCHE IX.

ANATOMIE DES FEUILLES DU NERIUM OLEANDER.

Fig. 1. *Vue générale d'une coupe perpendiculaire aux faces de la feuille.*

a, a cuticule fortement épaissie de l'épiderme inférieur, formant des saillies entre les cellules épidermiques *b b.*

c, c tissu dont les cellules à parois épaisses, perforées, sont exemptes de matière verte.

d, d cellules allongées, remplies de granulations vertes, et contenant des globules huileux.

e, e cellules irrégulières remplies de matière verte, et lacunes vides, aérifères, interposées.

f, f cellules allongées, pleines de matière verte, et renfermant des globules huileux.

g, g tissu formé de cellules à parois épaissies, perforées de trous circulaires et elliptiques, renfermant des substances granuleuses azotées, mais pas de granules verts.

h, h épiderme recouvert d'une cuticule fortement épaissie, à saillies anguleuses intercellulaires.

Fig. 2. *Coupe générale moins amplifiée.*

a, a cuticule fortement épaissie et couche de cellules épidermiques.

a' a' cavité cylindroïde ou irrégulière, tapissée par l'épiderme et garnie de poils nombreux. Cette cavité pénètre au travers du tissu des cellules longues, serrées, jusqu'au tissu intermédiaire du parenchyme.

On remarque des stomates au fond de cette cavité, disposition qui met évidemment en relation les ouvertures très-étroites des stomates avec les lacunes aérifères nombreuses du parenchyme intermédiaire. (Voyez les détails de ce parenchyme, fig. 1, *e*, *e*, *e*.)

b, *b* tissu de cellules exemptes de matière verte.

d, *d* tissu de cellules allongées.

c, *c* tissu de cellules à lacunes aérifères.

f, *f* deuxième tissu de cellules allongées.

h, *h* deuxième tissu de cellules exemptes de matière verte.

i, *i* cuticule sur l'épiderme de la face supérieure.

On distingue, passant au travers de tous ces tissus, des nervules *e*, *e*, *e'*, *e'*, formées de cellules à parois épaisses, et reliant entre eux les épidermes des deux faces de la feuille; au milieu de ces nervules un conduit cylindrique est réservé; il contient les faisceaux vasculaires; entre ces vaisseaux et les épidermes, on remarque deux rangées de cellules spéciales, contenant des agglomérations cristallines d'oxalate de chaux.

Fig. 3. *Coupe parallèle à la face inférieure de la feuille.*

a, *a*, *a*, *a*, *a'* cinq des cavités au fond desquelles se trouvent les stomates: l'une d'elles, *a'*, offre l'exemple d'une cavité très-irrégulière.

Fig. 4. *Coupe parallèle à la face supérieure de la feuille.*

Fig. 5. *Vue d'un stomate plus amplifié, montrant dans ses cellules courbes plusieurs sécrétions oléifères globuleuses.*

Fig. 6. *Vue amplifiée de la section d'une des cavités renfermant les stomates.*

Fig. 7. Vue amplifiée d'une des cellules spéciales contenant une agglomération cristalline, situées au-dessus et au-dessous des vaisseaux, dans les tissus résistants des nervures (*e*, *e'* fig. 2).

PLANCHE X.

Feuille d'oranger.

Fig. 1. Coupe perpendiculaire aux faces de la feuille, dessinée au moment où l'acide sulfurique, après l'action de l'iode, commence à désagréger les tissus de la face.

a, *a* épiderme inférieur.

b, *b*, *b'*, *b'* parenchyme renfermant des granules verts : toutes les parois des cellules de ce tissu se gonflent et bleuissent fortement par la première désagrégation de leurs membranes (cellulose), tandis que les granules contenant des matières azotées deviennent jaune orangé, et se contractent avant d'être désagrégés et dissous.

c, *c* fibres ligneuses allongées : attaquées plus lentement par l'acide et restant teintes en jaune orangé, ces fibres forment, par leur réunion, un canal demi-cylindrique parallèle au contour général des faisceaux vasculaires.

d, *d*, *d'*, *d'* tissu cellulaire qui, désagrégé et bleui, entoure les vaisseaux réunis en une masse cylindroïde.

e, *e* vaisseaux divers et trachées teintes en jaune par l'iode, et résistant plus longtemps que les cellules du parenchyme à l'acide sulfurique, qui les disloque, les brunit et les désagrége peu à peu.

Fig. 2. Coupe parallèle aux faces de la feuille.

c, *c* fibres ligneuses à parois épaissies.

d, *d* cellules allongées à minces parois, interposées entre les fibres ligneuses et les vaisseaux.

e, *e* vaisseaux et trachées.

Fig. 3. *Coupe perpendiculaire à une nervule.*

b, *b*, *b* tissu cellulaire du parenchyme contenant des granules verts.
c, *c*, *c* canal demi-cylindrique que forme l'assemblage des fibres ligneuses.
e, *e*, *e* faisceau vasculaire cylindroïde entouré de cellules à parois minces.

Fig. 4. *Détail d'épiderme d'une très-jeune feuille ayant deux millimètres et demi de large et neuf millimètres de longueur.*

a, *a* cuticule à saillies anguleuses intra-cellulaires.
b, *b* couche de cellules épidermiques.
c, *c* tissu cellulaire.

Fig. 5. *Détail de cellules allongées, parallèles à la direction des nervules.*

a, *a* cellules allongées assemblées bout à bout.
b, *b* cellules spéciales contenant chacune une sécrétion d'oxalate de chaux.

Fig. 6. *Coupe parallèle aux faces de la feuille ; cellules du parenchyme sous un plus fort grossissement.*

Fig. 7. *Tranche sous la coupe fig.* 6, *montrant les cellules perforées qui environnent une sécrétion oléifère* (*d*, *d*, fig. 12).

Fig. 8. *Fibres ligneuses, coupe longitudinale.*

Fig. 9. *Trois variétés de vaisseaux.*

a trachée à double hélice.
b trachée à triple hélice.

c vaisseau ponctué à canalicules offrant une section en croix dans l'épaisseur des parois.

Fig. 10. *Réunion de cellules renfermant chacune une sécrétion cristalline d'oxalate de chaux.*

Fig. 11. *Les mêmes cellules, après la réaction de l'acide azotique concentré, montrant les membranes qui enveloppaient les cristaux dissous.*

Fig. 12. *Coupe du parenchyme près d'une sécrétion oléifère.*

a, a cuticule à saillies anguleuses.
b couche épidermique.
c parenchyme contenant les granules verts.
d, d cellules déprimées et refoulées de façon à laisser au milieu d'elles une grande cavité sphérique.
e, e sécrétion oléifère aromatique, sphéroïdale, formée d'un tissu spécial azoté, très-délicat, analogue au tissu des concrétions calcaires des urticées. (Tome VIII et IX des *Savants étrangers*; Mémoires de M. Payen.)

On voit, libres, dans la grande cavité sphérique, quelques globules oléagineux, et plusieurs cellules du tissu léger atteintes par la coupe.

Fig. 13. *Vue des cellules perforées qui entourent la grande cavité* (*d, d*, fig. 12.)

PLANCHE XI.

Anatomie des feuilles de buis et de chêne.

Fig. 1. *Coupe perpendiculaire aux faces d'une feuille de Buis commun.*

a cuticule épidermique de la face inférieure.
b épiderme dont une cellule plus développée contient une sécrétion huileuse.

c, *c* tissu à lacunes aérifères contenant des granules verts et des sécrétions huileuses globuliformes.

d, *d* sécrétions oléifères volumineuses, formées par un tissu léger renfermant de très-nombreuses gouttelettes d'huile : une de ces sécrétions se voit sous un plus fort grossissement, figure 1 *bis*.

a', *b'*, *c'* tissus constituant la moitié supérieure de l'épaisseur de la feuille, analogues aux parties correspondantes de la moitié inférieure.

Fig. 2. *Coupe perpendiculaire aux faces et au bord de la feuille de Buis.*

a, *a'* cuticule épaissie et épiderme.

b, *b'* tissu du parenchyme, parties inférieure et supérieure.

e, *e*, *e* nombreuses fibres ligneuses, réunies en un faisceau irrégulier qui règne tout autour de la feuille, et forme avec le tissu sous-jacent un canal *f*, *f*, contenant un appareil vasculaire.

Fig. 3. *Coupe perpendiculaire à la face supérieure d'une feuille du Buis de Mahon.*

a, *a* cuticule très-épaisse dont les couches, successivement formées, s'exfolient aisément.

b, *b* cellules épidermiques.

c, *c*, *d*, *d* cellules sous-jacentes; la dernière rangée, sous l'influence simultanée de l'iode et de l'acide sulfurique concentré, se désagrége en développant une coloration verte ou bleuâtre, tandis que les deux autres rangées, et la cuticule surtout, résistent et se colorent en jaune orangé.

Fig. 4. *Tranche perpendiculaire à la face supérieure d'une feuille de Buis de Mahon.*

a, *a* cuticule très-épaisse à saillies intercellulaires.

a', *a'* organismes adhérents à la couche externe de la cuticule épidermique.

b, *b* cellules de l'épiderme.

Fig. 5. *Coupe de la même feuille montrant un stomate.*

a, *a* cuticule.

a' ouverture externe du stomate.

b, *b* cellules courbes entourant l'ouverture et contenant des globules huileux.

c, *c* cellules appartenant au même organe et remplies de substance organique molle azotée.

Fig. 6. *Bout d'une jeune feuille de Buis où la cuticule manque depuis* a *jusqu'à* b.

On y remarque des poils irréguliers, contigus au tissu du parenchyme.

Fig. 7. *Détails grossis montrant quelques-uns des poils irréguliers cloisonnés, contigus aux cellules de la feuille, dans les parties où la cuticule manque.*

Fig. 8. *Poil cloisonné de la même feuille dans une partie où la cuticule existe et se montre contiguë à la base du poil.*

Fig. 9 *et suivantes, Anatomie de la feuille de Chêne.*

Fig. 9. *Face externe de l'épiderme inférieur, couverte de granulations pressées formant une sorte de tissu celluleux.*

a, *a* partie de cette face où l'on voit les stomates.

b, *b* partie correspondante aux tissus internes qui accompagnent les nervules : on a dessiné la projection des cellules allongées qui suivent la direction des nervules.

Fig. 10. *Coupe perpendiculaire à la précédente.*

On remarque les granulations externes adhérentes à la cuticule de la face inférieure.

Fig. 11. *Tissus environnant les faisceaux vasculaires.*

Fig. 12. *Tissus consolidés par des cellules épaissies.*

Fig. 13. *Cellules étroites épaissies, contiguës aux cellules larges.*

Fig. 14. *Cellules épaisses à méats pleins, contiguës à l'épiderme.*

a, a cuticule épaissie prolongeant ses saillies dans les joints anguleux entre les cellules de l'épiderme.

On remarque, sur la dernière couche externe de la cuticule, des granulations serrées adhérentes, semblables à celles qui recouvrent la cuticule de l'épiderme inférieur.

Fig. 15. *Groupes de poils réunis à la base; celle-ci est implantée sur l'épiderme inférieur.*

Fig. 16. *Coupe de l'épiderme inférieur, montrant un faisceau de poils enchâssés dans l'épaisseur de la cuticule fortement épaissie en cet endroit, offrant quatre cavités celluleuses, et prolongeant, entre les cellules épaissies de l'épiderme, des saillies très-distinctes.*

Fig. 17. *Poils en faisceau implantés sur la face supérieure du limbe de la feuille.*

Tous ces poils, attaqués par l'iode et l'acide sulfurique, se gonflent; la cellulose, intermédiaire entre la superficie externe et les parois de la cavité cylindrique, verdit, puis acquiert lentement une teinte violette prononcée, puis se dissout: la cuticule superficielle du poil résiste, reste co-

lorée en jaune orangé, comme la membrane interne (moins résistante toutefois) qui tapisse les parois de la cavité tubuleuse des poils.

Fig. 18. *Détails d'une tranche de l'épiderme, attaquée par l'iode et l'acide sulfurique : la cuticule et ses saillies intercellulaires se gonflent, et montrent des détails curieux de structure interne.*

Ces parties résistent, tandis que toutes les cellules et les tissus sous-jacents se désagrégent par degrés, et se dissolvent enfin, sans laisser autre chose que des traces de granules azotés.

PLANCHE XII.

ANATOMIE DES FEUILLES DU HÊTRE ROUGE, FEUILLE ET FRUIT DU NOYER, TISSU DU FUCUS DIGITATUS.

Fig. 1. *Vue générale d'une coupe perpendiculaire à l'axe de la nervure médiane d'une feuille du Hêtre rouge.*

Les parties du limbe adhérentes à cette nervure correspondaient aux points indiqués par les lettres *a*, *b*, de chaque côté de la figure.

On remarque, dans cette figure, en observant de la circonférence au centre :

1° La cuticule ondulée (*a*, *a*, fig. 2) ;

2° La couche de cellules épidermiques (*b*, fig. 2) ;

3° Les cellules à parois épaisses (*c*, *c*, fig. 2) ;

4° Le tissu cellulaire analogue au parenchyme, mais plus consistant ;

5° Un cercle concentrique de fibres ligneuses appartenant à un cylindre qui consolide la nervure dans toute sa longueur, et se relie par douze prolongements internes (dirigés dans le sens de rayons) avec un tissu de cellules épaisses allongées, dont les cavités offrent des sections arrondies ou elliptiques ;

6° Entre ces masses de tissus ligneux et résistants, douze agglomérations, rangées en cercle, de tissu mince, renfermant les faisceaux vasculaires ;

7° Enfin, plusieurs masses semblables, intercalées plus près du centre, entre les derniers tissus résistants, à cavités cylindroïdes.

Les fig. 3, 4 et 5 montrent des détails plus amplifiés des différentes formes de tissus résistants à cavités arrondies, et des tissus interposés appartenant au système vasculaire.

Fig. 6. *Coupe du limbe perpendiculaire aux faces, vue sous un grossissement trois fois plus grand que la fig.* 1.

a, *a* cuticule et cellules de l'épiderme inférieur : plusieurs de ces dernières renferment chacune une sécrétion cristalline d'oxalate de chaux.

b, *b* cellules du parenchyme contenant des granules verts : un grand nombre de lacunes aérifères sont interposées dans ce tissu.

c, *c* cellules allongées du parenchyme supérieur, la plupart renfermant des granules verts : on voit en *d*, *d*, *d*, trois de ces cellules réservées à des concrétions d'oxalate calcaire hérissées de pointes cristallines.

a', *a'* cellules de l'épiderme supérieur, dont plusieurs contiennent des cristaux d'oxalate de chaux.

Fig. 7. *Partie de l'épiderme (coupe parallèle à la face du limbe) correspondante aux nervules.*

a cellules ordinaires de l'épiderme ;

b cellules épidermiques allongées et dirigées dans le sens de la nervule (ces cellules dessinées vides de cristaux).

c, *c* cellules épidermiques, également correspondantes aux nervules, mais dessinées avec les cristaux d'oxalate calcaire disposés en séries.

Fig. 8. *Coupe sous l'épiderme inférieur, plus fort grossissement.*

En *a*, *a* on voit, sous les cellules à parois sinueuses de l'épiderme, les cellules irrégulières renfermant la matière verte, et entre elles les lacunes aérifères.

b, *b* cellules épidermiques allongées, correspondantes aux nervules; les unes renfermant des cristaux d'oxalate calcaire, les autres une matière colorée en rouge.

Fig. 9. *Épiderme inférieur et tissu sous-jacent d'une feuille de Noyer.*

On y remarque une glande adhérente à la cuticule, contenant des gouttelettes oléiformes.

Fig. 10. *Poil offrant des saillies circulaires internes contenant des granulations azotées, contigu à la cuticule épidermique du fruit vert du Noyer.*

Fig. 11 *et* 12. *Variétés de poils observés sur le même fruit.*

Fig. 13. *Coupe perpendiculaire à la face du Fucus digitatus.*

Fig. 14. *Coupe du même fucus parallèle à la face, et montrant les cellules disloquées par l'action successive de l'acide acétique qui a dissous les bases : chaux, soude, potasse, et de l'ammoniaque en excès qui a dissous (en pectate d'ammoniaque) l'acide pectique intercellulaire.*

PLANCHE XIII.

ANATOMIE DES FEUILLES DU LILAS COMMUN (SYRINGA VULGARIS).

Fig. 1. *Coupe perpendiculaire à la face inférieure.*

a glande externe oléifère, développée sous l'épiderme.

b cuticule épidermique offrant de nombreuses saillies linéaires extérieures, convergentes vers la dépression, en entonnoir, au fond de laquelle s'attache la glande.

c, *c* couche épidermique renfermant des globules oléagineux à odeur forte.

Fig. 2. *Coupe perpendiculaire aux deux faces, montrant sur les deux*

cuticules épidermiques des saillies linéaires, et dans toutes les cellules du parenchyme, entre les deux épidermes, de nombreux globules verts.

On y remarque, outre la glande (vue, fig. 1, sous un plus fort grossissement), une nervule offrant un faisceau vasculaire cylindroïde, entouré de cellules à parois résistantes, mais non ligneuses.

Fig. 3. *Coupe parallèle à l'épiderme supérieur, montrant la disposition des rayures ou saillies linéaires de la cuticule au-dessus d'une nervule.*

On voit, au travers de cette cuticule, la configuration des cellules épidermiques correspondantes à la nervule.

Fig. 4. *Vue de l'épiderme inférieur sous la cuticule épidermique, montrant :* 1° *la disposition des stomates autour de la glande ;* 2° *les globules d'huile nombreux dans les cellules courbes des stomates ;* 3° *des globules semblables disséminés en petit nombre (de* 1 *à* 3 *ou* 4) *dans chacune des cellules de l'épiderme.*

Fig. 5. *Glande externe adhérente à l'épiderme supérieur.*

On remarque les saillies, en bourrelets, extérieures de la cuticule, convergeant vers la glande ainsi que vers les stomates.

Les cellules épidermiques se voient au travers de la cuticule.

Fig. 6. *Vue d'une glande sur une feuille de Lilas à feuilles glauques.* (*Toutes les figures suivantes appartiennent au même Lilas.*)

a, *a* cellules épidermiques.

a', *a'* épiderme rabattu et dénudé de sa cuticule par la coupe.

b, *b* tissu du parenchyme dont les cellules sont remplies de granules verts.

c, *c* glande adhérente à l'épiderme.

Fig. 7. *Coupe au milieu de l'épiderme.*

Cette tranche étant mise en contact avec l'iode, puis avec l'acide sul-

furique, on a vu toutes les cellules sous-épidermiques se désagréger en prenant une vive coloration violette.

Fig. 8. *Vue d'une glande coupée en deux.*

Fig. 9. *Épiderme et glande se disloquant en huit segments remplis de granulations jaunes orangées.*

On voit autour les cellules épidermiques renfermant des globules huileux, et les bourrelets de la cuticule serpentant sur l'épiderme.

Fig. 10. *Coupe perpendiculaire aux deux faces du limbe.*

a, *a* et *a'*, *a'* épidermes inférieur et supérieur recouverts de cuticules striées.

b, *b* parenchyme inférieur rempli de granules verts elliptiques, et lacunes aérifères.

c, *c* parenchyme supérieur, dont les cellules renferment de semblables granules.

Fig. 11. *Vue plus amplifiée; coupe parallèle à la face inférieure montrant les cellules du parenchyme et les lacunes interposées.*

Fig. 12. *Épiderme inférieur et cuticule striée de bourrelets dirigés vers les stomates; les cellules courbes de ceux-ci contiennent chacune des globules oléagineux disposés en chapelets.*

Fig. 13. *Épiderme supérieur montrant les stries ou bourrelets serpentant et formant saillie sur la cuticule.*

On aperçoit, au travers de la cuticule, les globules huileux des cellules épidermiques.

PLANCHE XIV.

Épidermes, cuticules, etc.

Fig. 1. *Épiderme de jeune feuille de Myrsine des serres.*

a, *a* cuticule à superficie striée.

b, *b* cellules épidermiques, remplies de matière granuleuse.

Les réactions successives de l'iode et de l'acide sulfurique colorent :

1° En jaune orangé, la cuticule qui résiste et se sépare;

2° En violet, les cellules épidermiques qui se désagrégent peu à peu, laissant la masse granuleuse qu'elles renfermaient colorée en jaune, et gardant la forme de l'intérieur de ces cellules.

Fig. 2. *Vue des mêmes réactions qui s'achèvent.*

a, *a* cuticule striée, étendue à plat, isolée de l'épiderme, et laissant voir la projection des saillies inférieures qui pénétraient les intervalles entre les cellules épidermiques.

a', *a'* bord de la cuticule repliée, montrant le dessous à structure granuleuse et les saillies inférieures.

b, *b* masses granuleuses jaunies, séparées et libres après la dissolution de la cellulose qui formait les parois des cellules enveloppantes.

Fig. 3. *Coupe perpendiculaire aux faces et au bord d'une très-jeune feuille prise au milieu d'un bourgeon de la Vanille des serres.*

On remarque : 1° la cuticule déjà formée; 2° l'épiderme rempli de matière granuleuse azotée; 3° les tissus du parenchyme, contenant beaucoup de granules, semblent formés de cellules à parois molles, ondulées, peu consistantes.

Fig. 4. *Coupe parallèle à la face inférieure d'une feuille très-développée de Vanille, montrant un stomate rempli de globules huileux, et les cel-*

lules épidermiques renfermant des agglomérations moins nombreuses de semblables globules.

Fig. 5. *Coupe d'une très-jeune feuille de Vanille.*

a, a épiderme rempli de substance molle, granuleuse, azotée, recouvert d'une cuticule très-mince, à peine discernable.
b, b parenchyme.

Fig. 6. *Coupe perpendiculaire à la face supérieure de la même feuille.*

a, a cuticule épaissie.
b, b cellules épidermiques contenant des globules huileux.

Fig. 7 *et* 8. *Autres coupes des mêmes feuilles.*

Fig. 9. *Coupe parallèle à la face supérieure d'une feuille âgée de Myrsine, montrant la cuticule tranchée dans son épaisseur et formée de granules intercalés et de couches superposées.*

Fig. 10. *Épiderme de Rhododendron arboreum, feuille âgée.*

a, a cuticule fortement épaissie par l'interposition de granules et offrant à l'extérieur une superficie ondulée. Toute cette épaisseur se colore en jaune par l'iode; elle est très-résistante.
b, b épiderme contenant des globules oléagineux.

Fig. 11. *Cuticule épidermique très-épaisse de l'Escallonia floribunda, tranchée parallèlement à la face de la feuille, et montrant la structure interne des couches et granules interposés.*

Fig. 12. *Coupe perpendiculaire à la face superieure, feuille d'Aucuba Japonica.*

a, a cuticule consistante, graduellement épaissie, montrant des zones distinctes d'accroissement.

b, *b* tissu épidermique.
c, *c* premières cellules du parenchyme.

Fig. 13. *Feuille de Metrosideros.*

a, *a* cuticule résistante, graduellement épaissie, montrant deux fortes couches superposées.
b, *b* cellules épidermiques contenant des globules huileux.

Fig. 14 *et* 15. *Même feuille âgée, deux coupes montrant les stomates.*

a, *a* cuticule très-épaisse et résistante.
a' cavité externe du stomate.
a'' chambre à air sous la cavité du stomate.
b, *b* épiderme contenant des globules huileux.
c, *c* parenchyme.

Fig. 16. *Feuille vieille du Quercus glabra, coupe perpendiculaire à la nervure médiane et à la face supérieure.*

a, *a* cuticule consistante très-épaisse, formée de plusieurs couches.
b, *b* épiderme.
c, *c* parenchyme rempli de granules verts.

Fig. 17. *Même feuille, coupe perpendiculaire au bord et aux deux faces.*

a, *a* cuticle épaisse à superficie ondulée recouverte de granulations organiques.
b, *b* cellules épidermiques.
c, *c* parenchyme.

Fig. 18. *Feuille âgée du Thea viridis.*

a, *a* cuticule graduellement épaissie par zones irrégulières.
b, *b* épiderme.
c, *c* parenchyme rempli de granules verts. La cuticule jaunit par l'iode

et résiste à l'acide sulfurique; les cellules sous-jacentes imprégnées d'iode, puis attaquées par l'acide sulfurique, se désagrégent en développant une belle coloration violette, qui disparaît à mesure que la dissolution s'achève.

PLANCHE XV.

ANATOMIE DE PLUSIEURS TISSUS DES NOIX, POIRES ET COUCHES CORTICALES DES CINCHONA.

Fig. 1. *Couches corticales du Cinchona caribœa (jeune).*

a, a, a, a épiderme formé de six couches superposées de cellules minces, dont la superficie est recouverte d'une cuticule offrant des saillies anguleuses, correspondantes aux joints entre les cellules de la dernière couche.

b, b tissu cellulaire dans lequel on voit plusieurs cellules spéciales renfermant chacune une concrétion cristalline d'oxalate de chaux; les autres cellules renferment des granules d'amidon et des substances azotées.

c, c fibres ligneuses terminées en fuseau, peu adhérentes entre elles, ou même complétement isolées (1).

d, d tissu formé de cellules allongées, dont un assez grand nombre renferment chacune un cristal prismatique diaphane d'oxalate de chaux. Les autres cellules du même tissu contiennent des granules d'amidon.

La moitié à gauche de la figure, dans toute sa hauteur, montre l'action de l'iode :

1° Jaunissant les six rangées de cellules épidermiques, la couche interne de toutes les cellules des tissus cellulaires et à cellules longues là où se

(1) Ces fibres se séparent en effet, notamment pendant le broyage du quinquina jaune; réunies, elles offrent une masse brillante comme nacrée; agitées, elles se disséminent dans l'air, et lorsquelles retombent sur les ouvriers qui font ce travail, elles s'introduisent par leurs pointes dans les pores de la peau et occasionnent de fortes démangeaisons. Le tissu celluleux interposé entre ces fibres contient des granules amylacés.

trouvent des substances organiques azotées, enfin les fibres ligneuses, *cc ;*

2° Bleuissant les granules amylacés contenus dans les deux tissus *b* et *d*. La deuxième moitié, à droite, indique l'aspect des mêmes parties au moment où l'action de l'acide sulfurique s'opère en présence de l'iode : les parties jaunies conservent la nuance acquise, qui seulement devient plus orangée; les tissus cellulaires, et cellulaires à cellules allongées, montrent les parois gonflées de leurs cellules se désagrégeant et virant au bleu indigo qui caractérise la cellulose pure, ou très-faiblement injectée. Les cristaux d'oxalate de chaux, non encore décomposés, restent, avec leurs formes, blancs et diaphanes.

Fig. 2. *Fibres ligneuses épaisses des couches corticales du quinquina jaune, la plupart peu ou pas adhérentes entre elles, faciles à séparer du tissu celluleux qui les environne, par l'action du broyage.*

Fig. 3. *Les mêmes fibres et tissus, coupés perpendiculairement à l'axe des fibres et vus sous un grossissement triple, montrant les canalicules qui partent de la cavité autour de l'axe des fibres et rayonnent vers les tissus celluleux; les mêmes fibres et tissus, coupés dans l'axe des fibres, deux fois plus grossis et coloriés par les réactions combinées de l'iode et de l'acide sulfurique, montrant :* 1° *les épaisses parois des fibres traversées de canalicules et fortement jaunies;* 2° *les cellules petites et grandes interposées, bleuies par l'action des mêmes réactifs.*

Fig. 5 *et* 6. *Montrant les progrès des mêmes réactifs qui gonflent et désagrégent par degrés les couches incrustantes (superposées de la périphérie au centre) et finissent par les mettre en dissolution ainsi que le tissu cellulaire bleui.*

Fig. 7. *Coupe longitudinale des fibres corticales du quinquina rouge, Cinchona oblongifolia : l'action de l'iode a jauni les épaisses parois des fibres ligneuses et bleui les granules d'amidon, très-nombreux dans toutes les cellules du tissu qui entoure les fibres.*

Les fibres également perforées d'un grand nombre de canalicules diri-

gés de l'axe vers la superficie, sont plus adhérentes entre elles et plus fortement retenues par les tissus ambiants, en sorte qu'au broyage elles se répandent moins dans l'air et gênent moins les ouvriers. Les grains d'amidon de cette écorce, plus amplifiés, se montrent, les uns isolés globuliformes, les autres soudés, au nombre de deux ou de trois, à faces planes ou polyédriques dans les points en contact.

Fig. 8. *Tissu de la masse charnue d'une poire à cidre un mois avant la maturité* (1).

On remarque trois agglomérations de cellules incrustées ou épaissies par des concrétions ligneuses.

Chacune de ces agglomérations est environnée de cellules minces, adhérentes, allongées, rayonnantes vers les autres parties du tissu cellulaire ambiant; toutes les cellules minces contiennent en grand nombre des granules d'amidon, plus abondants encore dans les bouts des cellules avoisinant les agglomérations ligneuses.

Par le contact de l'iode, ces granules d'amidon bleuissent, tandis que les concrétions ligneuses deviennent jaunes, et que le fond des cellules prend une teinte citrine claire.

L'action de la soude caustique et des lavages à l'eau épurent les cellules minces, qui alors, mises en contact avec l'iode, puis l'acide sulfurique, développent la nuance bleu indigo qui caractérise la cellulose; dans ces circonstances, la matière incrustante des concrétions n'a pas été dissoute en assez grande proportion pour laisser libre la cellulose injectée, aussi les agglomérations restent-elles teintes en jaune, qui même vire à l'orangé avant leur dissolution.

Fig. 9. *Les mêmes concrétions ligneuses, quatre fois plus amplifiées, montrant les nombreux canalicules dont leurs épaisses parois sont traversées, et les couches concentriques de leur développement.*

(1) Pour la coupe de l'épiderme de cette poire, voyez la figure 1 de la planche suivante XVI, et page 565.

Fig. 10. *Coupe perpendiculaire au péricarpe charnu d'une noix de jauge avant sa maturité (fruit du Juglans regia).*

a, *a* cuticule.

b, *b* épiderme.

c, *c* tissu cellulaire renfermant des granules verts ; un assez grand nombre de cellules spéciales, exemptes de ces granules, contiennent des cristaux d'oxalate calcaire hérissés de pointes.

d, *d* cellules irrégulières épaissies par des incrustations ligneuses, formant des couches concentriques ; toute l'épaisseur de ces parois est traversée par des canalicules partant de la cavité centrale et irradiés vers les canalicules des cellules ligneuses voisines.

e, *e* tissu cellulaire contenant des granules d'amidon.

Fig. 11. *Tissu plus profondément situé de la même coupe du péricarpe charnu (dit brou de noix).*

f, *f* tissu cellulaire rempli de granules d'amidon.

g, *g* tissu cellulaire sous-jacent à cellules plus épaisses, renfermant des sécrétions huileuses globuliformes.

Fig. 12. *Partie dure (noyau) d'une noix dont l'amande n'a encore qu'une consistance gélatiniforme.*

a, *a* cellules irrégulières qui, les premières, ont commencé à s'incruster : on remarque dans ce tissu l'incrustation graduellement moins avancée de *b* en *c*, laissant les cellules de plus en plus minces ; toutes ces cellules sont criblées d'une multitude de sections des canalicules qui ouvrent des communications entre les cavités de ces cellules à tous les degrés de développement.

Fig. 13. *Coupe dans la partie* a *(fig.* 12*), soumise à l'action successive de l'iode et de l'acide sulfurique.*

Les couches concentriques des incrustations en se gonflant montrent

es zones d'accroissement et oblitèrent les canalicules, qui n'apparaissent plus que comme linéaires.

Les zones le plus rapprochées de la cavité centrale, le plus récemment formées, contiennent la cellulose plus pure ou moins injectée, aussi offrent-elles la nuance violette la plus prononcée; cette nuance, progressivement dégradée, et passant au verdâtre dans les zones plus externes, accuse l'ordre de développement et d'injection de ces épaisses parois ; enfin, l'espèce de cuticule qui entoure chaque cellule reste jaune et résistante.

Fig. 14. *Coupe semblable à la précédente, mais attaquée plus lentement par l'acide après l'iode.*

On y remarque les cuticules enveloppant chacune des cellules incrustées, moins déformées que fig. 13, et laissant voir les sections correspondantes aux canalicules qui traversaient les parois épaissies.

Fig. 15. *Épiderme de l'amande de la même noix.*

Fig. 16. *Coupe perpendiculaire à la superficie de l'amande gélatiniforme.*

PLANCHE XVI.

ANATOMIE DES PEPINS DE RAISIN, NOYAUX DE VIBURNUM, PRUNIER, CELTIS; ÉPIDERME DE POIRE.

Fig. 1. *Épiderme de poire, mais avant sa maturité.* (Voy. planche XV et page 563.)

a, *a* cuticule épidermique tranchée en biseau.
b, *b* portion de saillie de la cuticule.
c, *c* cellules épidermiques.

Fig. 2. *Coupe d'un pepin pris dans un raisin vert.*

a, *a* tissu sous l'épiderme.

b, *b* tissu cellulaire contenant des granules verts.

c, *c* cellules allongées perforées de canalicules qui doivent s'incruster graduellement avec le développement et la maturation du fruit.

d, *d* tissu cellulaire.

Fig. 3. *Coupe des cellules allongées, par un plan perpendiculaire à leur axe, d'un pepin dans un fruit à moitié mûr.*

On voit que les cellules se sont agrandies, et que leurs parois sont considérablement épaissies par les incrustations ligneuses; ces parois sont perforées d'une multitude de canalicules.

Fig. 4. *Coupe parallèlement à l'axe des cellules allongées d'un pepin extrait d'un raisin mûr.*

a, *a* tissu cellulaire contenant des granules verts.

b, *b* cellules allongées, dont les parois se sont tellement épaissies, que la cavité cylindroïde *ccc* a un diamètre moins large que la moitié de l'épaisseur des parois.

Les parois sont criblées de canalicules, la plupart à deux ou plusieurs embranchements.

Ces canalicules établissent une communication entre les cavités des cellules contiguës.

Fig. 5. *Coupe du même pepin par un plan perpendiculaire à l'axe des cellules allongées.*

Ces cellules, fortement incrustées de matière ligneuse et pressées les unes contre les autres, sont devenues polyédriques ou prismatiques; leur cavité autour de l'axe offre une section circulaire; enfin, les canalicules d'une cellule correspondent avec ceux d'une cellule contiguë par leurs divers embranchements.

Fig. 6. *Noyau de Viburnum coupé par un plan dans l'axe de la graine.*

Les cellules à parois fortement épaissies sont perforées de canalicules très-nombreux.

Fig. 7. *Le même noyau coupé suivant un plan parallèle à la face et au grand axe.*

Les cellules dans cette projection présentent une conformation remarquable par ses sinuosités.

Fig. 8. *La même tranche, attaquée par l'acide sulfurique concentré en présence de l'iode.*

a, *a*, *a* parties internes d'une cellule le plus récemment formées se colorant en bleu indigo.

b, *b*, *b* parties de la même cellule, formées plus anciennement, par conséquent plus injectées d'incrustations ligneuses et se colorant en vert.

b, *b*, *b* *b'* *b'* *b'* sorte de cordon sinueux qui reste coloré en jaune orangé, et qui résulte de la réunion des deux cuticules injectées de matière azotée enveloppant les cellules contiguës.

Fig. 9. *Coupe indiquant quatre cellules du noyau du fruit du Prunier.*

Les parois épaisses des cellules sont fortement incrustées de matière ligneuse très-dure, offrant une foule de points granuleux, et perforées d'une multitude de canalicules dirigés de chaque cavité d'une cellule vers les canalicules des cellules voisines.

Fig. 10. *Vue de l'une des quatre cellules ci-dessus après la réaction de l'iode et de l'acide sulfurique concentré.*

Toutes les parties se sont gonflées, et la masse s'est disloquée en une

multitude de petites cellules symétriquement disposées en rayons de la cavité centrale à la périphérie.

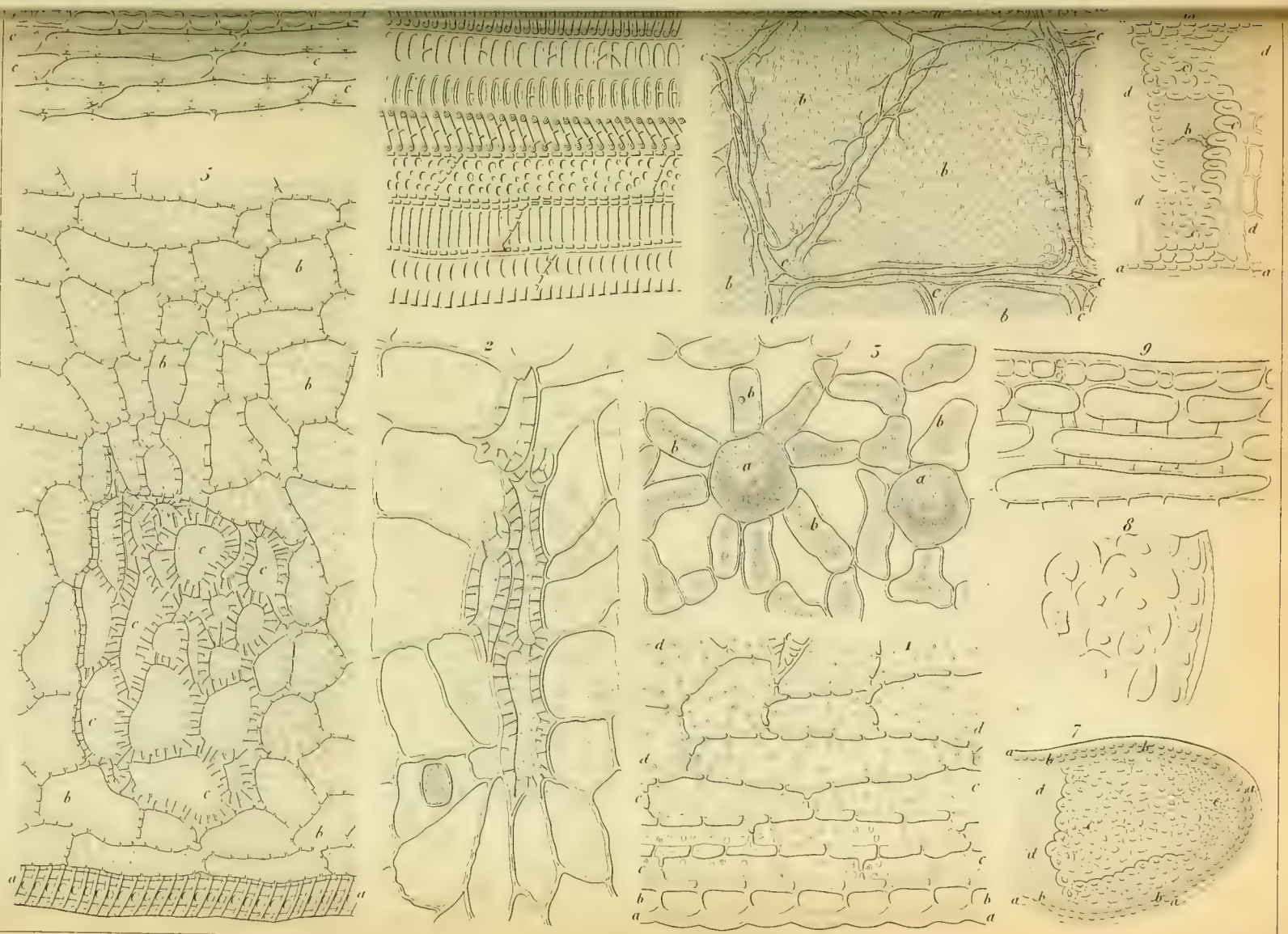
Fig. 11. *Coupe d'un noyau de Celtis.*

On y remarque dix-neuf cellules contiguës, au fond desquelles apparaissent quelques petites cavités peu profondes : les parois des cellules sont pleines, blanchâtres et d'une extrême dureté.

Ces caractères indiquaient la présence d'une substance minérale : en effet, l'acide chlorhydrique l'a dissoute avec une vive effervescence.

Fig. 12. *Coupe plus grossie après l'action de l'acide, qui, ayant dissous et décomposé tout le carbonate calcaire, laisse les parois cellulaires perforées d'une foule de vacuoles.*

La substance solide jaunit à peine par l'iode ; en ajoutant de l'acide sulfurique concentré, toute la masse bleuit, sauf un très-léger réseau de matière azotée qui apparaît au fond de chaque cellule.

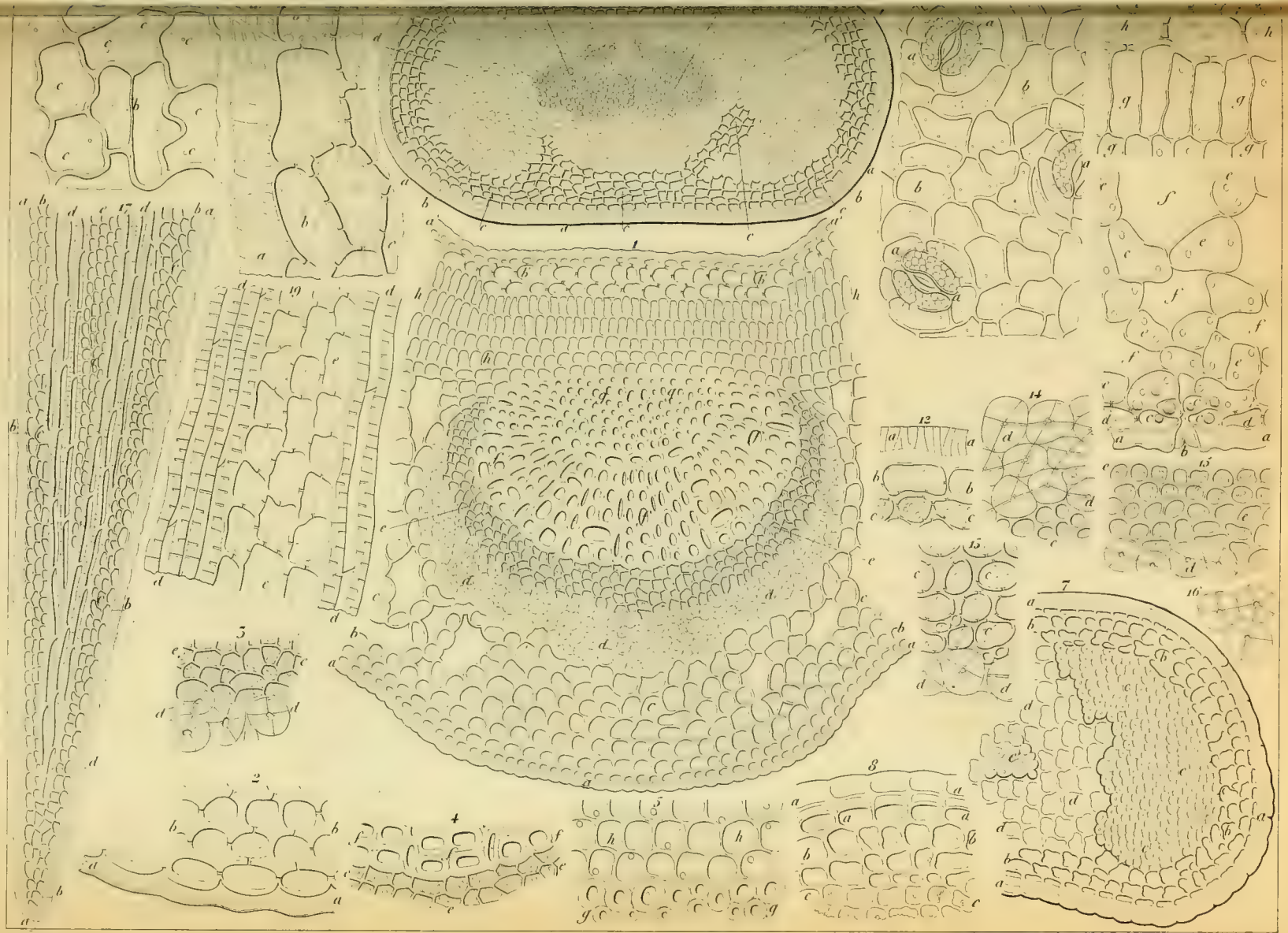


de Nirbel et Payen dirt

L. Petit, sc

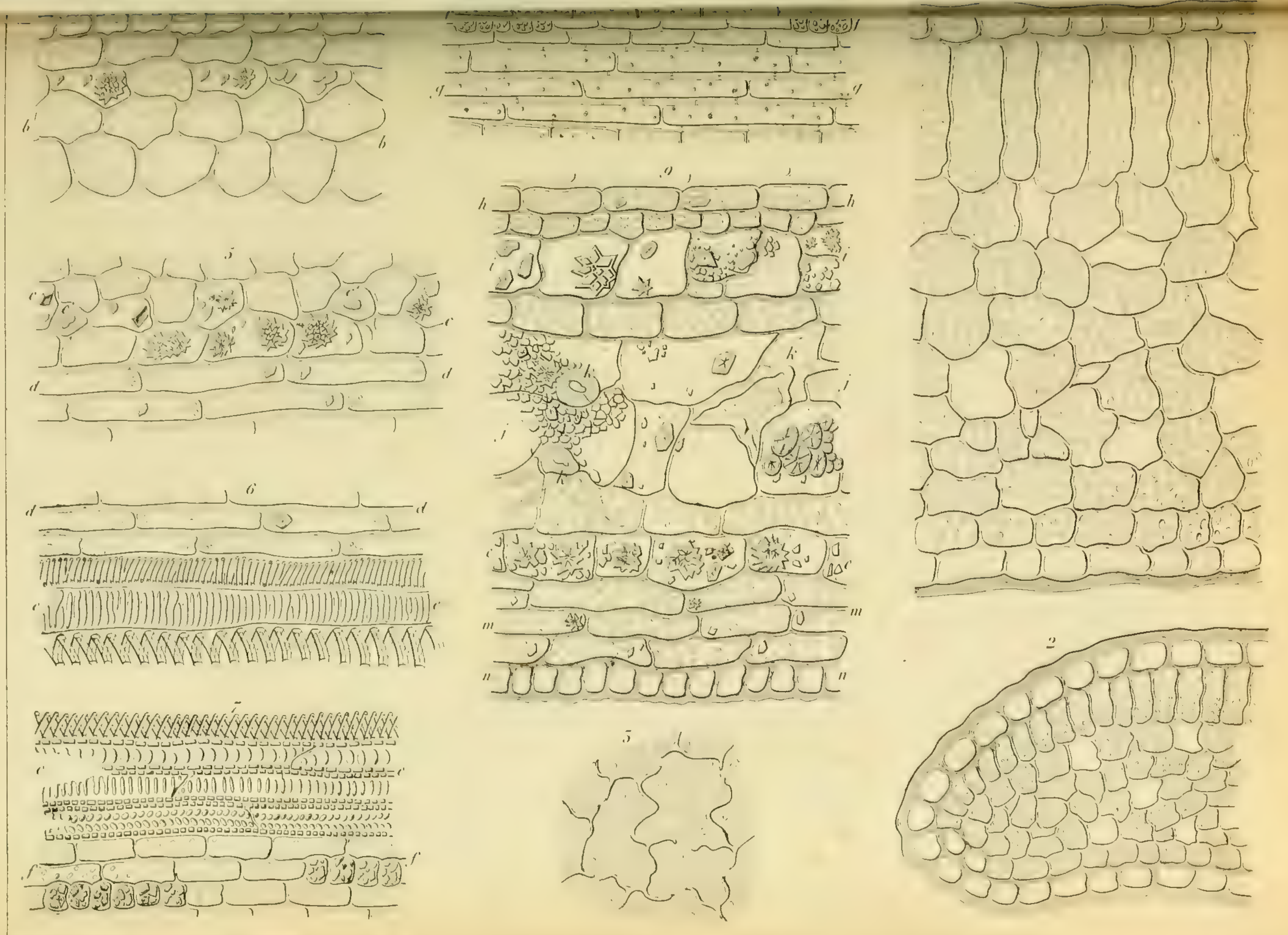
Lith. de Kaeppelin

MAGNOLIA GRANDIFLORA.



de Mirbel et Payen, dirt. — L. Petit, sc. — Lith. de Kaeppelin.

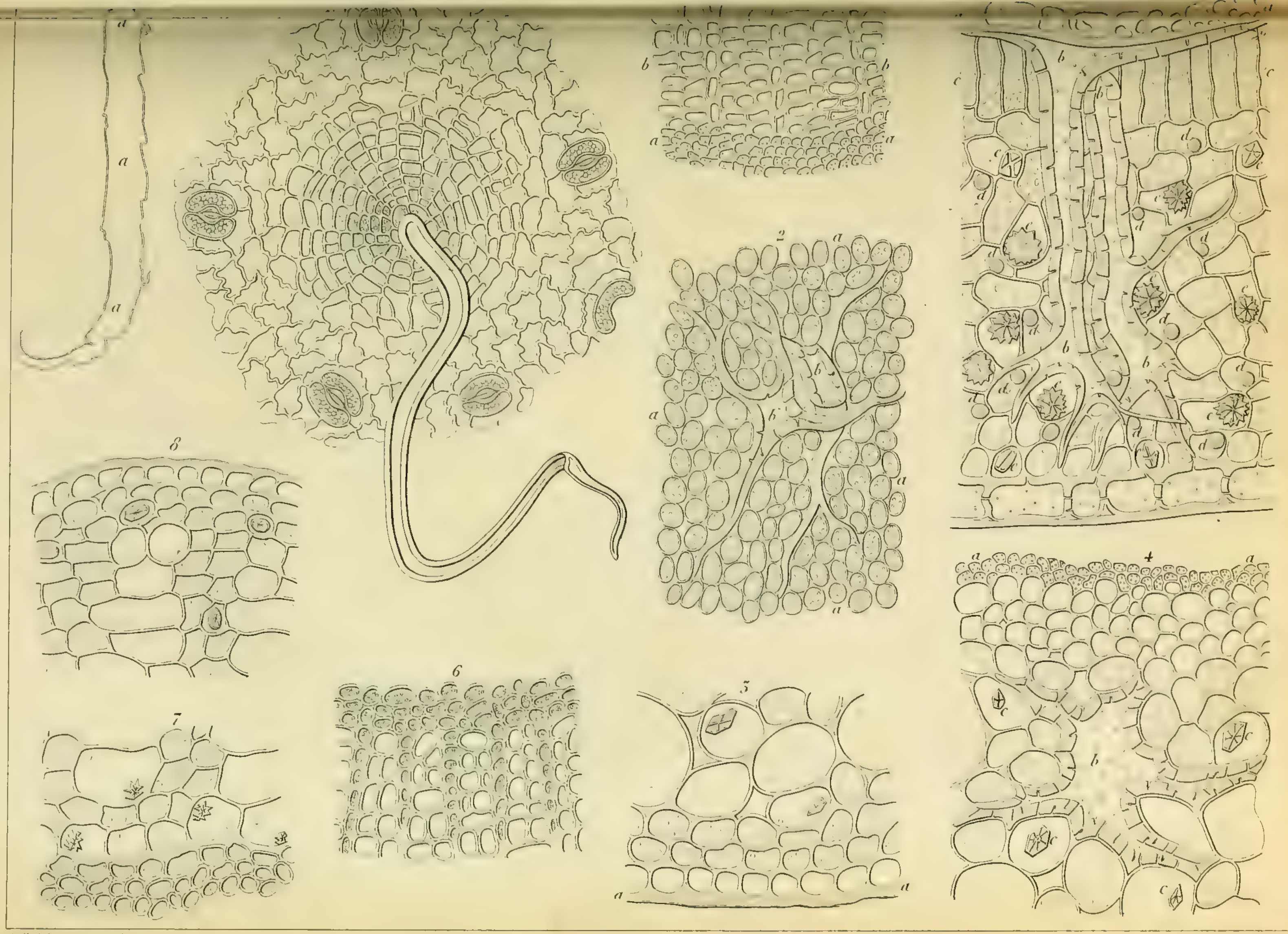
HOUX (Ilex aquifolium).



de Mirbel et Payen dir.t — L. Petit sc. — Lith. de Kaeppelin

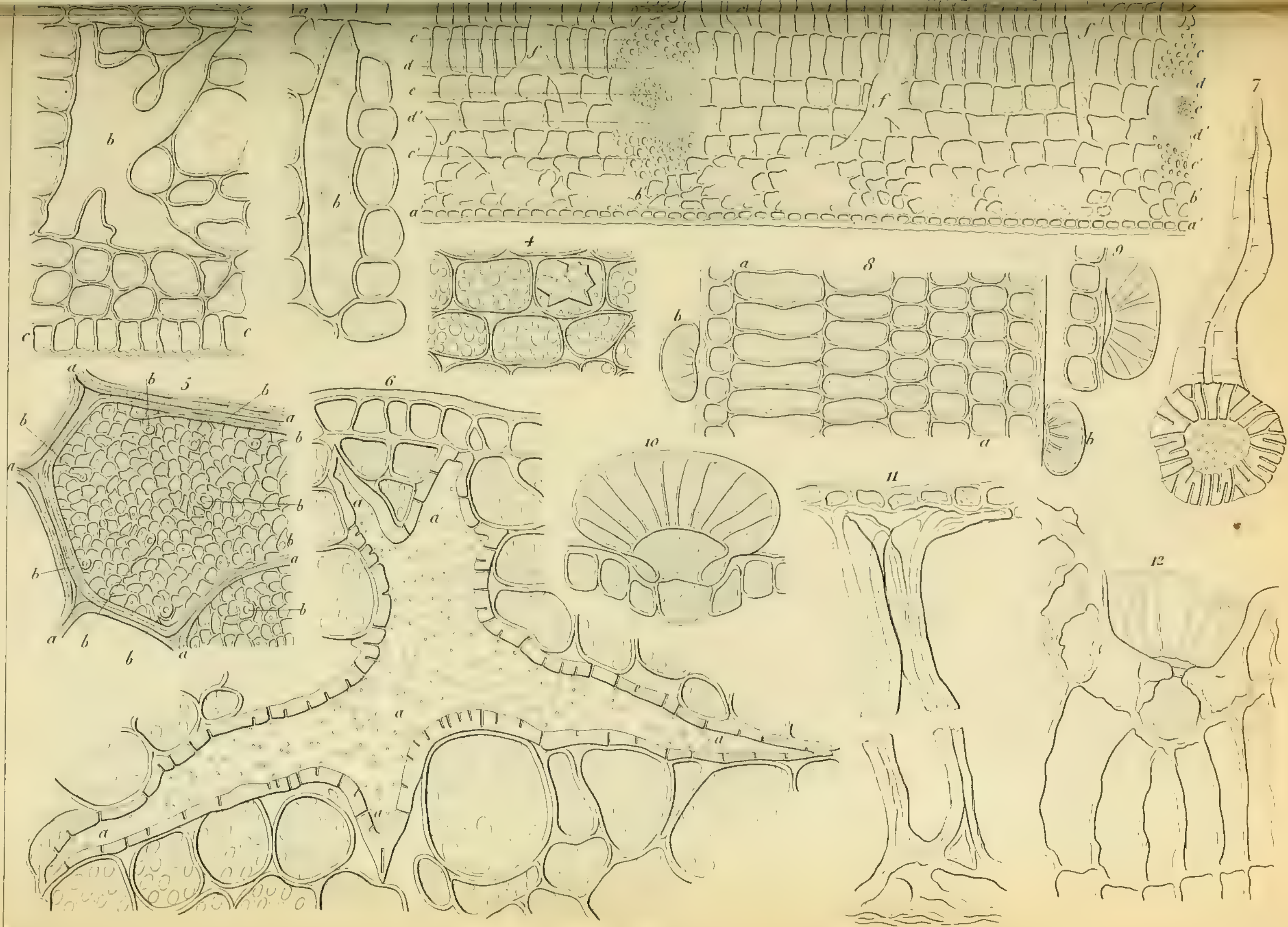
THEA VIRIDIS.

STORY



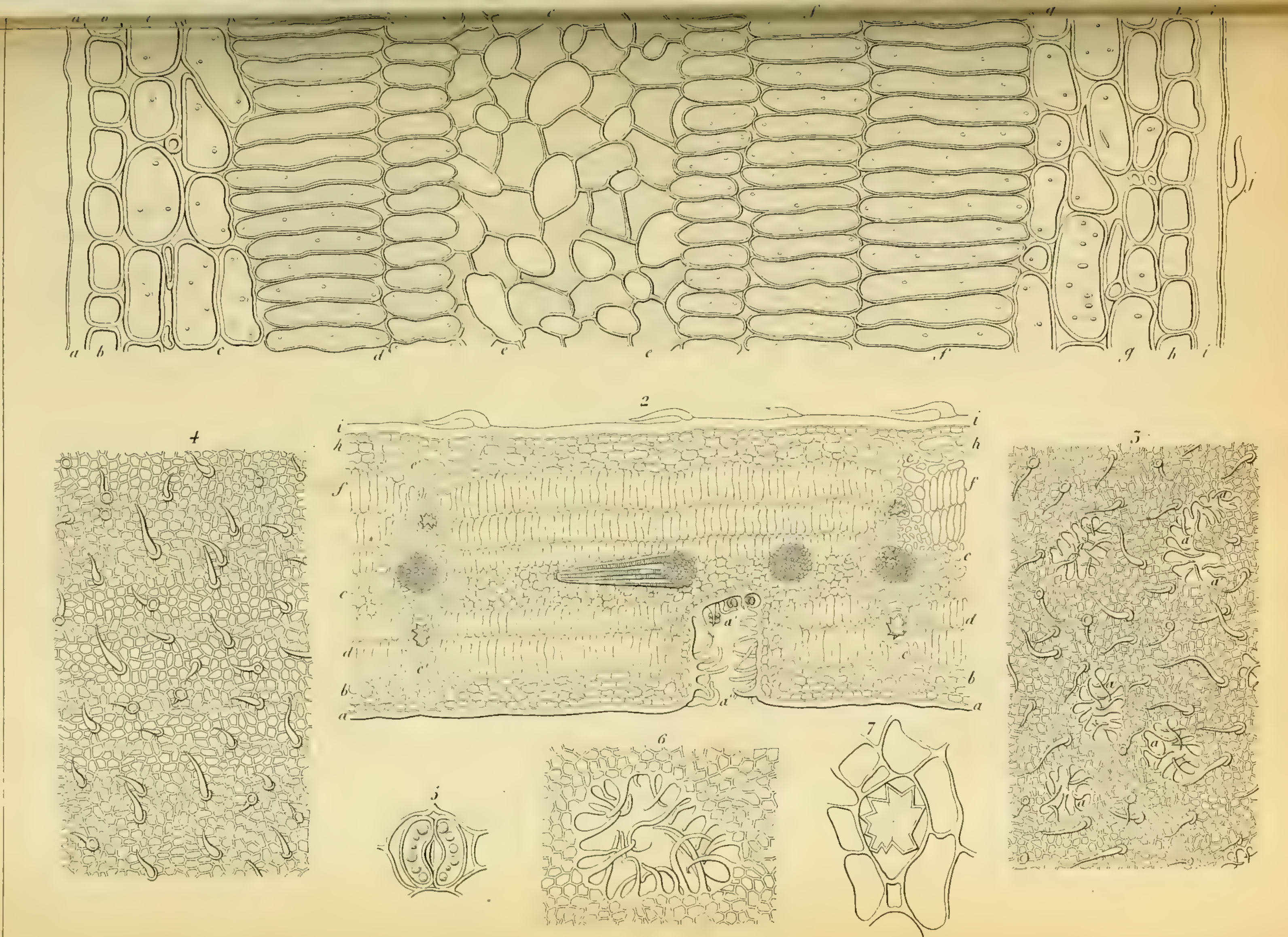
de Michel et Payen, del[t] — L. Petit, sc — Lith. de Kaeppelin

THEA VIRIDIS.



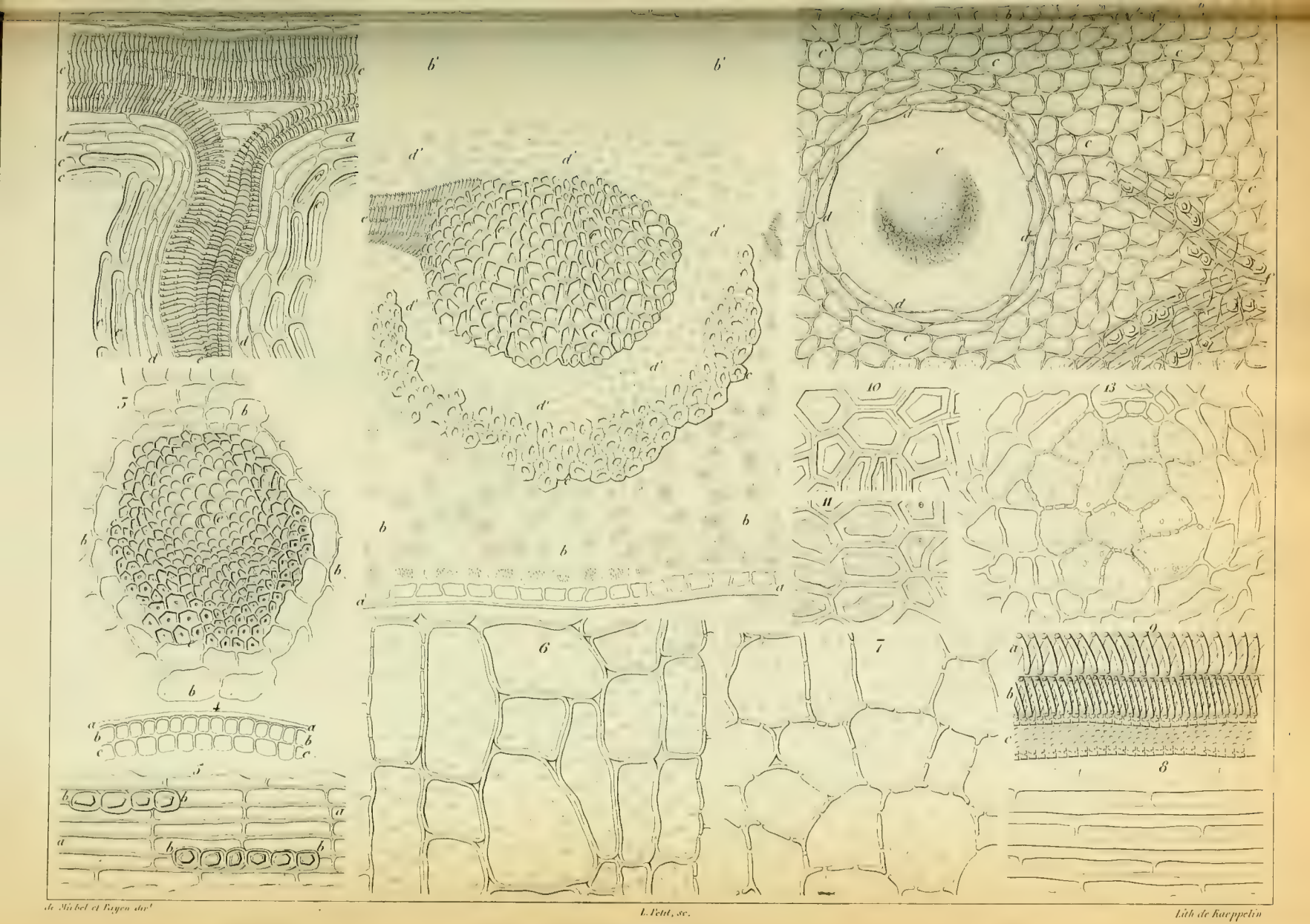
de Mirbel et Payen, dir.t L. Petit, sc. Lith. de Kaeppelin

CAMELIA, OLEA-FRAGRANS.



de Mirbel et Payen del. L. Petit sc. Lith. de Kaeppelin

NERIUM OLEANDER.

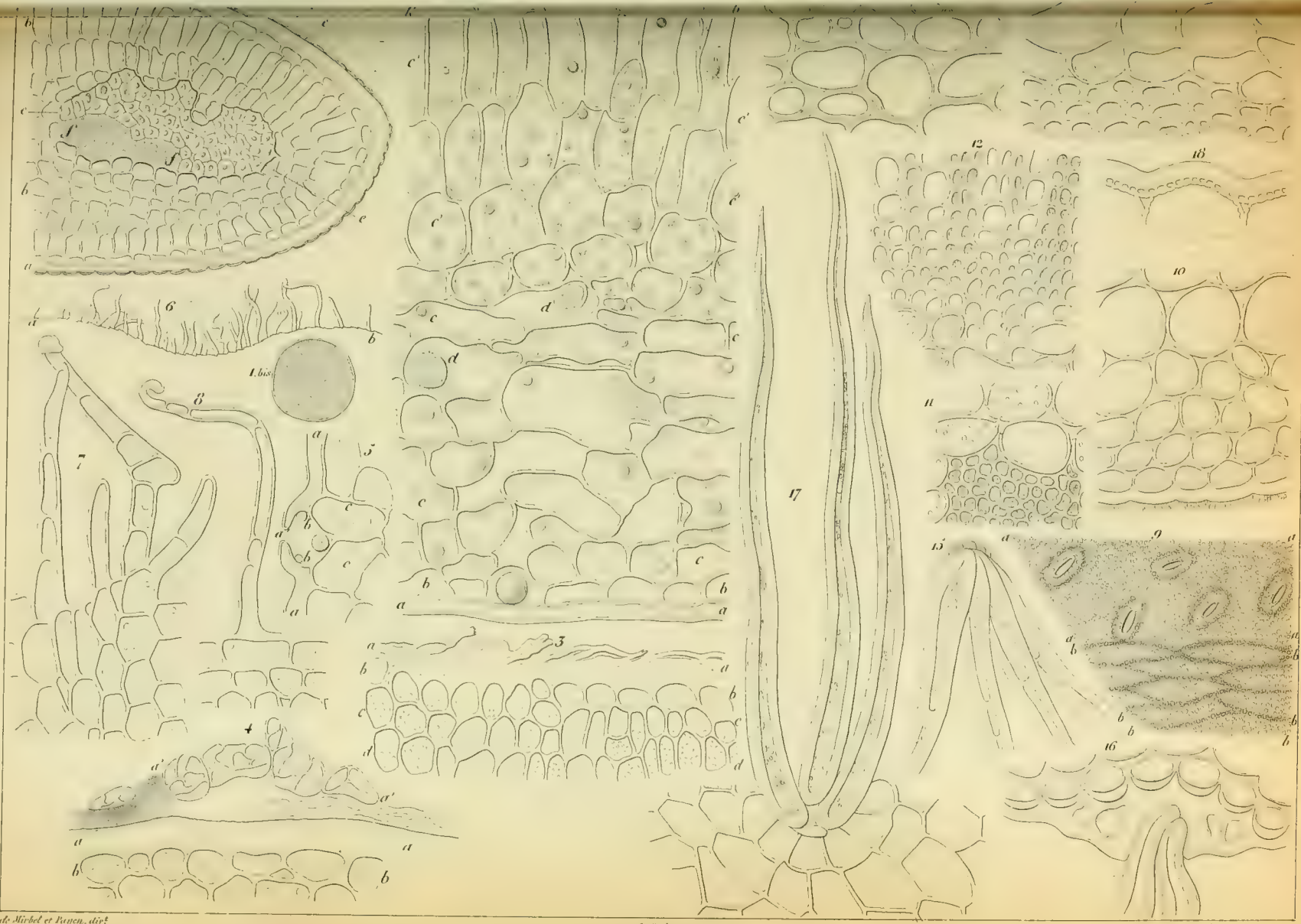


de Michel et Eugen dir.t

L.Petit, sc.

Lith de Kaeppelin

ORANGER.

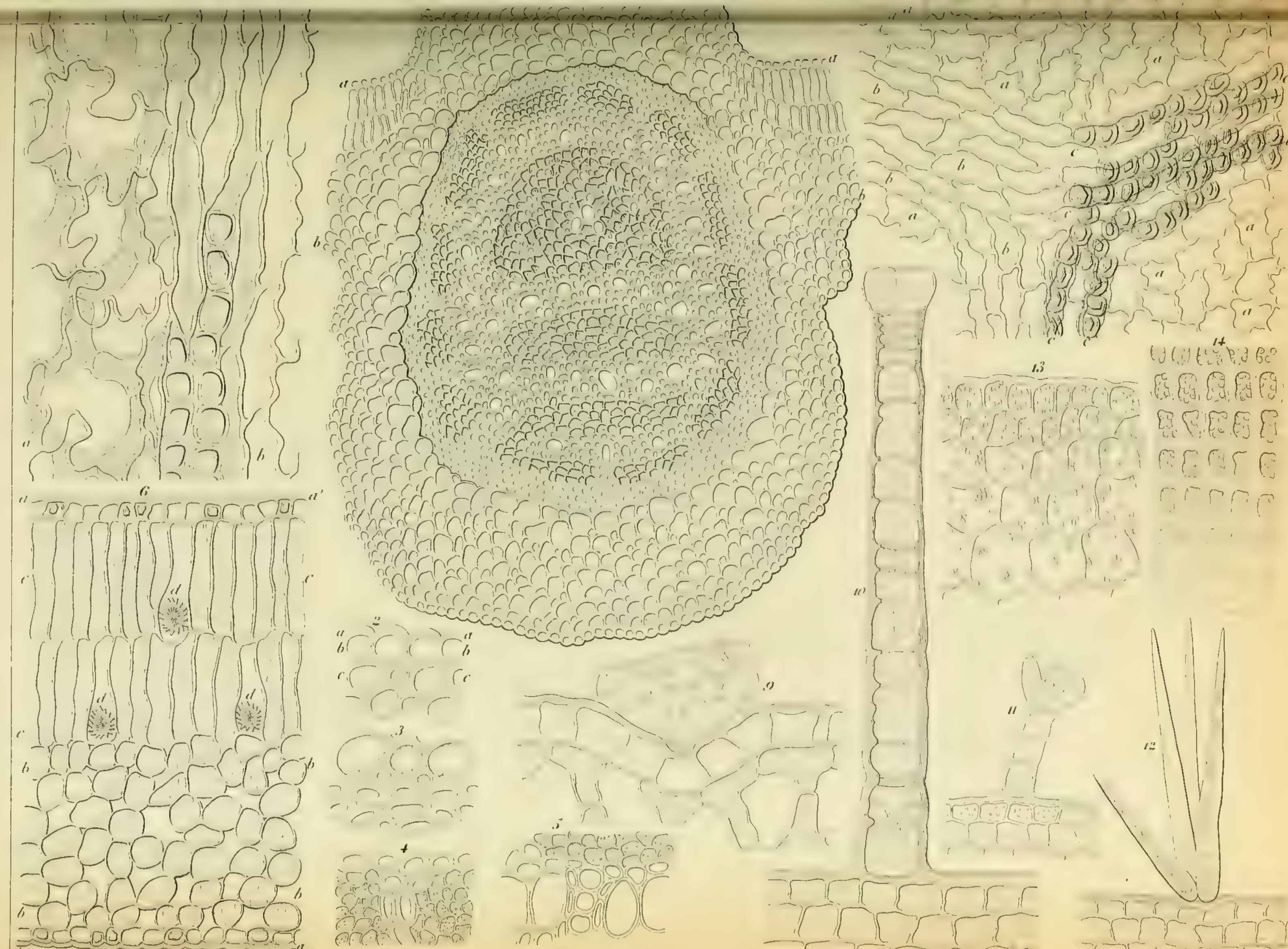


de Mirbel et Poyen, dirt.

L. Petit, sc.

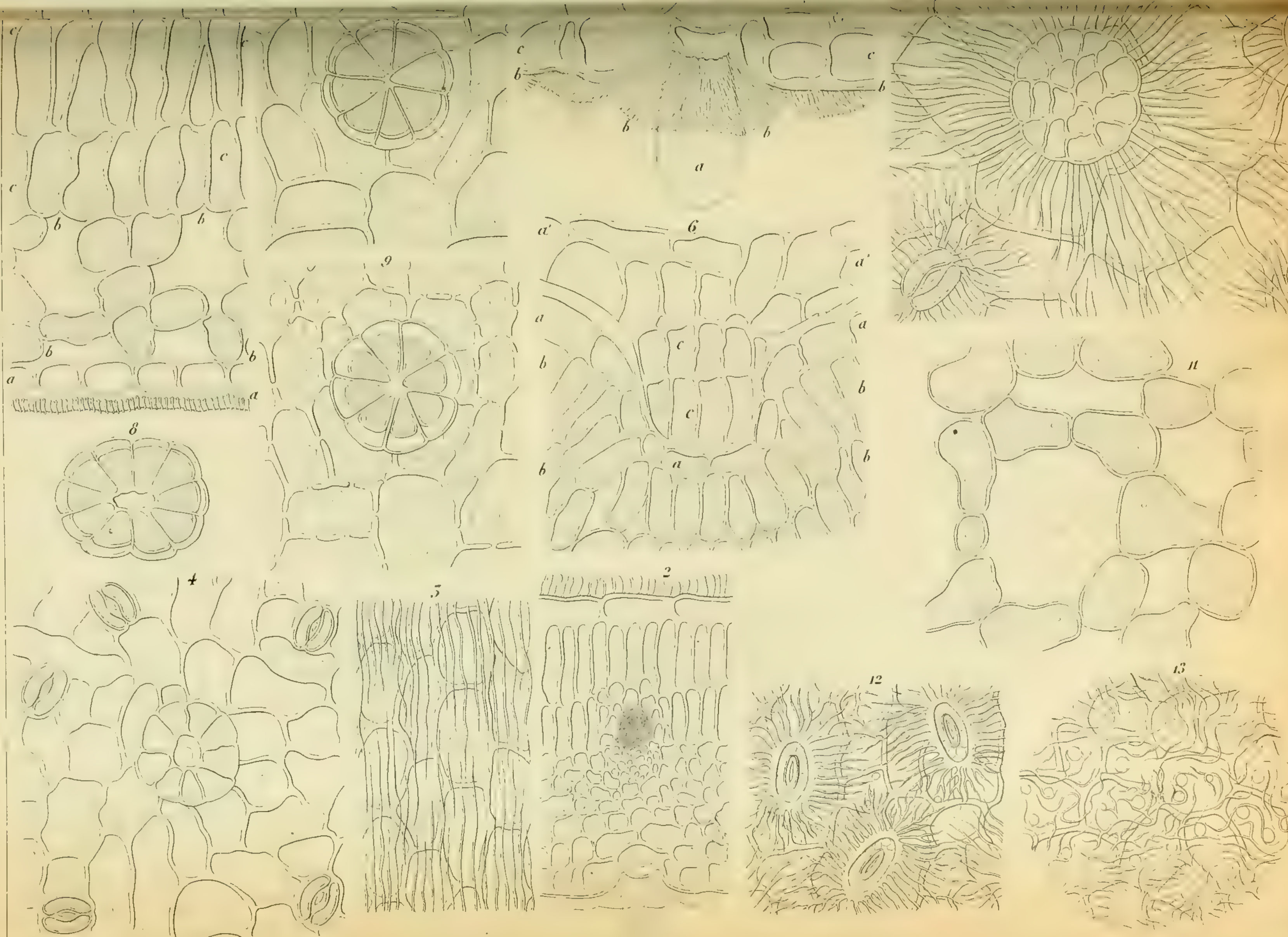
Lith. de Kaeppelin

BÛIS, CHÊNE.



de Mirbel et Payen, dir.! L. Petit, sc. Lith. de Kaeppelin

HÊTRE, NOYER, FUCUS.

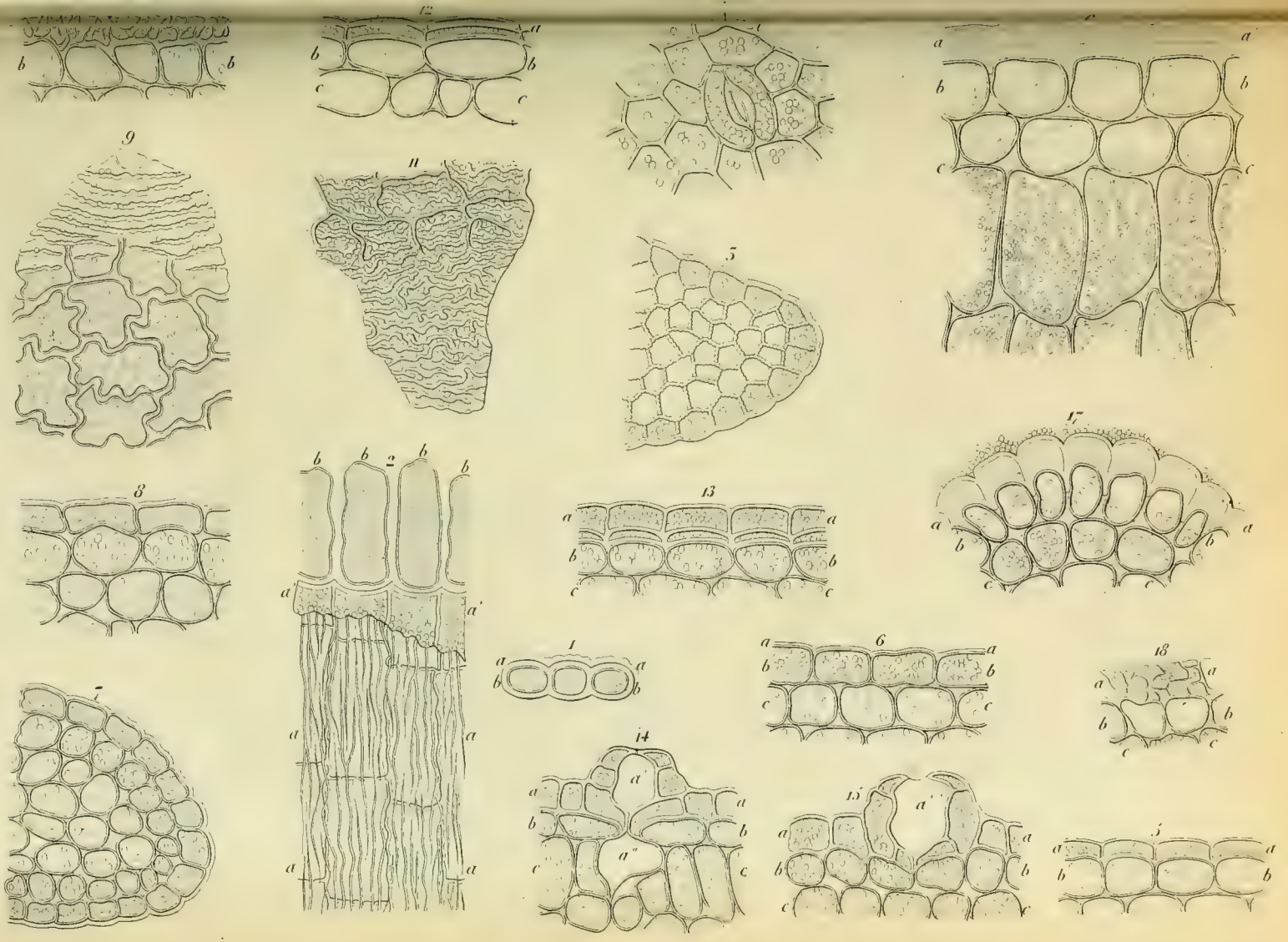


de Mirbel et Payen del.

L. Petit, sc.

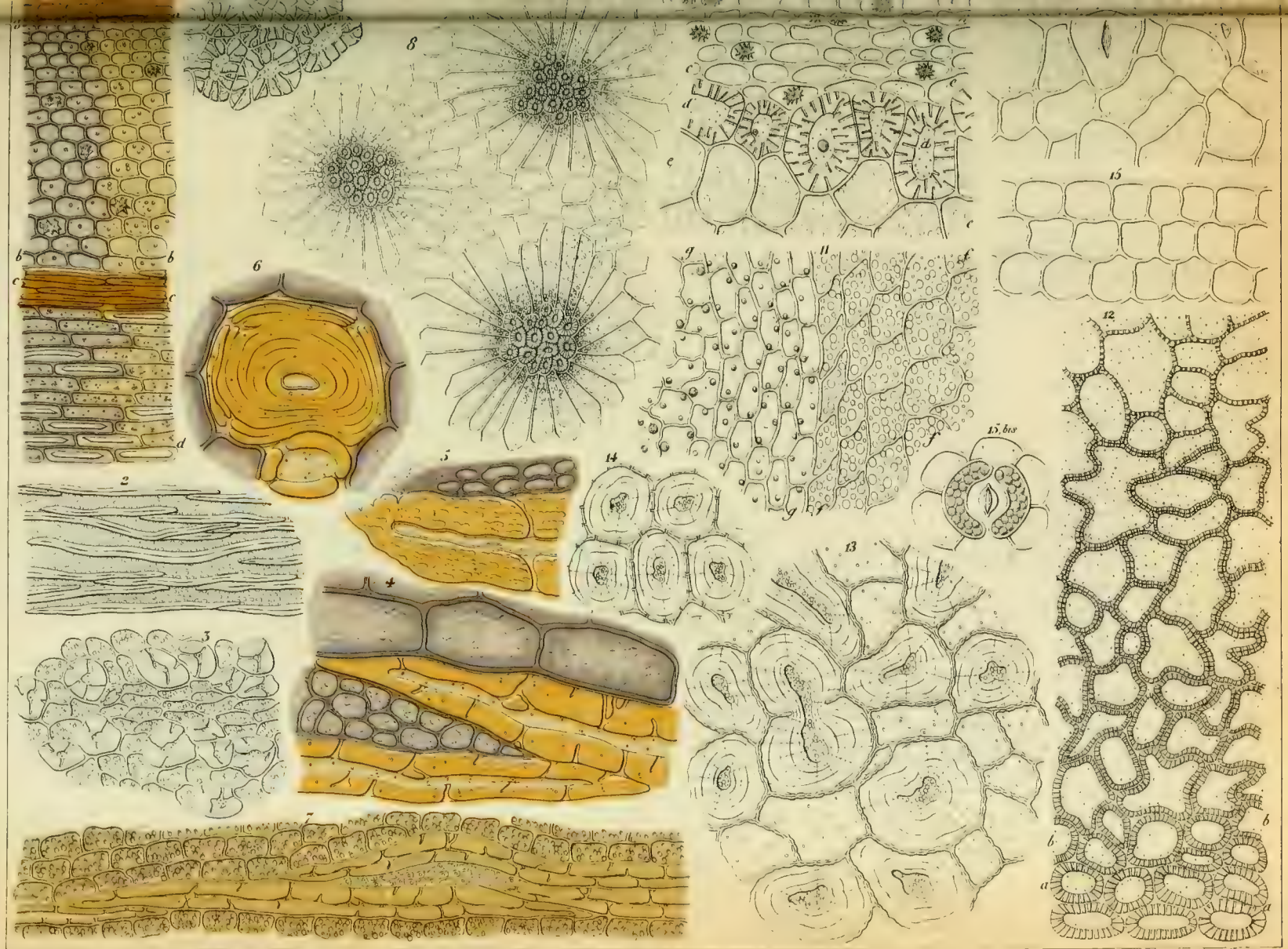
Lith. de Kaeppelin

LILAS. Syringa Vulgaris



de Nirbel et Payen, dirt. L. Petit, sc Lith. de Kaeppelin

EPIDERMES, CUTICULE, STOMATES.

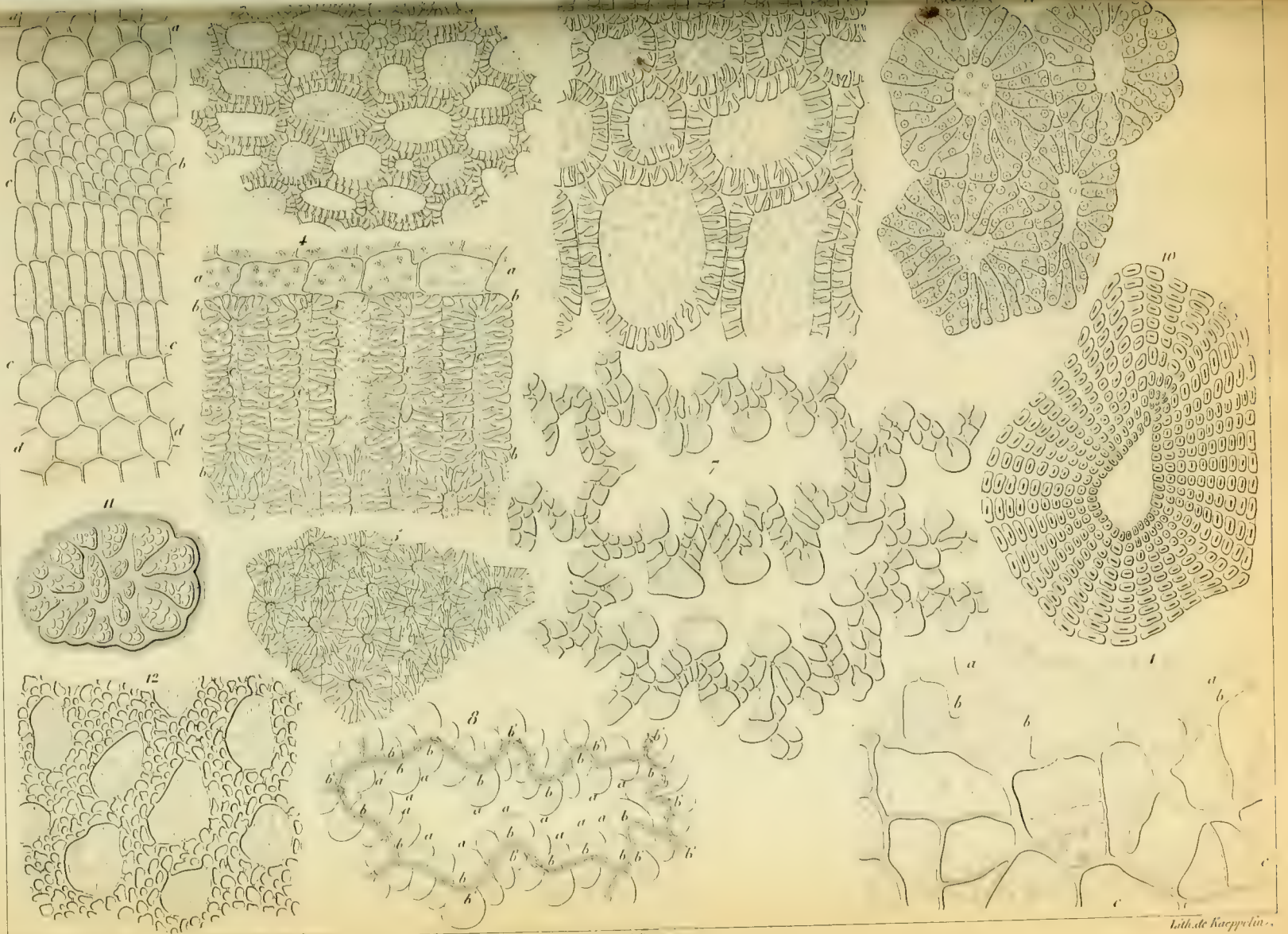


Ad. Michel et Vayen, dir.

L. Petit, sc.

Lith. de Kaeppelin

CINCHONA POIRES NOIX



PEPIN DE RAISIN, VIBURNUM, PRUNIER, CELTIS.

MÉMOIRE

SUR

LA STRUCTURE ET LA COMPOSITION

CHIMIQUE

DE LA CANNE A SUCRE,

PAR M. PAYEN.

Lu dans la séance du 21 mai 1849.

En me livrant à quelques recherches expérimentales sur la Canne à sucre, je me suis proposé de déterminer, à l'aide de l'anatomie sous le microscope et de l'analyse chimique :

1° Les formes et la composition des tissus de cette plante;

2° Le siége de la sécrétion du sucre;

3° Les changements que l'âge apporte dans les formes et la nature des différentes parties du tissu;

4° Les variations qu'éprouvent en même temps les principes immédiats.

Sous ce dernier rapport, je me suis surtout préoccupé des parties de la tige que l'industrie saccharine exploite.

La solution de ces questions, à laquelle je suis parvenu, offrira peut-être quelque intérêt encore, après les travaux importants dont la Canne à sucre a été l'objet de la part de Proust, Derosne, et de MM. Plagne, Avequin, Peligot, Dupuy, Hervy et Casaçœca.

Si l'on examine, de la superficie au centre, une tranche, coupée perpendiculairement à l'axe de la tige, d'une Canne à sucre à l'époque de sa maturité, lorsqu'elle est devenue jaunâtre et que les feuilles sont tombées, on remarque :

1° Une couche superficielle adhérente à la cuticule épidermique, au-dessus de *j* (*figure* 5) (1), *Planche I*, formée d'une sorte de cire (cérosie) observée par MM. Plagne et Avequin, étudiée par M. Dumas (2);

2° La cuticule, avec des saillies anguleuses correspondantes aux *joints* entre les cellules, même *figure*;

3° (*figures* 4 et 5). Les épaisses parois *jj* des cellules épidermiques *ii*. Des lignes de démarcation existent entre les parois externes de ces cellules; leurs cavités sont en communication libre, ou au travers d'une mince membrane, par de nombreux canalicules ménagés dans l'épaisseur des parois;

4° Le tissu cellulaire à parois plus minces, sous l'épiderme *ll*, *mm*, *figure* 5;

5° Un tissu cellulaire à parois épaisses, traversées par des canalicules;

6° Deux rangées circulaires concentriques de faisceaux

(1) Cette figure et la *figure* 4 sont tracées sur un grossissement de 900 diamètres, double des dimensions des *figures* 1, 2 et 3.

(2) D'après M. Avequin, chaque tige développée de Canne à sucre contiendrait en moyenne 2 grammes de cérosie.

ligneux entourant chacun un espace rempli par les divers vaisseaux décrits plus loin.

Ces faisceaux sont presque contigus les uns aux autres dans la première rangée, et un peu moins rapprochés dans la deuxième.

On remarque des faisceaux semblables, mais graduellement moins abondants en fibres ligneuses, et de plus en plus espacés entre eux, jusqu'au tour de l'axe de la tige.

Aucun de ces tissus compris entre l'épiderme et la deuxième rangée des faisceaux ligneux ne renferme de sucre, tandis qu'ils contiennent, en proportions plus ou moins fortes, d'autres substances indiquées à la fin de ce Mémoire.

J'ai déterminé le siége du sucre cristallisable par l'observation, sous le microscope, de tranches minces des différents tissus de la Canne sèche. J'avais eu le soin d'éliminer préalablement les particules détachées, en agitant les tranches dans l'alcool anhydre : ce liquide ne dissolvant pas le sucre cristallisé, peut faciliter l'observation en l'introduisant entre le porte-objet et la lamelle qui recouvre les tranches. A l'aide de ces dispositions, on peut discerner les cristaux de sucre plus ou moins volumineux, apparaissant semblables à ceux du *sucre candi*, dans toutes les cellules cylindroïdes à parois minces qui environnent les nombreux faisceaux des fibres ligneuses et vaisseaux, depuis l'axe jusqu'à la deuxième rangée des filets les plus ligneux (1).

(1) Les échantillons qui ont servi à cette expérience avaient été préparés en 1843, aux colonies, par M. Derosne, qui avait fait dessécher rapidement, au soleil, des Cannes préalablement découpées en rouelles de 1 centimètre d'épaisseur.

Les *figures* 1 et 2, *Planche I*, représentent un de ces faisceaux et les cellules saccharifères qui l'entourent :

a, Conduit contenant des rondelles épaisses rapprochées à des intervalles d'environ trois ou quatre fois leur épaisseur.

bb, Deux larges vaisseaux ponctués, offrant autant de doubles séries longitudinales d'ouvertures elliptiques qu'il se trouve de petits tubes, au nombre de 10 à 14, adhèrent aux parois de chacun de ces deux grands vaisseaux.

cc, Petits vaisseaux ponctués, de plusieurs diamètres, et parmi lesquels deux ou trois, qui sont interposés, offrent les caractères de trachées non déroulables, ou contenant des filets contournés en hélices imcomplètes et à bifurcations irrégulières.

La *figure* 3 montre, par un grossissement un peu plus fort, les détails des deux sortes de vaisseaux *c*, *c'*.

dd, Fibres ligneuses, à parois épaisses et perforées de canalicules établissant des communications entre leurs longues cavités cylindroïdes.

ee, *e'e'*, Premières cellules saccharifères; les plus petites aboutissent aux faisceaux ligneux et vasculaires. Dans quelques-unes de ces petites cellules saccharifères *e'e'*, on a indiqué la disposition des granules d'amidon tels qu'on les observe dans cette partie du tissu des Cannes très-jeunes, ou même parvenues au tiers environ de leur développement.

ff, Cellules à sucre, graduellement plus grandes à mesure qu'elles s'éloignent du faisceau vasculaire qu'elles entourent.

On remarque que toutes ces cellules communiquent entre elles, dans leurs surfaces en contact, par un grand nombre de petites ouvertures traversant la double épaisseur de leurs parois latérales, ouvertures qui manquent aux fonds repré-

sentant les deux bases du cylindre ou prisme creux que forme chaque cellule.

Dans les Cannes mûres, tous les tissus que nous venons d'indiquer, soumis à un lavage par l'eau pure et mis en contact avec l'iode, jaunissent; l'acide sulfurique maintient et rend plus intense cette coloration, tout en désagrégeant la cellulose. La coloration de la cuticule *k*, *figure* 5, devient plus foncée.

Mais si l'on enlève, à l'aide d'une solution de soude caustique à un dixième, une partie de la matière azotée qui imprègne les petits vaisseaux à minces parois *c* et *c'*, ainsi qu'une portion des substances azotées dont sont injectées les cellules sacharifères, on remarque alors, sous l'influence de la double réaction (de l'iode et de l'acide), plusieurs phénomènes curieux, indiqués sur la *Planche II* : les petits vaisseaux ponctués *c* et *c'*, en commençant à se désagréger, offrent une coloration bleu-indigo légère.

La partie interne des cellules à sucre, *ef*, la dernière formée, se gonflant très-vite, passe à l'état des particules de la cellulose désagrégées au point où elles se trouvent dans l'amidon hydraté. On comprend donc que ces parties se teignent dès lors en bleu-indigo intense. Les corpuscules azotés qui adhéraient à cette couche interne s'en séparent, et manifestent leur présence par la coloration orangée spéciale du linéament granuleux léger qu'ils forment parallèlement aux contours des parois internes tuméfiées.

Les membranes externes plus anciennement formées, agrégées plus fortement et plus injectées, résistent à la désagrégation spéciale; elles se gonflent cependant, forment des plis sinueux, et se séparent en divers points des cellules adhé-

rentes voisines, tout en conservant la coloration jaune-orangé acquise sous l'influence de la double réaction chimique.

On remarque que les rondelles de la cavité tubulaire *a* se gonflent davantage.

Lorsque, après un lavage à l'eau pure, on fait arriver une solution de potasse ou de soude caustique sur une tranche mince, on remarque toutes les parties du tissu injectées de substance ligneuse se colorer en jaune, tandis que les petits vaisseaux ponctués et la cuticule deviennent plus translucides et incolores. Cette différence dans les effets du réactif ajoute un caractère distinctif de plus entre ces petits vaisseaux et le reste du tissu de la Canne : elle paraît indiquer l'absence de matière ligneuse dans les parties qui, sous l'influence de l'alcali caustique, ne prennent pas une coloration jaune persistante.

La coloration jaune disparaît d'ailleurs partout, si l'on fait succéder à l'action alcaline, d'abord un lavage à l'eau pure, puis le contact de l'acide acétique en excès. Cet acide éclaircit très-notablement toute la *vue microscopique*.

Si l'on expose à l'action de la soude ou de la potasse caustiques de semblables tranches minces, et que l'on rende l'effet plus prononcé à l'aide de la concentration jusqu'à siccité, on observe, après un lavage complet, que les rondelles ont été complétement désagrégées ; il en est de même des petits vaisseaux ponctués *c* et *c'*, dont on ne retrouve plus de traces alors dans l'espace qu'ils occupaient. Toutes les autres parties du tissu, en se désagrégeant en présence de l'iode et de l'acide sulfurique concentré, prennent la coloration bleu-indigo, qui caractérise la cellulose pure.

Dans les Cannes à sucre moins développées, l'épuration

partielle ou complète de la cellulose, de tous les tissus, est beaucoup plus prompte, et n'exige pas des réactifs aussi énergiques. En effet, si l'on traite sous le microscope des tranches très-minces de la tige (entre les nœuds de la partie moyenne) d'une Canne à sucre verte (1), parvenue seulement au tiers de son développement, 1° par l'eau pure; 2° par une solution aqueuse alcoolisée d'iode; 3° par l'acide sulfurique concentré; on remarque que l'épiderme et le tissu cellulaire sous-épidermique résistent, et prennent une coloration orangée intense; les fibres ligneuses, tout en se désagrégeant, et les larges vaisseaux ponctués (au nombre de deux dans chacun des faisceaux vasculaires), prennent et gardent une couleur jaune-orangé; les petits vaisseaux ponctués se montrent colorés en bleu verdâtre, et se désagrègent promptement; enfin, les cellules à sucre passent de la nuance jaunâtre au vert, puis au violet-indigo, en se gonflant, se disloquant et se désagrégeant peu à peu.

J'ai soumis aux mêmes réactifs la partie inférieure blanchâtre (complétement enveloppée par les feuilles engaînantes) d'une tige de Canne très-jeune; cette portion n'ayant encore que 3 centimètres de haut, depuis et compris le nœud jusqu'au nœud suivant, une tranche sous le microscope montrait les fibres destinées à devenir ligneuses, peu épaissies.

Une solution aqueuse d'iode colorait en jaune les tissus, à l'exception des petits vaisseaux ponctués; l'addition d'une goutte d'acide sulfurique fit naître sur l'ensemble de ces

(1) J'ai obtenu, de la complaisance des professeurs et chefs de culture du Muséum d'Histoire naturelle, les échantillons des Cannes à sucre à différentes époques de leur développement.

tissus une des plus jolies images microscopiques : les poils des *nœuds*, externes, jaunis sur leur cuticule externe et leur membrane granuleuse interne, devinrent violets dans toute l'épaisseur de leurs parois gonflées; la cuticule et l'épiderme avaient acquis une teinte orangée foncée, le tissu cellulaire sous-jacent était bleui dans l'épaisseur de toutes les cellules; la même nuance colorait les petits vaisseaux ponctués, formant ainsi un faisceau cylindroïde bleu entouré par les tissus jaunes-orangés, savoir : 1° les larges vaisseaux ponctués et les quatorze à dix-huit tubes adhérant à chacun d'eux ; 2° les tubes à rondelles superposées; 3° les fibres légèrement ligneuses. Au milieu des parois jaunies de ces dernières, on voyait la couche interne de cellulose récemment formée se détachant en un anneau irrégulier gonflé et bleui.

Dans le tissu plus jeune encore, au-dessus de ce nœud, les cellules offraient toutes une sorte de nucléus arrondi ou elliptique à tissu fin azoté, ayant un diamètre égal, à peu près, au dixième du diamètre de la cellule; d'abondants granules de matière azotée adhéraient à toutes les parois internes. On voyait de nombreux grains d'amidon ayant jusqu'à 5 millièmes de millimètre ; les additions successives d'iode et d'acide sulfurique teignirent, en jaune foncé persistant, l'épiderme, les rondelles et tous les corps azotés; tous les tubes, vaisseaux et cellules se gonflèrent, prirent une teinte violette foncée, se séparèrent les uns des autres ; bientôt la dissolution devenant plus complète, les parois bleuies disparurent, laissant voir l'épiderme isolé jaune-brun, et tous les corpuscules azotés jaune-orangé qui adhéraient à l'intérieur des membranes cellulaires détruites.

Les mêmes traitements successifs, appliqués aux tranches

minces d'un bourgeon latéral dont les feuilles étaient développées seulement à 30 centimètres de longueur, montrèrent colorés en jaune-orangé vif l'épiderme des feuilles et celui de la tigelle, tandis que tous les autres éléments des tissus passèrent rapidement à la coloration violette en se désagrégeant.

J'ai constamment observé, parmi les faisceaux vasculaires des très-jeunes tiges ou bourgeons tendres et blanchâtres, un grand nombre de trachées déroulables, comme celle que représente la fig. 6, pl. I, tandis que je n'ai pu retrouver de trachées semblables parmi les vaisseaux des Cannes mûres : si des trachées y existent encore, elles doivent du moins y être beaucoup plus rares relativement à la masse des tissus. Dans toutes les tiges et les feuilles des pousses récemment formées, on remarque des granules amylacés en grand nombre; les tiges en contiennent surtout dans les tissus sous-épidermiques, et dans les tissus cellulaires à sucre, tout autour des faisceaux vasculaires.

Les feuilles présentent aussi des sécrétions amylacées abondantes autour des vaisseaux des nervules, dans les tissus celluleux résistants qui enveloppent ces nervules, et s'étendent de l'une des faces de la feuille jusqu'à l'autre face.

Ces différences notables dans la nature et la distribution des principes immédiats, l'épaisseur beaucoup moindre des parois des cellules, fibres, etc., et l'injection beaucoup moins abondante des matières ligneuses dans les tissus plus jeunes, me semblèrent indiquer que des différences du même ordre se manifesteraient lorsque l'on comparerait la composition immédiate des tiges incomplétement développées avec celle des tiges qui approchent de la maturité.

Les résultats des analyses comparées ont effectivement

fait ressortir ces différences ; ils concourront à expliquer les difficultés, bien constatées déjà par la pratique des sucreries, que présente le traitement des Cannes à sucre récoltées avant la maturité (1).

Ils montreront en outre qu'il serait toujours utile de séparer les rejets ou bourgeons développés, qui resteraient adhérents aux tiges exploitables, peut-être même les extrémités les plus jeunes de ces tiges, près de la partie terminale dite *la flèche*, que l'on sépare toujours.

On voit d'ailleurs, en jetant les yeux sur les analyses comparées insérées dans le tableau ci-contre, que la composition des Cannes à sucre est bien plus complexe qu'on ne le supposait.

---

(1) Les Cannes *folles* très-développées, venues sur les terres *vierges* des forêts incinérées, offrent plus de difficultés encore aux fabricants de sucre ; parfois même on n'en peut extraire que des sirops incristallisables : cela tient sans doute à ce que les cendres ont laissé un excès de sel qui peut bien être favorable à la végétation, mais qui s'oppose à la cristallisation du sucre. Le vesou obtenu dans ces circonstances est habituellement réservé pour la fabrication du *rhum*.

COMPOSITION IMMÉDIATE DES CANNES A SUCRE.

CANNE D'O-TAÏTI A L'ÉTAT DE MATURITÉ.		CANNE AU TIERS DE SON DÉVELOPPEMENT.	
Eau	71,04	Eau	79,70
Sucre (1)	18,00	Sucre	9,06
Cellulose, matière ligneuse, pectine, acide pectique (2)	9,56	Cellulose et matière ligneuse incrustante	7,03
Albumine et trois autres matières azotées (3)	0,55	Albumine et trois autres substances azotées (6)	1,17
Cérosie, matière verte, substance colorante jaune; matières colorables en brun et rouge carmin, substances grasses, résineuses, huile essentielle, matière aromatique, matière déliquescente (4)	0,37	Amidon, cérosie, matière verte, substance colorante jaune, matières colorables en brun et rouge carmin	1,09
Sels insolubles, 0,12; et solubles, 0,16 : phosphates de chaux et de magnésie (5); alumine, sulfate et oxalate de chaux, acétates, malate de chaux, de potasse et de soude; sulfate de potasse, chlorure de potassium et de sodium	00,28	Matières grasses et aromatiques, substance hygroscopique, huile essentielle, sels solubles et insolubles, silice, alumine	1,95
Silice	0,20		
	100,00		100,00

(1) En admettant que la glucose et le sucre liquide ne préexistent pas, on comprend leur présence habituelle en minimes proportions, par suite des altérations dans tous les points où les tissus sont déchirés ou coupés, au moment de la récolte des Cannes à sucre.

(2) Les quantités relatives de tissus varient suivant que les *nœuds* (renfermant des tissus plus serrés et résistants) sont plus ou moins rapprochés les uns des autres; la pectine et l'acide pectique sont combinés aux bases.

(3) Cette quantité s'accorde avec l'analyse élémentaire, qui a donné, pour 2297 milligrammes de substance sèche, 7 centimètres cubes d'azote : $T = 15°$; $P = 75,54$; volume à $0° = 6^{cc},47$; poids $= 0,021\,45$ de matières azotées dans la Canne desséchée, ou 0,0055 dans la Canne à l'état normal.

(4) Substance soluble à froid dans l'alcool à 95°, précipitable par le tannin, se colorant en brun fauve par la chaleur de l'ébullition; c'est la matière qui, d'après MM. Plagne et Hervy, a la propriété de transformer, dans le jus, le sucre en un produit visqueux et insipide, et de s'opposer à la fermentation alcoolique : une filtration sur le charbon d'os élimine à froid cette substance organique déliquescente, et facilite par conséquent l'extraction du sucre cristallisable comme elle peut favoriser la transformation du vesou en liquide vineux propre à la distillation.

(5) Le jus de Canne renferme du biphosphate de chaux et du phosphate de magnésie, car l'addition d'un léger excès d'ammoniaque a donné un précipité cristallin de phosphate double d'ammoniaque et de magnésie pesant 0,09 pour 100; plus, un précipité floconneux qui, recueilli et traité par l'acide sulfurique, produisit du sulfate et du biphosphate de chaux. Sous la double influence de l'air et de l'ammoniaque, le jus se colore peu à peu en brun.

(6) Le poids total de ces quatre matières azotées est déduit de l'analyse élémentaire qui a donné pour 2240 milligrammes de substance séchée, $17^{cc},25$, $P = 75,25$, $t + 13$ ou 0,009 d'azote en poids $= 5,85$ de matière azotée pour 100 à l'état sec, $= 1,17$ pour 100 à l'état normal.

On voit que la Canne verte analysée contenait moitié moins de sucre, moins de tissu, environ 30 pour 100 et trois fois plus de substances organiques et de sels, que la Canne parvenue à l'état de maturité (1). Des différences analogues expliqueraient sans doute, en raison des obstacles qu'opposent diverses matières organiques et sels à la cristallisation du sucre, l'impossibilité d'extraire économiquement le sucre de Canne dans les contrées où, faute d'une température suffisante, cette plante ne peut acquérir une maturité normale.

Les nœuds de la Canne à sucre sont formés d'un tissu serré, dans lequel les fibres ligneuses à parois épaissies dominent; où toutes les cellules présentent, relativement à leur épaisseur plus forte, des cavités moindres; où, d'ailleurs, les cellules sacchariferes sont plus petites et moins nombreuses. On comprend donc que les quantités de sucre s'y trouvent réduites de près de moitié ou dans le rapport de 18 à 10 centièmes, résultat que M. Peligot a constaté par l'analyse chi-

(1) La composition chimique différait beaucoup plus encore dans la tige très-jeune, désignée p. 575, 2e alinéa: du premier nœud (compris) au deuxième, le poids était de $4^{gr},825$, qui se réduisirent, après dessiccation, à $0^{gr},435$; les cinq nœuds et tissus intermédiaires ayant ensemble 2 centimètres de haut, et formant toute la partie supérieure de cette tige, pesaient $3^{gr},760$; ils se réduisirent, par la dessiccation, à $0^{gr},312$: ainsi la première partie de cette tige contenait 9 pour 100 de matière sèche; tout le reste de la tige, seulement 0,0825 ; et l'ensemble renfermait moins de 5 millièmes de sucre (la substance sèche totale contenait 3 centièmes de substances cireuse et grasse.)

mique des Cannes mûres, et dont j'ai pu reconnaître l'exactitude (1).

On ne saurait même s'étonner d'un autre fait, qui semble singulier au premier abord : c'est que les nœuds renferment autant d'eau que l'ensemble des tissus de la tige entière. Cela tient à ce que la proportion plus considérable de cellulose et de substance ligneuse incrustante, dans certaines parties, est compensée par une proportion moindre du sucre dans d'autres parties de ces nœuds. On ne peut, toutefois, donner une idée complète de la composition spéciale des nœuds de la Canne à sucre, sans ajouter que les solutions qu'on en extrait contiennent, relativement au sucre, plus de matières étrangères qu'il ne s'en trouve dans le jus extrait des entre-nœuds. Il n'en saurait être autrement, puisque les liquides, peu ou point sucrés, renfermés dans les tissus dépourvus de cellules spéciales saccharifères, contiennent la plupart des substances étrangères au sucre, dont l'analyse démontre la présence.

En terminant ce Mémoire, je crois devoir dire un mot sur la question économique de la production du sucre aux colonies.

Cette question, qui préoccupe en ce moment l'attention publique, me semble avoir reçu, de la part de la science et de l'industrie, les éléments d'une solution rationnelle; il s'agit surtout, actuellement, d'appliquer ces notions théoriques et pratiques certaines.

---

(1) Les nœuds deviennent plus ligneux encore, toutes les fois qu'il se développe latéralement, à l'extérieur, un bourgeon et des radicelles : en effet, on trouve alors, dans les parties internes correspondantes du nœud, une masse de tissu fortement incrusté de matière ligneuse.

Voici les principales conditions qu'il serait, suivant moi, indispensable de remplir :

D'abord, et pour les définir d'une manière générale, je dirai qu'il faudrait obtenir une main-d'œuvre qui ne fût pas trop dispendieuse, et assurer la meilleure rétribution possible au travail libre.

Que l'on y parviendrait en faisant concourir et venir en aide aux hommes toutes les forces qu'offrent aujourd'hui les sciences agricoles, mécaniques et chimiques ; notamment par les moyens suivants :

En ce qui touche la *culture*, recueillir avec soin et répandre sur les terres tous les engrais minéraux disponibles dans chaque habitation, les cendres des bagasses, le cal des chaudières ; y ajouter les composés alcalins ou calcaires, qui seraient de nature à pouvoir remplacer ceux dont le sol se serait appauvri ;

Utiliser tous les résidus de la fabrication : les mélasses, dans la nourriture des bestiaux, les écumes comme engrais, afin de reporter sur le sol, avec les déjections animales, la plus grande partie des substances que la végétation y avait puisées ;

Appliquer les divers déchets pulvérulents provenant de la révivification du charbon d'os, les cendres, marnes et terres desséchées à l'absorption, la dessiccation et la conservation des déjections des hommes et des animaux, pour les répandre plus facilement et sans déperditions, sous des volumes et des poids moindres ;

Compléter l'aliment organique des végétaux au moyen des engrais les plus riches en substances azotées : le sang ou la chair desséchés, les résidus des pêcheries, les morues détériorées, etc. ;

Éviter l'emploi d'engrais capables d'ajouter un excès de différents sels au delà des proportions utiles pour le développement des Cannes à sucre.

On comprendra l'importance de ces améliorations, qui doivent soutenir ou accroître la fécondité de la terre, en se rappelant que certains sols, suivant leur état de fertilité, ont pu produire annuellement, par hectare, jusqu'à 7000 kilogrammes de sucre : production qui s'est peu à peu réduite sur les mêmes terres, graduellement épuisées, à moins de 2000 kilogrammes; si l'on songe d'ailleurs que la main-d'œuvre, devenue trop dispendieuse, dans ce dernier cas, sur le sol appauvri, pouvait être économique, même à un prix double, sur cette terre à l'époque de sa plus grande fertilité.

Fabrication. En première ligne il faut placer les moyens d'extraire une plus grande quantité de jus, de porter cette quantité de 50 à 60 et même 66 pour 100 qu'on obtient, à 75 ou 80 que l'on pourrait obtenir. L'emploi d'une deuxième presse, avec injection de vapeur globulaire ou de filets d'eau bouillante, donnerait ce résultat, suivant les essais pratiques faits aux colonies par M. Derosne, et que nous avions concertés ensemble. Dans tous les cas, la condition la plus impérieuse de succès serait d'éviter tout ralentissement dans les opérations, d'accélérer même l'extraction du jus et l'élévation de la température au-dessus du terme où les fermentations peuvent s'accomplir.

On obtiendrait la rapidité très-désirable aussi dans les évaporations, en faisant usage des appareils évaporatoires perfectionnés en France, et appliqués avec succès chez les fabricants de sucre indigène (notamment ceux de MM. Derosne et Caïl, Pecqueur, Gaspard, Tamisier, Claës, etc.).

Peut-être conviendrait-il, afin d'en généraliser rapidement l'introduction aux colonies, d'y porter d'abord les appareils les plus simples, moins dispendieux, de premier établissement.

L'extraction du jus et l'évaporation rapides sont, il est vrai, subordonnées aux ressources en combustible dans certaines localités, qui ne peuvent recevoir des importations de houille et n'ont d'autre combustible que la bagasse.

Il serait très-utile de généraliser l'emploi du charbon d'os et des procédés de révivification, afin d'obtenir des produits plus purs et plus abondants en sucre cristallisé, et de pouvoir mettre à profit une plus grande masse de résidus utiles comme engrais.

Les nouveaux procédés d'épuration méthodique et d'égouttage rapide par la force centrifuge, enfin le séchage des sucres cristallisés, offriront un complément utile aux améliorations réalisables dans notre industrie coloniale; ils permettront d'accroître la valeur réelle des produits, et d'amoindrir les frais d'emballage et de transport; ils éviteront enfin les altérations qu'occasionnent, pendant la traversée, les fermentations dans les sucres impurs et humides.

Il est d'ailleurs évident que des mesures administratives, de nature à encourager la production du sucre le plus pur, seraient utiles dans l'intérêt même de l'impôt, applicable, dès lors, à une valeur plus grande et plus stable; elles auraient pour effet de hâter les progrès des industries saccharines, métropolitaine et coloniale, de rendre bientôt la production plus économique, et de développer la consommation du sucre, encore bien arriérée chez nous (1).

---

1) On ne consomme en France que 120 millions de kil. de sucre, tan-

Les principes sur lesquels toutes ces améliorations reposent me paraissent incontestables ; leur application exigerait sans doute des études sérieuses dans chacune des localités qui offriraient des circonstances spéciales ; mais une pareille étude, entreprise par des hommes compétents, ne serait ni bien longue ni difficile aujourd'hui (1).

---

dis que 240 millions de kil. de sel entrent annuellement dans l'alimentation des hommes. C'est le rapport inverse qu'il serait désirable de voir établir, afin que parmi la population entière l'alimentation se rapprochât, sous ce rapport, des meilleures conditions hygiéniques et de ce qu'elle est dans les ménages un peu aisés, où l'on consomme en sucre certainement au delà du double de ce que l'on emploie de sel : dès lors la production saccharine pourrait être quadruplée sans dépasser les besoins de la population.

(1) Depuis la rédaction de ce Mémoire, l'attention publique a été vivement préoccupée des nouveaux faits sur les propriétés remarquables que possède le *bisulfite de chaux* pour prévenir les fermentations. Cet agent chimique ne peut, il est vrai, précipiter qu'une partie des matières azotées contenues dans le jus, et laisse toutes autres substances étrangères en solution.

Il me paraîtrait convenable d'essayer son application dans les premières opérations qui ont pour but l'extraction du jus et le chauffage jusques au degré où la défécation s'opère.

On pourrait dès lors consacrer plus de temps à l'épuisement méthodique des Cannes coupées ou écrasées, et accroître ainsi leur rendement.

Si l'on ne négligeait d'ailleurs aucune des améliorations antérieurement acquises dans la *défécation*, l'*épuration au noir animal*, la *concentration rapide*, la *cristallisation grenue*, l'*égouttage forcé* et le *clairçage*, on parviendrait probablement à obtenir, avec économie, des produits plus abondants et plus purs.

Ce serait dans la même direction qu'on aurait, à mon avis, des chances de succès relativement au traitement des betteraves : celles-ci, au sortir du laveur mécanique, immergées un instant par un deuxième laveur, dans une solution de bisulfite de chaux, en entraîneraient une quantité suffisante pour prévenir la fermentation et la coloration des pulpes et des jus; les moyens usuels d'épuration à la chaux et au charbon d'os en seraient d'autant mieux utilisés.

Structure et Composition de la Canne à Sucre.

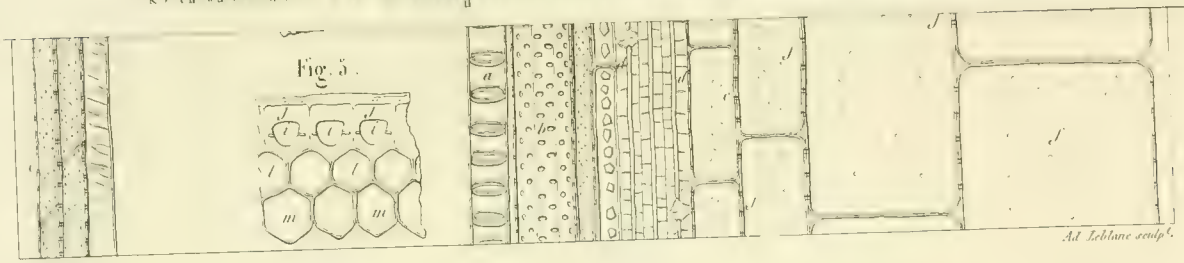


Fig. 1. Coupe perpendiculaire à l'axe de la Canne, montrant l'un des faisceaux vasculaires *a, b, c*, entouré de fibres ligneuses *d*; et les cellules sacharifères *e, f*.

Fig. 2. Coupe parallèle à l'axe des mêmes parties ..... Fig. 3. Détails de vaisseaux.

Fig. 4. Epiderme coupe parallèle à l'axe ..... Fig. 3. Id. Coupe perpendiculaire à l'axe.

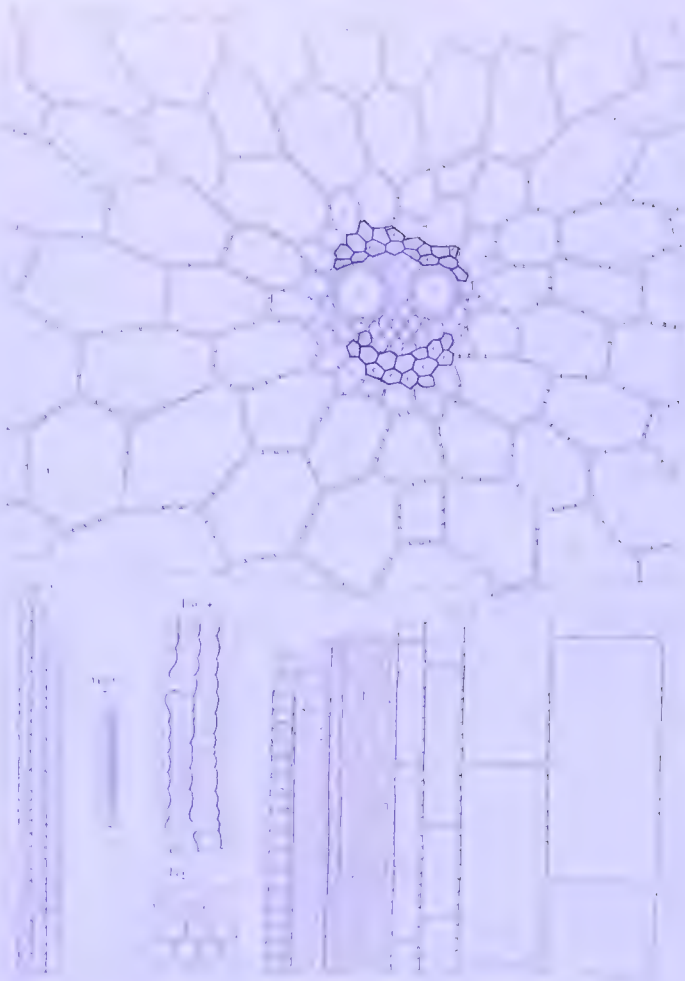


Fig. 1. Coupe transversale de la Canne montrant l'un des faisceaux vasculaires *a b c* entouré de fibres

Structure & Composition de la Canne à Sucre.

Colorations produites par une désagrégation spéciale des Tissus en présence de l'Iode

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

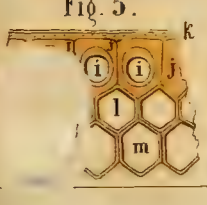
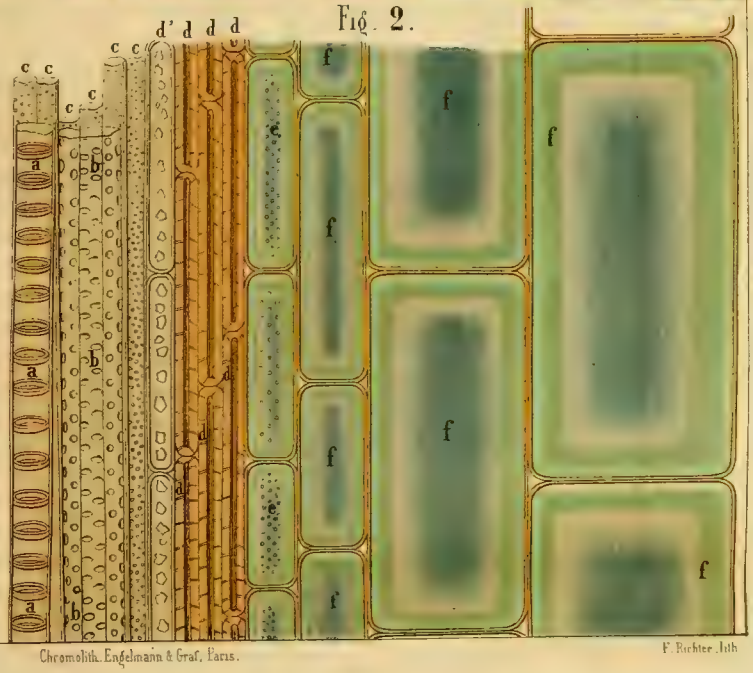


Fig. 2.



Chromolith. Engelmann & Graf, Paris. F. Richter, lith.

1. Coupe perpendiculaire à l'axe de la Canne, montrant l'un des faisceaux vasculaires **a**, **b**, **c**, entouré de fibres ligneuses **d**; et les cellules sacchariferes **e**, **f**.
2. Coupe parallèle à l'axe, des mêmes parties. ___ Fig. **3**. Détails de vaisseaux.
4. Epiderme coupe parallèle à l'axe ..... ___ Fig. **5**. Id, coupe perpendiculaire à l'axe.

MÉMOIRE

SUR LES SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

DIFFÉRENTIELLES

OU AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES, ET SUR LES INTÉGRALES ÉLÉMENTAIRES

DE CES MÊMES ÉQUATIONS,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Présenté dans la séance du 10 décembre 1849.

Je viens aujourd'hui appeler l'attention des géomètres sur une nouvelle branche de calcul intégral qui me paraît devoir contribuer aux progrès de la mécanique moléculaire, et qui a pour objet l'intégration des équations linéaires à coefficients périodiques.

J'appellerai *fonction périodique* d'une ou plusieurs variables indépendantes x, y, z,... celle qui ne sera point altérée quand on fera croître ou décroître ces variables de quantités représentées par des multiples de certains *paramètres*

a, b, c,... en faisant varier x d'un multiple de a, y d'un multiple de b, z d'un multiple de c,... Des *équations linéaires à coefficients périodiques* ne seront autre chose que des équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles, dans lesquelles les diverses dérivées des inconnues auront pour coefficients des fonctions périodiques des variables x, y, z,... ou de variables représentées par des fonctions linéaires de x, y, z,... Enfin, j'appellerai *paramètres trigonométriques* les quotients α, β, γ,... qu'on obtiendra en divisant la circonférence 2π par les paramètres donnés a, b, c,...

Dans les équations linéaires et à coefficients périodiques auxquelles on se trouve conduit par la mécanique moléculaire, les coefficients sont en général fonctions des coordonnées, mais indépendants du temps t; et alors on peut obtenir des intégrales particulières qui fournissent pour les inconnues des valeurs représentées par des produits dont un seul facteur renferme le temps, ce facteur étant une exponentielle dont l'exposant est proportionnel à t. Lorsque l'exponentielle dont il s'agit sera une exponentielle trigonométrique, les intégrales trouvées deviendront *isochrones*, c'est-à-dire qu'elles fourniront, pour valeurs des inconnues, des fonctions périodiques du temps.

Les intégrales particulières dont nous venons de parler seront généralement imaginaires ou symboliques; mais elles ne cesseront pas pour cela d'être applicables à la solution des problèmes de mécanique ou de physique; car si l'on réduit les valeurs symboliques des inconnues à leurs parties réelles, ces parties réelles satisferont encore aux équations données.

Une propriété remarquable d'une fonction périodique de x, y, z,... c'est qu'elle peut être développée en une série or-

donnée suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques dont chacune a pour argument le produit d'une variable par le paramètre trigonométrique correspondant. Dans chaque terme de la série, le facteur constant est représenté par une intégrale définie multiple, les intégrations étant effectuées entre les limites $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$; $z = 0$, $z = c$;... Le terme constant de la série est la *valeur moyenne* de la fonction entre ces limites. D'ailleurs, il est important d'observer que si une fonction périodique u renferme avec les variables indépendantes x, y, z,... d'autres quantités h, k,... la valeur moyenne de u, considérée comme fonction de h, k,... pourra changer de forme quand on changera les valeurs de h, k (*).

Ces principes étant admis, concevons d'abord que, dans les équations linéaires données, les coefficients cessent d'être périodiques et deviennent constants. Alors, on pourra satisfaire aux équations données en supposant les valeurs des diverses inconnues proportionnelles à une seule exponentielle dont l'exposant sera représenté par une fonction linéaire des variables indépendantes. Cette exponentielle, que j'appellerai l'*exponentielle caractéristique*, se trouvera d'ailleurs multipliée dans les diverses inconnues par des coeffi-

---

(1) Ainsi, par exemple, la fonction périodique

$$\frac{he^{\alpha x i}}{k + he^{\alpha x i}}$$

a pour valeur moyenne zéro, ou l'unité, suivant que le module de k est supérieur ou inférieur au module de h.

cients divers dont les équations linéaires données feront généralement connaître les rapports.

En opérant comme je viens de le dire, on obtient seulement des intégrales particulières d'un système donné d'équations linéaires et à coefficients constants. Ces intégrales, qu'on peut appeler *élémentaires*, représentent en effet, dans les questions de mécanique moléculaire, les mouvements *élémentaires*, ou, en d'autres termes, les mouvements *simples* et par *ondes planes*. Ajoutons que l'exponentielle caractéristique correspondante à un système quelconque d'intégrales élémentaires peut se déduire directement de *l'équation caractéristique* à laquelle on parvient en éliminant entre les équations données toutes les inconnues, à l'exception d'une seule.

Concevons maintenant que, dans un système d'équations linéaires, les coefficients redeviennent périodiques, mais diffèrent peu de leurs valeurs moyennes. Après avoir développé ces coefficients en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et descendantes des exponentielles trigonométriques ci-dessus mentionnées, on pourra substituer aux inconnues des développements de même forme, puis égaler entre eux, dans les deux membres de chaque équation, les coefficients des puissances semblables de ces exponentielles. On obtiendra ainsi des équations *auxiliaires* qui seront encore linéaires, mais à coefficients constants, et qui serviront à déterminer les divers termes des développements des inconnues, ou plutôt les coefficients des exponentielles trigonométriques dans ces divers termes. Dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire, lorsque les coefficients périodiques renfermés dans les équations données différeront peu de

leurs valeurs moyennes, les séries qui représenteront les développements des inconnues seront ordinairement convergentes, et l'on pourra exprimer les valeurs des diverses inconnues par des produits de deux facteurs, dont l'un sera une exponentielle caractéristique propre à vérifier le système des équations auxiliaires, l'autre facteur de chaque produit étant un coefficient périodique.

Étant donné un système quelconque d'équations linéaires à coefficients périodiques, les intégrales particulières qui fourniront pour les inconnues des valeurs représentées par des produits de cette sorte, seront celles que je désignerai spécialement sous le nom d'*intégrales élémentaires*.

Il est important d'observer que, dans un système d'intégrales élémentaires d'équations à coefficients périodiques, l'exponentielle caractéristique offre ordinairement une valeur différente de celle qu'on obtiendrait si l'on réduisait chaque coefficient périodique à sa valeur moyenne. Cette observation est surtout utile lorsque les équations données se rapportent à une question de mécanique ou de physique, spécialement à la théorie du son ou à celle de la lumière.

ANALYSE.

Pour montrer une application très-simple des principes exposés dans ce mémoire, concevons que l'inconnue δ doive vérifier l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\mathrm{D}_t\delta = k\mathrm{D}_x\delta, \tag{1}$$

K étant une *fonction périodique* de x, qui ne soit pas altérée quand on fait croître ou décroître la variable x, supposée réelle, d'un multiple du *paramètre* a. Posons d'ailleurs

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}.$$

Enfin, nommons k_0 la *valeur moyenne* de la fonction K, en sorte qu'on ait

$$k_0 = \frac{1}{a}\int_0^a K dx,$$

et soit pareillement k_n la valeur moyenne du produit $Ke^{-n\alpha x i}$, n étant une quantité entière quelconque, positive ou négative. La formule

$$(2) \qquad K = k_0 + k_1 e^{\alpha x i} + k_2 e^{2\alpha x i} + \ldots + k_{-1} e^{-\alpha x i} + k_{-2} e^{-2\alpha x i} + \ldots,$$

fournira le développement de la fonction K en une série ordonnée suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de l'exponentielle $e^{\alpha x i}$. Si d'ailleurs la fonction K diffère peu de sa valeur moyenne k_0, on pourra, dans une première approximation, réduire K à k_0, et la formule (1) à l'équation

$$(3) \qquad D_t S = k_0 D_x S.$$

Or, cette dernière équation, linéaire et à coefficient constant, sera vérifiée, si l'on pose

$$(4) \qquad S = Ae^{ux+st},$$

u, s, A désignant trois constantes dont les deux premières soient liées entre elles par la formule

$$(5) \qquad s = k_0 u;$$

et la valeur, que l'équation (4) fournira pour l'inconnue S,

représentera, non-seulement ce que nous appelons une *intégrale élémentaire* de l'équation (3), mais encore une intégrale approchée de l'équation (1).

Si maintenant on veut obtenir, non plus une intégrale approchée, mais une intégrale exacte de l'équation (1), on pourra supposer la fonction $\mathcal{S}$ développée aussi bien que la fonction K en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle $e^{\alpha x i}$. Faisons, en conséquence,

$$(6)\qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 e^{\alpha x i} + \mathcal{S}_2 e^{2\alpha x i} + \dots + \mathcal{S}_{-1} e^{-\alpha x i} + \mathcal{S}_{-2} e^{-2\alpha x i} + \dots$$

L'équation (1) sera vérifiée si, après y avoir substitué les valeurs de K et $\mathcal{S}$, tirées des formules (2) et (6), on égale entre eux les coefficients des puissances semblables de l'exponentielle $e^{\alpha x i}$, renfermés dans les deux membres. On obtiendra ainsi les équations *auxiliaires*

$$(7)\quad \begin{cases} (\mathrm{D}_t - k_0 \mathrm{D}_x)\mathcal{S}_0 = k_{-1}(\mathrm{D}_x + \alpha i)\mathcal{S}_1 + \dots + k_1(\mathrm{D}_x - \alpha i)\mathcal{S}_{-1} + \dots \\ [\mathrm{D}_t - k_0(\mathrm{D}_x + \alpha i)]\mathcal{S}_1 = k_{-1}(\mathrm{D}_x + 2\alpha i)\mathcal{S}_2 + \dots + k_1 \mathrm{D}_x \mathcal{S}_0 + \dots \\ \text{etc...} \\ [\mathrm{D}_t - k_0(\mathrm{D}_x - \alpha i)]\mathcal{S}_{-1} = k_{-1}\mathrm{D}_x \mathcal{S}_0 + \dots + k_1(\mathrm{D}_x - 2\alpha i)\mathcal{S}_{-2} + \dots \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Or, ces équations, toutes linéaires et à coefficients constants, seront vérifiées, si l'on suppose les inconnues

$$\mathcal{S}_0,\quad \mathcal{S}_1,\quad \mathcal{S}_2, \dots \quad \mathcal{S}_{-1},\quad \mathcal{S}_{-2}, \dots$$

toutes proportionnelles à une seule *exponentielle caractéristique* de la forme

$$e^{ux+st},$$

en sorte qu'on ait

$$(8)\quad \mathcal{S}_0 = A_0 e^{ux+st},\quad \mathcal{S}_1 = A_1 e^{ux+st}, \dots \quad \mathcal{S}_{-1} = A_{-1} e^{ux+st}, \dots$$

et si d'ailleurs on assujettit les constantes

$$u, \quad s, \quad A_0, \quad A_1, \ldots \quad A_{-1}, \ldots$$

à vérifier les équations

$$s = ku, \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (k-k_0)A_0 = k_{-1}\left(1+\frac{\alpha i}{u}\right)A_1 + \ldots + k_1\left(1-\frac{\alpha i}{u}\right)A_{-1} + \ldots, \\ \left[k-k_0\left(1+\frac{\alpha i}{u}\right)\right]A_1 = k_{-1}\left(1+\frac{2\alpha i}{u}\right)A_2 + \ldots + k_1 A_0 + \ldots \\ \text{etc.} \ldots \\ \left[k-k_0\left(1-\frac{\alpha i}{u}\right)\right]A_{-1} = k_{-1}A_0 + \ldots + k_1\left(1-\frac{2\alpha i}{u}\right)A_{-2} + \ldots, \\ \text{etc.} \ldots \end{array}\right. \tag{10}$$

Alors aussi, en posant pour abréger

$$A = A_0 + A_1 e^{\alpha x i} + A_2 e^{2\alpha x i} + \ldots + A_{-1} e^{-\alpha x i} + A_{-2} e^{-2\alpha x i} + \ldots, \tag{11}$$

on tirera des formules (6) et (8)

$$s = A e^{ux+st}. \tag{12}$$

Cette dernière est semblable à la formule (4), mais avec cette différence, que le coefficient A, constant dans la première, devient périodique dans la seconde. Ajoutons que la valeur de la constante s, déterminée dans l'équation (4) par la formule (5), se déduira, dans l'équation (12), de la formule (9), dans laquelle on devra substituer la valeur de k tirée des équations (10). Remarquons enfin que la formule (12) est ici tirée d'une méthode qui suppose la série (11) convergente, et par suite la valeur de K généralement peu différente de sa valeur moyenne k_0. Cette supposition étant admise, le calcul des valeurs de

$$k, A_0, A_1, A_2, \ldots$$

déterminées par les formules (10), pourra s'exécuter comme il suit.

Concevons que, n étant un nombre entier quelconque, on néglige dans les seconds membres des formules (10) tous les termes qui renferment les quantités

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots nA_{-(n+1)}, A_{-(n+2)}, \dots$$

Alors on obtiendra $2n+1$ équations qui détermineront, avec l'inconnue k, les rapports des inconnues

$$A_0; A_1, A_2, \dots A_n; A_{-1}, A_{-2}, \dots A_{-n}.$$

Toutefois les valeurs ainsi trouvées, pour ces rapports et pour la constante k, seront seulement approximatives. Mais, si n vient à croître indéfiniment, ces valeurs approximatives convergeront vers des limites qui seront les valeurs exactes de l'inconnue k et de ces rapports.

Il est important d'observer que, le nombre entier n venant à croître, le degré de l'équation en k, toujours représenté par le nombre $2n+1$, croîtra également. Mais, parmi les $2n+1$ racines de cette équation, l'on devra choisir évidemment celle qui aura pour valeur approchée k_0. D'ailleurs à cette racine, prise pour valeur de k, correspondra un système unique de valeurs des rapports

$$\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \dots \frac{A_n}{A_0}; \quad \frac{A_{-1}}{A_0}, \frac{A_{-2}}{A_0}, \dots \frac{A_{-n}}{A_0}.$$

La méthode d'intégration que nous venons d'appliquer à l'équation (1) s'appliquerait pareillement à une équation de la forme

$$\mathrm{D}_t^2 \delta = K \mathrm{D}_x^2 \delta, \tag{13}$$

K étant toujours une fonction périodique de x, et généralement aux systèmes d'équations linéaires à coefficients périodiques auxquels on se trouve conduit par les problèmes de mécanique ou de physique. Dans le cas où les coefficients pé-

riodiques différeront peu de leurs valeurs moyennes, on obtiendra, en opérant comme on vient de le dire, des intégrales particulières, en vertu desquelles les inconnues se trouveront représentées par des produits de deux facteurs dont l'un sera une *exponentielle caractéristique* déterminée de manière à vérifier un certain système d'équations *auxiliaires* à coefficients constants. Quant à l'autre facteur, il se réduira simplement à un coefficient périodique. Ces intégrales particulières seront celles que nous désignerons sous le nom d'*intégrales élémentaires*. La méthode que nous venons d'indiquer fournira les intégrales élémentaires développées en séries; elle suppose d'ailleurs que les développements trouvés sont convergents. Dans certains cas spéciaux, on pourra obtenir ces intégrales élémentaires en termes finis. C'est ce qui arrive, par exemple, pour l'équation (1), ainsi qu'on va le faire voir.

Les quantités s, u étant deux constantes et A une fonction de x, il est clair qu'on pourra toujours satisfaire à l'équation (1) par une valeur de δ de la forme

$$\delta = Ae^{ux+st}, \tag{14}$$

car si l'on substitue cette valeur de δ dans l'équation (1), et si l'on pose, pour abréger,

$$H = u - \frac{s}{K}, \tag{15}$$

on obtiendra la formule

$$\frac{D_x A}{A} = -H, \tag{16}$$

que l'on vérifie en posant

$$A = e^{-\int H dx}. \tag{17}$$

Si maintenant K est une fonction périodique de x, qui ne varie pas quand on y fait croître x de a, il en sera de même de la fonction H, qui pourra être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de l'exponentielle trigonométrique $e^{\alpha x i}$, la valeur de α étant $\frac{2\pi}{a}$; et alors, en posant

$$H = h_0 + h_1 e^{\alpha x i} + \ldots + h_{-1} e^{-\alpha x i} + \ldots,$$

on trouvera

$$\int H dx = h_0 x + \frac{1}{\alpha i}(h_1 e^{\alpha x i} + \ldots - h_{-1} e^{-\alpha x i} - \ldots) + \text{const.}$$

Par suite A se réduira simplement à une fonction périodique de x, si l'on choisit s de manière que h_0 s'évanouisse. Or, h_0 étant la valeur moyenne de H, la condition énoncée sera remplie si l'on pose

$$s = ku,$$

k étant choisi de manière que la valeur moyenne de $1 - \frac{k}{K}$ s'évanouisse, ou, ce qui revient au même, si l'on détermine s et k à l'aide des formules

$$(18) \qquad s = ku, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dx}{K}.$$

D'ailleurs on reconnaîtra facilement que l'intégrale élémentaire fournie par l'équation (14) jointe aux formules (15), (17) et (18), coïncide avec l'intégrale que donne le développement en série, effectué à l'aide de la méthode ci-dessus indiquée dans le cas où la fonction périodique K diffère peu de sa valeur moyenne k_0.

MÉMOIRE

SUR LES VIBRATIONS

D'UN DOUBLE SYSTÈME DE MOLÉCULES,

ET DE L'ÉTHER

CONTENU DANS UN CORPS CRISTALLISÉ,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Présenté dans la séance du 17 décembre 1849.

Dans ce mémoire, après avoir reproduit les équations qui représentent les mouvements finis ou infiniment petits d'un double système de molécules, je considère en particulier le cas où les équations dont il s'agit sont linéaires et à coefficients périodiques, et je fais voir comment de celles-ci on peut déduire d'autres équations linéaires, mais à coefficients constants. Ces dernières équations, que je nomme *auxiliaires*, peuvent d'ailleurs être censées déterminer les *valeurs moyennes* des inconnues que renferment les équations primitives. Mais, comme j'en fais la remarque, elles sont généralement distinctes de celles auxquelles on parviendrait, si dans les

équations primitives on remplaçait chaque coefficient périodique par sa valeur moyenne. Cette observation, très-importante dans la physique mathématique, explique à elle seule un grand nombre de phénomènes relatifs aux théories du son et de la lumière; par exemple, les singulières influences des milieux cristallisés sur les vibrations de l'éther. Elle montre comment il arrive que ces milieux peuvent tantôt éteindre la lumière, tantôt produire les divers phénomènes lumineux, et en particulier la polarisation chromatique. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans de nouveaux mémoires qui offriront le développement des principes posés dans celui-ci.

ANALYSE.

§ 1er. *Équations de l'équilibre d'un double système de molécules.*

Considérons deux systèmes de molécules qui coexistent dans une portion donnée de l'espace. Rapportons d'ailleurs les positions des atomes dont se composent ces molécules à trois axes coordonnés rectangulaires; et soient, dans un premier instant,

x, y, z les coordonnées d'un atome $\mathfrak{m}$ appartenant au premier système,

ou d'un atome $\mathfrak{m}_1$ appartenant au second système;

X, Y, Z les projections algébriques de la force accélératrice

qui sollicite l'atome $\mathfrak{m}$ sur les axes coordonnés. Ces projections devront s'évanouir, avec la force dont il s'agit, s'il y a équilibre; en d'autres termes, les conditions d'équilibre de l'atome $\mathfrak{m}$ seront

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0. \tag{1}$$

Pareillement. si l'on nomme X_1, Y_1, Z_1 les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicite, au premier instant, non plus l'atome $\mathfrak{m}$, mais l'atome $\mathfrak{m}_1$, les équations d'équilibre de ce dernier atome seront

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0. \tag{2}$$

Considérons en particulier le cas où la force accélératrice appliquée à l'atome $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}_1$, qui est censé coïncider avec le point (x, y, z), résulte uniquement d'actions exercées sur cet atome par tous les autres. Supposons d'ailleurs que l'action mutuelle de deux atomes soit proportionnelle à leurs masses et à une certaine fonction de leur distance. Enfin, nommons

m, m_1 les masses de deux atomes distincts de $\mathfrak{m}$, et appartenant, l'un au premier système de molécules, l'autre au second;

r, r_1 les distances qui séparent, au premier instant, l'atome $\mathfrak{m}$ des atomes m et m_1;

$\mathfrak{m}\,m\,r\,f(r)$, $\mathfrak{m}\,m_1\,r_1\,f(r_1)$ les actions exercées sur l'atome $\mathfrak{m}$ par les atomes m et m_1, chacune des fonctions $f(r)$, $f(r_1)$ étant positive ou négative, suivant que l'atome $\mathfrak{m}$ est attiré ou repoussé;

x, y, z les projections algébriques de la distance r sur les axes coordonnés;

$x_,$, $y_,$, $z_,$ les projections algébriques de la distance $r_,$ sur les mêmes axes.

On aura, non-seulement

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{3}$$

$$r_,^2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2, \tag{4}$$

mais encore

$$\left\{\begin{aligned} X &= \mathrm{S}\, m\, x f(r) + \mathrm{S}\, m_, x_, f(r_,), \\ Y &= \mathrm{S}\, m\, y f(r) + \mathrm{S}\, m_, y_, f(r_,), \\ Z &= \mathrm{S}\, m\, z f(r) + \mathrm{S}\, m_, z_, f(r_,), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

la sommation qu'indique chaque signe S s'étendant à tous les atomes m,... distincts de $\mathfrak{m}$, qui composent les molécules du premier système, ou à tous les atomes $m_,$ qui composent les molécules du second système. Ajoutons que les valeurs de $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ se trouveront à leur tour déterminées par trois équations semblables aux formules (5).

§ 2. *Équations du mouvement d'un double système de molécules.*

Concevons à présent que le double système de molécules passe de l'état d'équilibre à l'état de mouvement, et soient au bout du temps t

ξ, η, ζ les déplacements de l'atome $\mathfrak{m}_,$ mesurés parallèlement aux axes coordonnés,

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les projections algébriques de la force accélératrice qui sollicite l'atome $\mathfrak{m}$. Les équations du mouvement de cet atome seront de la forme

$$\mathrm{D}_t^2 \xi = \mathfrak{X},\ \mathrm{D}_t^2 \eta = \mathfrak{Y},\ \mathrm{D}_t^2 \zeta = \mathfrak{Z}. \tag{1}$$

Si d'ailleurs on nomme $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ ce que deviennent $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, quand on substitue l'atome $\mathfrak{m}_1$ à l'atome $\mathfrak{m}$, on aura

$$(2) \qquad D_t^2\xi = \mathfrak{X}_1, \quad D_t^2\eta = \mathfrak{Y}_1, \quad D_t^2\zeta = \mathfrak{Z}_1.$$

Soient maintenant

$r + \rho$, $r_1 + \rho_1$ ce que deviennent, au bout du temps t et dans l'état de mouvement, les distances r, r_1 qui dans l'état d'équilibre séparaient l'atome $\mathfrak{m}$ des atomes m et m_1. Supposons de plus que l'on indique, à l'aide de la lettre caractéristique Δ ou Δ_1, les accroissements que reçoivent ξ, η, ζ, ou ξ_1, η_1, ζ_1 quand on passe de l'atome $\mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{m}_1$ à l'atome m ou m_1. La longueur $r + \rho$ aura évidemment pour extrémités les deux points dont les coordonnées respectives seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta$$

et

$$x + \mathrm{x} + \xi + \Delta\xi, \quad y + \mathrm{y} + \eta + \Delta\eta, \quad z + \mathrm{z} + \zeta + \Delta\zeta;$$

pareillement la longueur $r_1 + \rho_1$ aura pour extrémités les deux points dont les coordonnées respectives seront

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

$$x + \mathrm{x}_1 + \xi_1 + \Delta_1\xi_1, \quad y + \mathrm{y}_1 + \eta_1 + \Delta_1\eta_1, \quad z + \mathrm{z}_1 + \zeta_1 + \Delta_1\zeta_1.$$

Par suite les projections algébriques de la longueur $r + \rho$ sur les axes coordonnés seront

$$\mathrm{x} + \Delta\xi, \quad \mathrm{y} + \Delta\eta, \quad \mathrm{z} + \Delta\zeta;$$

et les projections algébriques de la longueur $r_1 + \rho_1$ sur les mêmes axes seront

$$\mathrm{x}_1 - \xi + \xi_1 + \Delta_1\xi_1, \quad \mathrm{y}_1 - \eta + \eta_1 + \Delta_1\eta_1, \quad \mathrm{z}_1 - \zeta + \zeta_1 + \Delta_1\zeta_1.$$

Cela posé, lorsqu'on passera de l'état d'équilibre à l'état de

mouvement, les formules (3), (4) du paragraphe premier se trouveront évidemment remplacées par les suivantes :

$$(3)\qquad (r+\rho)^2=(x+\Delta\xi)^2+(y+\Delta\eta)^2+(z+\Delta\zeta)^2,$$

$$(4)\qquad (r_1+\rho_1)^2=(x_1-\xi+\xi_1+\Delta_1\xi_1)^2+(y_1-\eta+\eta_1+\Delta_1\eta_1)^2+(z_1-\zeta+\zeta_1+\Delta_1\zeta_1)^2,$$

et les formules (5) du paragraphe premier par les suivantes :

$$(5)\qquad \mathfrak{X}=\mathrm{S}m(x+\Delta\xi)f(r+\rho)+\mathrm{S}m_1(x_1-\xi+\xi_1+\Delta_1\xi_1)f(r_1+\rho_1),\ \text{etc.}$$

Ajoutons que des équations de même forme fourniront les valeurs de $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$.

Supposons maintenant que les actions mutuelles des atomes du premier système décroissent, quand la distance augmente, assez rapidement pour que l'on puisse développer, à l'aide du théorème Taylor, les différences finies

$$\Delta\xi,\ \Delta\eta,\ \Delta\zeta$$

en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, y, z. Ces séries pourront être immédiatement déduites des équations de la forme

$$\xi+\Delta\xi=e^{xD_x+yD_y+zD_z}\xi,$$

par conséquent de la formule symbolique

$$(6)\qquad 1+\Delta=e^{xD_x+yD_y+zD_z}.$$

Si, pour abréger, l'on suppose

$$u=D_x,\ v=D_y,\ w=D_z,$$
$$\iota=xD_x+yD_y+zD_z,$$

la formule (6) deviendra

$$(7)\qquad 1+\Delta=e^{\iota},$$

et l'on en tirera

$$\Delta = e^{\iota} - 1. \tag{8}$$

Pareillement, si l'on suppose

$$\Delta_{,}\xi_{,},\ \Delta_{,}\eta_{,},\ \Delta_{,}\zeta_{,}$$

développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, alors, en posant, pour abréger,

$$\iota_{,} = x_{,} D_x + y_{,} D_y + z_{,} D_z,$$

on pourra déduire ces séries de la formule symbolique

$$1 + \Delta_{,} = e^{\iota_{,}}. \tag{9}$$

§ 3. *Mouvements infiniment petits d'un double système de molécules.*

Considérons, dans le double système de molécules donné, un mouvement vibratoire, en vertu duquel chaque atome s'écarte très-peu de la position qu'il occupait dans un état d'équilibre du système. Si l'on cherche les lois du mouvement, celles du moins qui subsistent, quelque petite que soit l'étendue des vibrations moléculaires, alors, en regardant les déplacements

$$\xi, \eta, \zeta, \qquad \xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,},$$

et leurs différences finies comme des quantités infiniment petites du premier ordre, on pourra négliger les produits, les carrés et les puissances supérieures, non-seulement de ces déplacements et de leurs différences, mais aussi des quantités $\rho, \rho_{,}$. Cela posé, les formules (3) et (4) du paragraphe 2 donneront

$$\rho = \frac{x\Delta\xi + y\Delta\eta + z\Delta\zeta}{r}, \tag{1}$$

$$(2)\qquad \rho_i = \frac{x_i(\xi_i - \xi + \Delta_i\xi_i) + y_i(\eta_i - \eta + \Delta_i\eta_i) + z_i(\zeta_i - \zeta + \Delta_i\zeta_i)}{r_i};$$

et les formules (2), (5) du même paragraphe donneront

$$(3)\qquad \begin{cases} D_t^2\xi = L\xi + R\eta + Q\zeta + L_i\xi_i + R_i\eta_i + Q_i\zeta_i, \\ D_t^2\eta = R\xi + M\eta + P\zeta + R_i\xi_i + M_i\eta_i + P_i\zeta_i, \\ D_t^2\zeta = Q\xi + P\eta + N\zeta + Q_i\xi_i + P_i\eta_i + N_i\zeta_i, \end{cases}$$

les valeurs de

$$L, M, N, P, Q, R,$$
$$L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i,$$

étant déterminées par les formules symboliques

$$L = Sm\left[f(r) + \frac{x^2}{r} D_r f(r)\right]\Delta - Sm_i\left[f(r_i) + \frac{x_i^2}{r_i} D_r f(r_i)\right], \text{ etc.}$$

$$P = Sm \frac{yz}{r} D_r f(r)\Delta - Sm_i \frac{y_i z_i}{r_i} D_{r_i} f(r_i), \text{ etc.}$$

$$L_i = Sm_i\left[f(r_i) + \frac{x_i^2}{r_i} D_{r_i} f(r_i)\right](1 + \Delta_i), \text{ etc.}$$

$$P_i = Sm_i \frac{y_i z_i}{r_i} D_{r_i} f(r_i)(1 + \Delta_i), \text{ etc.}$$

maintenant on pose, comme dans le paragraphe précédent,

$$u = D_x, \qquad v = D_y, \qquad w = D_z,$$
$$\iota = xD_x + yD_y + zD_z, \qquad \iota_i = x_iD_x + y_iD_y + z_iD_z,$$

alors, en ayant égard aux formules symboliques

$$\Delta = e^{\iota} - 1, \qquad 1 + \Delta_i = e^{\iota_i},$$

et en posant d'ailleurs

$$(4)\qquad \begin{cases} G = Smf(r)(e^{\iota} - 1) - Sm_i f(r_i), \\ H = S\frac{m}{r} D_r f(r)\left(e^{\iota} - \frac{\iota^2}{2}\right) - S\frac{m_i}{r_i} D_{r_i} f(r_i)\frac{\iota_i^2}{2}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} G_i = Sm_i f(r_i) e^{\iota_i}, \\ H_i = S\frac{m_i}{r_i} D_{r_i} f(r_i) e^{\iota_i}, \end{cases}$$

on aura simplement

$$(6)\qquad L = G + D_u^2 H, \text{ etc.}\ldots \qquad P = D_v D_w H, \text{ etc.}\ldots$$

$$(7)\qquad L_1 = G_1 + D_u^2 H_1, \text{ etc.}\ldots \qquad P_1 = D_v D_w H_1, \text{etc.}\ldots$$

et par suite les formules (3) deviendront

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} D_t^2\xi &= G\xi + D_u(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) \\ &\quad + G_1\xi_1 + D_u(D_u H_1\xi_1 + D_v H_1\eta_1 + D_w H_1\zeta_1), \\ D_t^2\eta &= G\eta + D_v(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) \\ &\quad + G_1\eta_1 + D_v(D_u H_1\xi_1 + D_v H_1\eta_1 + D_w H_1\zeta_1), \\ D_t^2\zeta &= G\zeta + D_w(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta) \\ &\quad + G_1\zeta_1 + D_w(D_u H_1\xi_1 + D_v H_1\eta_1 + D_w H_1\zeta_1). \end{aligned}\right.$$

Ajoutons que, si l'on échange entre eux les deux systèmes de molécules donnés, on obtiendra, non plus les équations (6), mais trois équations de même forme, qui, jointes aux équations (6), pourront servir à déterminer les valeurs des six inconnues

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

en fonctions des quatre variables indépendantes x, y, z, t.

D'après ce qu'on vient de voir, les équations du mouvement d'un double système de molécules sont des équations linéaires. Les coefficients qu'elles renferment sont généralement variables avec les coordonnées x, y, z. Mais ces coefficients étant nécessairement réels, il en résulte qu'on peut considérer les déplacements effectifs

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$$

comme représentant les parties réelles d'inconnues imaginaires qui satisferaient à ces mêmes équations. Ces inconnues imaginaires, que je désignerai par les notations

$$\xi,\ \overline{\eta},\ \overline{\zeta};\ \overline{\xi_1},\ \overline{\eta_1},\ \overline{\zeta_1},$$

sont ce que j'appellerai les *déplacements symboliques* d'un atome $\mathfrak{m}$ du premier système, et d'un atome $\mathfrak{m}_1$ du second système.

§ 4. *Mouvements infiniment petits d'un système de molécules, placé en présence d'un autre système dont chaque molécule reste sensiblement immobile.*

Si les molécules du premier des systèmes donnés, comparées aux molécules du second, sont bien supérieures en nombre, mais douées de masses beaucoup plus petites, alors dans un mouvement vibratoire les déplacements

$$\xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1$$

d'un atome du second système seront généralement très-petits par rapport aux déplacements

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

d'un atome du premier. Alors aussi, en négligeant ξ_1, η_1, ζ_1 vis-à-vis de ξ, η, ζ, on réduira les équations (3) du paragraphe 3, aux formules

$$(1) \qquad \begin{cases} D_t^2\xi = L\xi + R\eta + Q\zeta, \\ D_t^2\eta = R\xi + M\eta + P\zeta, \\ D_t^2\zeta = Q\xi + P\eta + N\zeta; \end{cases}$$

et les équations (8) du même paragraphe aux formules

$$(2) \qquad \begin{cases} (D_t^2 - G)\xi = D_u(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta), \\ (D_t^2 - G)\eta = D_v(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta), \\ (D_t^2 - G)\zeta = D_w(D_u H\xi + D_v H\eta + D_w H\zeta); \end{cases}$$

les valeurs de

$$G, \quad H, \quad L, \quad M, \quad N, \quad P, \quad Q, \quad R$$

étant fournies par les équations (4) et (6) du paragraphe 3.

Il est naturel de supposer que les atomes du fluide éthéré, dans lequel se propagent les vibrations lumineuses, sont de beaucoup supérieurs en nombre aux molécules des corps, mais doués de masses beaucoup plus petites. Si l'on admet cette supposition, la théorie de la lumière pourra se déduire complétement du système des équations (1), ou, ce qui revient au même, du système des équations (2).

Ajoutons que, dans le cas où les systèmes de molécules donnés se réduisent à un seul, on se trouve de nouveau conduit aux équations (1) et (2). Seulement alors les formules (4) du paragraphe 3 se réduisent aux suivantes

$$(3) \qquad G = Smf(r)(e^t - 1), \quad H = S\frac{m}{r}D_r f(r)\left(e^t - \frac{t^2}{2}\right).$$

§ 5. *Mouvements vibratoires des corps homogènes.*

Lorsque chacun des systèmes de molécules donnés est homogène, on peut, dans une première approximation, réduire les coefficients variables que renferment les équations différentielles d'un mouvement vibratoire infiniment petit à des quantités constantes. Alors aussi, en éliminant entre ces équations toutes les inconnues à l'exception d'une seule, on obtient une équation définitive que nous avons nommée l'*équation caractéristique*. Soient χ l'une quelconque des inconnues, et

$$(1) \qquad \nabla\chi = 0$$

l'équation caractéristique, ∇ étant de la forme

$$(2) \qquad \nabla = F(D_t, D_x, D_y, D_z).$$

Supposons d'ailleurs qu'après avoir écrit

$$s,\ u,\ v,\ w$$

au lieu de

$$D_t,\ D_x,\ D_y,\ D_z$$

on prenne

$$s = F(s, u, v, w). \tag{3}$$

s regardé comme fonction de s, sera d'un degré n, équivalent au produit qu'on obtient en multipliant par 6 le nombre des systèmes de molécules donné, ou plutôt le nombre de ceux dont les atomes restent sensiblement immobiles. Par suite, l'équation linéaire (1) sera du 6e ordre, si l'on fait vibrer un système unique de molécules; du 12e ordre si l'on fait vibrer deux systèmes de molécules; etc. D'ailleurs, comme je l'ai montré dans les Exercices d'analyse et de physique mathématique, on pourra non-seulement exprimer par une intégrale définie sextuple la fonction principale 8 assujettie à vérifier, quel que soit t, l'équation (1), et pour $t = 0$, les conditions

$$8 = 0,\ D_t 8 = 0,\ \ldots\ D_t^{n-1} 8 = 0; \tag{4}$$

mais encore réduire la détermination des diverses inconnues à l'évaluation de la fonction principale, en supposant que l'on connaisse la position initiale de chaque atome, et sa vitesse initiale.

Au reste, la méthode d'intégration que je viens de rappeler suppose que les équations linéaires données sont à coefficients constants; mais cette supposition n'est pas toujours conforme à la réalité. Concevons, pour fixer les idées, que l'on considère un double système de molécules, et que les atomes dont se composent ces molécules appartiennent, les uns à un corps cristallisé, les autres au fluide lumineux ou éthéré que

renferme ce corps. Alors, comme je l'ai remarqué dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences le 1er avril 1839, *les molécules du corps, ou plutôt les atomes dont elles se composent, exerçant une attraction sur les molécules éthérées, ces dernières se rassembleront en plus grand nombre dans le voisinage d'un atome du corps, et par suite la densité de l'éther pourra varier sensiblement d'un point de l'espace à l'autre dans un très-petit intervalle.* Il y a plus; comme l'ont remarqué les minéralogistes, les centres de gravité des molécules d'un corps cristallisé composent un système *réticulaire* divisé en *cellules* ou *alvéoles* par trois systèmes de plans rectangulaires ou obliques, mais parallèles à trois plans fixes. Un tel système jouit de propriétés diverses étudiées avec soin par M. Bravais, et doit être censé renfermer des molécules similaires, dont les atomes correspondants occupent, dans les diverses cellules, des positions semblables. Par suite aussi, les atomes du fluide éthéré doivent être distribués de la même manière dans toutes les cellules. Cela posé, les équations linéaires qui représenteront les mouvements vibratoires, infiniment petits et simultanés, d'un cristal homogène et du fluide éthéré qu'il renferme, seront évidemment analogues à celles que j'ai considérées dans le précédent mémoire; en d'autres termes, elles seront linéaires, mais à coefficients périodiques. Si, dans ce cristal, les *plans réticulaires* divisent l'espace en rhomboïdes dont chacun ait pour arêtes trois *paramètres* désignés par a, b, c, les divers coefficients seront des fonctions périodiques de coordonnées parallèles à ces arêtes, et ces fonctions ne seront point altérées quand on fera croître ou décroître chaque coordonnée d'un multiple du *paramètre* qui lui correspond. Si d'ailleurs ces

coordonnées sont obliques, rien n'empêchera de prendre pour variables indépendantes, outre le temps, des coordonnées rectangulaires, dont les coordonnées obliques seront évidemment fonctions linéaires.

Ces principes étant admis, si l'on veut déduire de l'analyse les lois des vibrations de l'éther dans un corps cristallisé, on aura évidemment à intégrer un système d'équations linéaires, non plus à coefficients constants, mais à coefficients périodiques. Il en sera de même, s'il s'agit de déterminer les vibrations propres de ce corps; et généralement les équations de cette espèce pourront être appliquées à l'étude d'un grand nombre de phénomènes en physique ou en mécanique.

Cela posé, considérons un mouvement vibratoire représenté par un système d'équations linéaires à coefficients périodiques. Soit $\mathcal{S}$ l'une quelconque des inconnues, et K l'un quelconque des coefficients périodiques, dans les équations dont il s'agit. K sera une fonction périodique ou des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ou du moins de trois coordonnées obliques $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, liées aux coordonnées rectangulaires x, y, z, par trois équations du premier degré; et ne variera pas quand on fera croître ou décroître $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ de quantités représentées par des multiples de trois paramètres donnés a, b, c. Si maintenant on pose

$$\alpha = \frac{2\pi}{a}, \quad 6 = \frac{2\pi}{b}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{c}, \tag{5}$$

la fonction périodique K pourra être développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes des exponentielles trigonométriques

$$e^{\alpha \mathfrak{x} i}, \; e^{6 \mathfrak{y} i}, \; e^{\gamma \mathfrak{z} i},$$

en sorte qu'on aura

$$(6) \qquad K = S\,k_{l\alpha,\, l'\beta,\, l''\gamma}\, e^{l\alpha\mathfrak{x}i} e^{l'\beta\mathfrak{y}i} e^{l''\gamma\mathfrak{z}i},$$

la sommation qu'indique le S s'étendant à toutes les valeurs entières, positives, nulles ou négatives des quantités l, l', l''; et pour satisfaire aux équations données, il suffira de développer non-seulement chaque coefficient, mais encore chaque inconnue, en une série de même forme, en posant, par exemple,

$$(7) \qquad \aleph = S\aleph_{l\alpha,\, l'\beta,\, l''\gamma}\, e^{l\alpha\mathfrak{x}i} e^{l'\beta\mathfrak{y}i} e^{l''\gamma\mathfrak{z}i},$$

puis d'égaler entre eux, dans les deux membres de chacune des équations obtenues, les coefficients des puissances semblables des exponentielles

$$e^{\alpha\mathfrak{x}i},\ e^{\beta\mathfrak{y}i},\ e^{\gamma\mathfrak{z}i}.$$

En opérant comme on vient de le dire, et supposant que dans les développements des inconnues on néglige les termes où la somme des valeurs numériques des trois quantités

$$l,\ l',\ l''$$

surpasse un nombre donné N, on obtiendra un nombre fini d'équations *auxiliaires* qui renfermeront, à la place de l'inconnue $\aleph$, les inconnues

$$\aleph_0, \aleph_\alpha, \aleph_\beta, \aleph_\gamma, \aleph_{2\alpha}, \aleph_{2\beta}, \aleph_{2\gamma}, \aleph_{\alpha,\beta}, \text{ etc.},$$

dont la première, $\aleph_0$ représentera précisément la *valeur moyenne* de $\aleph$, considéré comme fonction de $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; puis, en éliminant de ces équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, on formera une *équation caractéristique*

$$(8) \qquad \square\,\aleph_0 = 0.$$

Ajoutons qu'on pourra, si l'on veut, à l'aide d'éliminations, réduire les *équations auxiliaires* à ne contenir d'autres incon-

nues que celles qui sont analogues à s_0, par conséquent celles qui représentent les valeurs moyennes des divers déplacement atomiques.

Il importe d'observer que les équations auxiliaires ainsi obtenues différeront, en général, même pour une valeur infinie du nombre N, de celles auxquelles se réduiraient les équations proposées, si l'on y remplaçait chaque coefficient périodique par sa valeur moyenne.

MÉMOIRE

SUR

LES SYSTÈMES ISOTROPES

DE POINTS MATÉRIELS,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Séance du 24 décembre 1849.

Dans le Mémoire lithographié, sous la date d'août 1836, et dans celui que j'ai présenté à l'Académie le 17 juin 1839 (*), j'ai recherché ce que deviennent les équations des mouvements infiniment petits d'un ou même de deux systèmes homogènes de points matériels, quand elles acquièrent la propriété de ne pouvoir être altérées, tandis que l'on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand les systèmes donnés deviennent isotropes.

(*) Voir le tome VIII des *Comptes rendus*, et le tome Ier des *Exercices d'analyse et de physique mathématique*.

Mais, dans cette recherche, les coefficients que renfermaient les équations linéaires données étaient supposés réduits à des quantités constantes; et, comme j'en ai fait la remarque, cette supposition n'est pas toujours conforme à la réalité. Dans un grand nombre de problèmes de physique et de mécanique, les équations linéaires auxquelles on se trouve conduit renferment des coefficients, non plus constants, mais périodiques. Il est vrai qu'alors l'intégration de ces équations linéaires et à coefficients périodiques peut être ramenée à l'intégration d'autres équations linéaires, à coefficients constants, savoir, de celles que j'ai désignées sous le nom d'*équations auxiliaires*, et qui déterminent les *valeurs moyennes* des inconnues. Mais, la forme de ces équations auxiliaires étant plus générale que celle des équations primitives, il devient nécessaire de généraliser les formules qui s'en déduisent, et spécialement celles qui représentent les mouvements infiniment petits des systèmes isotropes. Ajoutons qu'on peut obtenir aisément ces dernières formules, sans le secours du calcul intégral, en s'appuyant sur quelques théorèmes fondamentaux relatifs aux *fonctions isotropes* de coordonnées rectilignes, c'est-à-dire. aux fonctions qui ne sont pas altérées quand on fait tourner les axes coordonnés autour de l'origine. Parmi ces théorèmes, nous nous bornerons à citer le suivant.

Théorème. Une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points dépend uniquement des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles, et de la *somme alternée* dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes.

Remarquons, d'ailleurs, que le carré du volume d'un tétraèdre étant une fonction entière des carrés des six arêtes,

on pourra réduire toute fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points à une fonction de six quantités variables. Ajoutons qu'une telle fonction deviendra *hémitrope*, si elle change de signe avec les coordonnées elles-mêmes.

Quand on veut appliquer le théorème que nous venons d'énoncer à la recherche des conditions d'isotropie d'un système de points matériels, il convient de remplacer les trois équations qui déterminent les déplacements d'un point, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, par l'équation unique qui détermine, pour le même point, le déplacement mesuré parallèlement à un quatrième axe, arbitrairement choisi En opérant ainsi, on se trouve immédiatement conduit aux équations que j'ai mentionnées dans la séance du 14 novembre 1842, et qui représentent avec tant de précision les phénomènes de polarisation circulaire produits par l'huile de térébenthine, l'acide tartrique, etc.

ANALYSE.

§ 1^er^. *Caractères et propriétés d'une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points.*

Soient

$$x, y, z;\ x_{,}, y_{,}, z_{,};\ x_{,,}, y_{,,}, z_{,,};\ldots$$

les coordonnées de divers points P, $P_{,}$, $P_{,,}$,... mesurées parallèlement à trois axes rectangulaires ou obliques. Une fonction de ces coordonnées sera dite *isotrope*, si on ne l'altère pas en faisant subir à ces mêmes coordonnées les

changements de valeurs qui résultent d'un mouvement de rotation quelconque imprimé aux axes autour de l'origine O. Les fonctions de cette espèce se trouvant naturellement introduites dans le calcul par certaines questions de physique ou de mécanique, il importe de rechercher leur forme générale et leurs propriétés principales. Tel est l'objet dont nous allons ici nous occuper.

D'abord, toute quantité variable qui ne dépendra que des positions relatives des points donnés P, P_1, P_{11}... et de l'origine O, sera évidemment une fonction isotrope des coordonnées de ces points. Telles seront, en particulier, les fonctions qui exprimeront les rayons vecteurs

$$r,\ r_1,\ r_{11},\ldots$$

menés de l'origine aux points P, P_1, P_{11},... les sinus et cosinus des angles

$$\widehat{(r, r_1)},\quad \widehat{(r, r_{11})},\ldots\quad \widehat{(r_1, r_{11})},\ldots$$

compris entre ces rayons vecteurs, les distances mutuelles des points donnés, enfin, le volume du tétraèdre qui aura pour sommets trois de ces points et l'origine. Si, pour fixer les idées, on suppose que les points donnés se réduisent à trois P, P_1, P_{11}, alors, en désignant par

$$r,\ r_1,\ r_{11};\ v,\ v_1,\ v_{11}$$

les six distances

$$OP,\ OP_1,\ OP_{11};\ P_1P_{11},\ P_{11}P,\ PP_1,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, les six arêtes du tétraèdre qui aura pour sommet le point O, et pour base le triangle PP_1P_{11}, on obtiendra pour $r, r_1, r_{11}; v, v_1, v_{11}$ des fonctions isotropes des coordonnées x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_{11}, y_{11}, z_{11}; et l'on pourra en dire autant de la somme alternée dont la

sixième partie représentera, au signe près, le volume du tétraèdre $OPP_{,}P_{,,}$. Nommons $\frac{\tau}{6}$ ce volume pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que le mouvement de rotation d'un rayon vecteur mobile, assujetti à parcourir successivement les trois faces latérales du tétraèdre, de manière à passer de la position OP à la position $OP_{,}$, puis de la position $OP_{,}$ à la position $OP_{,,}$, pour revenir ensuite de celle-ci à la position OP, sera ou ne sera pas un mouvement de rotation de même nature que celui qu'on obtiendrait en substituant aux droites $OP_{,}$, $OP_{,,}$, $OP_{,,,}$ les demi-axes des x, y et z positives. Si d'ailleurs, pour plus de simplicité, on suppose les axes coordonnés rectangulaires entre eux, on trouvera

$$\left\{\begin{array}{llll} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & v^2 = (x_{,} - x_{,,})^2 + (y_{,} - y_{,,})^2 + (z_{,} - z_{,,})^2, \\ r_{,}^2 = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2, & v_{,}^2 = (x_{,,} - x)^2 + (y_{,,} - y)^2 + (z_{,,} - z)^2, \\ r_{,,}^2 = x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2, & v_{,,}^2 = (x - x_{,})^2 + (y - y_{,})^2 + (z - z_{,})^2, \end{array}\right.$$

et

$$\tau = x y_{,} z_{,,} - x y_{,,} z_{,} + x_{,} y_{,,} z - x_{,} y z_{,,} + x_{,,} y z_{,} - x_{,,} y_{,} z, \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\tau = S(\pm x y_{,} z_{,,}). \tag{3}$$

Donc, les axes étant supposés rectangulaires, les seconds membres des formules (1) et (2) seront des fonctions isotropes des coordonnées des trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$. C'est, au reste, ce qu'on peut aisément vérifier *à posteriori*, en transformant ces seconds membres, à l'aide des équations linéaires auxquelles on doit recourir pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre système de coordonnées rectangulaires.

Ajoutons que le carré de τ sera lié aux carrés de r, $r_{,}$, $r_{,,}$, v, $v_{,}$, $v_{,,}$ par une équation qu'il est facile d'obtenir.

Les quantités variables

$$r,\ r_{,},\ r_{,,};\qquad \nu,\ \nu_{,},\ \nu_{,,},\ \tau,$$

étant des fonctions isotropes des coordonnées des trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$, on pourra en dire encore autant d'une fonction quelconque de ces mêmes quantités. Ajoutons que, si l'on pose pour abréger

$$(4)\quad \begin{cases} \rho = r^2, & \varsigma = \dfrac{r_{,}^2 + r_{,,}^2 - \nu^2}{2} = r_{,} r_{,,} \cos(\widehat{r_{,}, r_{,,}}), \\ \rho_{,} = r_{,}^2, & \varsigma_{,} = \dfrac{r_{,,}^2 + r^2 - \nu_{,}^2}{2} = r_{,,} r \cos(\widehat{r_{,,}, r}), \\ \rho_{,,} = r_{,,}^2, & \varsigma_{,,} = \dfrac{r^2 + r_{,}^2 - \nu_{,,}^2}{2} = r r_{,} \cos(\widehat{r, r_{,}}), \end{cases}$$

toute fonction des six quantités r, $r_{,}$, $r_{,,}$; ν, $\nu_{,}$, $\nu_{,,}$ pourra être considérée comme une fonction des six quantités ρ, $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$; ς, $\varsigma_{,}$, $\varsigma_{,,}$, liées aux coordonnées x, y, z; $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, par les formules

$$(5)\quad \begin{cases} \rho = x^2 + y^2 + z^2, & \varsigma = x_{,} x_{,,} + y_{,} y_{,,} + z_{,} z_{,,}, \\ \rho_{,} = x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2, & \varsigma_{,} = x_{,,} x + y_{,,} y + z_{,,} z, \\ \rho_{,,} = x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2, & \varsigma_{,,} = x x_{,} + y y_{,} + z z_{,}; \end{cases}$$

et que la quantité variable τ sera liée aux six quantité ρ, $\rho_{,}$, $\rho_{,,}$; ς, $\varsigma_{,}$, $\varsigma_{,,}$, par la formule

$$(6)\qquad \tau^2 = \rho\rho_{,}\rho_{,,} - \rho\varsigma^2 - \rho_{,}\varsigma_{,}^2 - \rho_{,,}\varsigma_{,,}^2 + 2\varsigma\varsigma_{,}\varsigma_{,,}.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

Premier théorème. Pour obtenir une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x,\ y,\ z;\qquad x_{,},\ y_{,},\ z_{,};\qquad x_{,,},\ y_{,,},\ z_{,,},$$

de trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$, il suffit de prendre une fonction

quelconque des sept quantités

$$\rho,\ \rho_{,},\ \rho_{,,};\quad \varsigma,\ \varsigma_{,},\ \varsigma_{,,};\ \tau,$$

déterminées par les équations (5) et (2), et liées entre elles par la formule (6) qui permet d'éliminer de la fonction dont il s'agit l'une des trois quantités $\rho, \rho_{,}, \rho_{,,}$.

Il y a plus; la forme ici indiquée d'une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points est la plus générale possible, et l'on établira aisément la proposition suivante.

Deuxième théorème. Toute fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x,\ y,\ z;\quad x_{,},\ y_{,},\ z_{,};\quad x_{,,},\ y_{,,},\ z_{,,},$$

de trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$, peut être réduite à une fonction des sept quantités

$$\rho,\ \rho_{,},\ \rho_{,,};\quad \varsigma,\ \varsigma_{,},\ \varsigma_{,,};\quad \tau,$$

déterminées par les équations (5) et (2), ou, ce qui revient au même, à une fonction de $\varsigma, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}, \tau$, et de deux des trois quantités $\rho, \rho_{,}, \rho_{,,}$, liées à $\varsigma, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}, \tau$ par la formule (6).

Démonstration. En effet, soit

$$\omega = f(x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}, x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}) \tag{7}$$

une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires

$$x,\ y,\ z;\quad x_{,},\ y_{,},\ z_{,};\quad x_{,,},\ y_{,,},\ z_{,,}.$$

La valeur de ω demeurant invariable, tandis que l'on imprimera aux axes coordonnés un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine O, il sera permis de concevoir qu'à l'aide d'un tel mouvement on a fait coïncider le demi-axe des x positives avec la droite OP dirigée de O

vers P. Cette coïncidence étant admise, on aura

$$x = r = \rho^{\frac{1}{3}}, \qquad y = 0, \qquad z = 0. \tag{8}$$

Si d'ailleurs les points $P_{,}$, $P_{,,}$ sont situés sur la droite OP, indéfiniment prolongée dans les deux sens, $y_{,}$, $z_{,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, s'évanouiront ainsi que y, z; et comme alors les formules (5) donneront

$$\varsigma_{,} = x_{,,} x, \qquad \varsigma_{,,} = x x_{,},$$

on aura encore

$$\begin{cases} x_{,} = \dfrac{\varsigma_{,,}}{r} = \rho^{-\frac{1}{3}} \varsigma_{,,}, & y_{,} = 0, & z_{,} = 0, \\ x_{,,} = \dfrac{\varsigma_{,}}{r} = \rho^{-\frac{1}{3}} \varsigma_{,}, & y_{,,} = 0, & z_{,,} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Or, en vertu des formules (8) et (9), les coordonnées

$$x, y, z; \qquad x_{,}, y_{,}, z_{,}; \qquad x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$$

se réduiront à des fonctions des trois quantités

$$\rho, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}.$$

Donc, dans l'hypothèse adoptée, c'est-à-dire, lorsque les points $P_{,}$, $P_{,,}$ seront situés sur la droite OP, la fonction isotrope

$$\omega = f(x, y, z, \quad x_{,}, y_{,}, z_{,}, \quad x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$$

pourra être réduite elle-même à une fonction des seules quantités

$$\rho, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}.$$

Supposons maintenant que la condition énoncée ne soit pas remplie, en sorte que l'un des points $P_{,}$, $P_{,,}$, le premier, par exemple, se trouve situé hors de la droite OP. On pourra, dans ce cas, en faisant tourner, s'il est nécessaire, les axes coordonnés autour de l'origine O, faire coïncider non-

seulement le demi-axe des x positives avec la droite OP, mais encore le demi-axe des y positives avec la perpendiculaire élevée par le point O sur la droite OP, dans le plan $OPP_{,}$, et du même côté que le point $P_{,}$. Alors on aura non-seulement

$$y_{,} > 0, \qquad z_{,} = 0,$$

mais encore, en vertu des formules (5) et (2),

$$\varsigma_{,,} = xx_{,}, \qquad \rho_{,} = x_{,}^{2} + y_{,}^{2},$$

et

$$\varsigma_{,} = x_{,,}x, \qquad \varsigma = x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,}, \qquad \tau = xy_{,}z_{,,};$$

puis on en conclura

$$(10)\quad \begin{cases} x_{,} = \rho^{-\frac{1}{2}}\varsigma_{,,}, & y_{,} = (\rho_{,} - \rho^{-1}\varsigma_{,,}^{2})^{\frac{1}{2}}, & z_{,} = 0, \\ x_{,,} = \rho^{-\frac{1}{2}}\varsigma_{,}, & y_{,,} = \dfrac{\varsigma - \rho^{-1}\varsigma_{,}\varsigma_{,,}}{(\rho_{,} - \rho^{-1}\varsigma_{,,}^{2})^{\frac{1}{2}}}, & z_{,,} = \dfrac{\rho^{-\frac{1}{2}}\tau}{(\rho_{,} - \rho^{-1}\varsigma_{,,}^{2})^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Or, en vertu des formules (8), (10), les coordonnées

$$x, y, z; \qquad x_{,}, y_{,}, z_{,}; \qquad x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$$

se réduiront évidemment à des fonctions des six quantités :

$$\rho, \rho_{,}; \quad \varsigma, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}; \quad \tau$$

et l'on pourra en dire autant de la fonction

$$\omega = f(x, y, z, x_{,}, y_{,}, z_{,}, x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}).$$

Donc le deuxième théorème se trouvera encore vérifié, quand l'un des points $P_{,}$, $P_{,,}$ sera situé hors de la droite OP; donc, il se vérifiera dans tous les cas possibles.

Il est bon d'observer qu'en vertu des formules (4) $\varsigma, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}$ sont des fonctions entières de

$$r, r_{,}, r_{,,}; \qquad v, v_{,}, v_{,,}.$$

Donc toute fonction des quantités

$$\rho, \rho_{,}, \rho_{,,}; \qquad \varsigma, \varsigma_{,}, \varsigma_{,,}; \qquad \tau,$$

pourra être réduite à une fonction des quantités

$$r, r_{,}, r_{,,}; \quad \nu, \nu_{,}, \nu_{,,}; \quad \tau,$$

et le deuxième théorème entraînera la proposition suivante.

Troisième théorème. Toute fonction isotrope des coordonnées rectangulaires de trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$ peut être réduite à une fonction des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles, et de la quantité dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes. Ajoutons que le carré de ce volume sera lié aux carrés des six arêtes par une formule qui se déduira immédiatement des équations (4) et (6).

Ce n'est pas tout; si l'on rapporte les positions de trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$, d'abord à trois axes rectangulaires, puis à trois axes obliques partant de la même origine, une fonction des coordonnées rectangulaires des points dont il s'agit pourra être, à l'aide de formules connues, transformée en une fonction des coordonnées obliques. Or, si l'on suppose, comme il est permis de le faire, les deux systèmes d'axes liés invariablement l'un à l'autre, ils ne pourront tourner l'un sans l'autre autour de l'origine, et par suite une fonction isotrope des coordonnées obliques ne pourra être qu'une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires. Donc le troisième théorème entraînera encore la proposition suivante.

Quatrième théorème. Toute fonction isotrope des coordonnées rectilignes de trois points P, $P_{,}$, $P_{,,}$ peut être réduite à une fonction des distances de ces points à l'origine, de leurs distances mutuelles, et de la somme alternée dont la sixième partie représente, au signe près, le volume du tétraèdre dont ces distances sont les arêtes.

Jusqu'ici nous avons supposé que le nombre des points donnés se réduisait à trois. Mais les mêmes raisonnements pourraient être appliqués au cas où l'on considérerait une fonction isotrope des coordonnées rectangulaires ou obliques de divers points matériels, quel que fût le nombre de ces points, et l'on se trouverait alors conduit aux propositions suivantes.

Cinquième théorème. Toute fonction isotrope des coordonnés rectilignes de divers points peut être réduite à une fonction de leurs distances à l'origine, de leurs distances mutuelles, et des quantités dont l'une quelconque, divisée par 6, représente, au signe près, le volume d'un tétraèdre que l'on forme en prenant pour sommets l'origine et trois de ces mêmes points.

Sixième théorème. Étant donnés divers points P_1, P_2, P_3,... si, en nommant

$$x_n, \; y_n, \; z_n$$

les coordonnées rectangulaires du point P_n, on pose généralement

$$\rho_n = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2, \tag{11}$$

$$\varsigma_{m,n} = x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n, \tag{12}$$

$$\tau_{l,m,n} = x_l y_m z_n - x_l y_n z_m + x_m y_n z_l - x_m y_l z_n + x_n y_l z_m - x_n y_m z_l, \tag{13}$$

toute fonction isotrope des coordonnées des divers points pourra être réduite à une fonction des quantités de la forme

$$\rho_n, \; \varsigma_{m,n}, \; \tau_{l,m,n},$$

qui représentent les carrés des rayons vecteurs menés de l'origine aux points donnés, les produits que l'on forme en multipliant deux quelconques de ces rayons vecteurs par le cosinus de l'angle compris entre eux, ou, ce qui revient au même, en multipliant le premier de ces deux rayons par la

projection algébrique du second sur le premier, et enfin (aux signes près) les volumes des parallélipipèdes dont l'un quelconque a pour arêtes non parallèles les rayons vecteurs menés de l'origine à trois de ces mêmes points.

Ajoutons que, dans le cas particulier où tous les points donnés sont situés sur la droite OP_1, indéfiniment prolongée dans les deux sens, la fonction isotrope ω peut être réduite à une fonction de ρ_1 et des quantités de la forme $\varsigma_{1,n}$, ou, ce qui revient au même, à une fonction des distances qui séparent le point P_1 de l'origine O et des autres points P_2, P_3,....

Dans le cas contraire, si l'on nomme P_2 un des points situés en dehors de la droite OP_1, la fonction isotrope ω pourra être réduite à une fonction de ρ_1, ρ_2 et des quantités de la forme

$$\varsigma_{1,n}, \quad \varsigma_{2,n}, \quad \tau_{1,2,n},$$

ou, ce qui revient au même, à une fonction des distances OP_1, OP_2 qui séparent les points P_1, P_2 de l'origine, des projections algébriques que l'on obtient quand on projette sur OP_1 et sur OP_2 les rayons vecteurs de l'origine aux autres points, et des quantités équivalentes (aux signes près) aux volumes des tétraèdres qui ont pour sommets ces autres points et pour base le triangle OP_1P_2.

Pour vérifier, sur un exemple très-simple, l'exactitude des principes que nous venons d'établir, considérons un système de points matériels liés invariablement les uns aux autres, et à un point fixe O. Nommons m la masse de l'un quelconque des points matériels donnés, x, y, z ses coordonnées relatives à trois axes rectangulaires menés par le point O, et K le moment d'inertie du système par rapport à un certain axe OA, qui passe par le même point. On aura, en prenant l'axe OA pour axe de x

(14) $$K = Sm(y^2 + z^2),$$

la sommation qu'indique le signe S s'étendant à tous les points du système. Supposons maintenant que le moment d'inertie K offre une valeur indépendante de la direction de l'axe OA. Alors, la somme

$$Sm(y^2 + z^2)$$

devra être une fonction isotrope des coordonnées des divers points. En d'autres termes, cette fonction ne devra pas être altérée quand on fera tourner les axes des x, y, z d'une manière quelconque autour de l'origine. Donc, elle ne devra pas être altérée quand on fera coïncider l'axe OA, non plus avec l'axe des x, mais avec l'axe des y, ou avec l'axe des z; et, dans l'hypothèse admise, l'équation (14) entraînera les deux suivantes :

(15) $$K = Sm(z^2 + x^2),$$

(16) $$K = Sm(x^2 + y^2).$$

Par suite aussi, K sera équivalent à la moyenne arithmétique entre les sommes que renferment les équations (14), (15), (16), et l'on aura

(17) $$K = \frac{2}{3} Sm(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou, ce qui revient au même,

(18) $$K = \frac{2}{3} Smr^2,$$

r étant la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées. Or, en vertu de la formule (18), K se trouve réduit à une fonction des distances qui séparent les points matériels donnés de l'origine, ce qui s'accorde avec le 5e théorème.

Remarquons encore que les formules (14), (15), (16) entraînent toujours avec elles la formule (18). Donc, pour que

la fonction K soit isotrope, ou, en d'autres termes, pour que le moment d'inertie du système donné devienne indépendant de la direction de l'axe OA, il suffira que les moments d'inertie du système autour de trois axes rectangulaires soient égaux entre eux.

§ 2. *Sur les conditions analytiques auxquelles doit satisfaire une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points.*

Soient

$$x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ x_{11}, y_{11}, z_{11}, \ldots$$

les coordonnées de divers points P, P_1, P_{11},... mesurées parallèlement à trois axes rectangulaires ou obliques; et soit encore

$$(1) \qquad \omega = f(x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ x_{11}, y_{11}, z_{11}, \ldots)$$

une fonction déterminée des coordonnées dont il s'agit. Soient enfin

$$x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ x_{11}, y_{11}, z_{11};\ldots$$

les valeurs nouvelles qu'acquerront les coordonnées des points P, P_1, P_{11},... lorsqu'on aura déplacé les axes coordonnés en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine O. Les nouvelles coordonnées x, y, z se trouveront liées aux coordonnées primitives x, y, z par trois équations linéaires de la forme

$$(2) \quad x = \alpha x + \beta y + \gamma z,\ \ y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,\ \ z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

$\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';\ \alpha'', \beta'', \gamma''$, étant neuf coefficients qui ne changeront pas de valeurs quand on remplacera les coordonnées

du point P, par celles du point P_1, ou P_{11}, etc.; et ces neuf coefficients pourront être réduits à des fonctions déterminées de trois *angles polaires,* par exemple, de l'angle φ que formera le demi-axe des x positives avec le demi-axe des x positives, et des angles χ, ψ que formera le plan mené par ces deux demi-axes avec les plans des x, y et des x, y. Cela posé, si ω est une fonction isotrope des coordonnées rectilignes des points P, P_1, P_{11},... l'équation (1) entraînera la suivante :

$$\omega = f(x, y, z;\ x_1, y_1, z_1;\ x_{11}, y_{11}, z_{11},\ldots), \tag{3}$$

et, par suite, en supposant les valeurs de x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_{11}, y_{11}, z_{11}; etc., déterminées par les équations (2), on aura identiquement

$$f(x, y, z; x_1, y_1, z_1,\ldots) = f(x, y, z;\ x_1, y_1, z_1,\ldots). \tag{4}$$

En d'autres termes, on aura

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha x + \mathcal{E} y + \gamma z,\ \alpha' x + \mathcal{E}' y + \gamma' z,\ \alpha'' x + \mathcal{E}'' y + \gamma'' z,\ \alpha x_1 + \mathcal{E} y_1 + \gamma z_1,\ldots) \\ = f(x, y, z;\ x_1,\ldots), \end{array}\right\} \tag{5}$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux trois angles polaires φ, χ, ψ.

Si les points donnés se réduisent à un seul P, la formule (5) deviendra

$$f(\alpha x + \mathcal{E} y + \gamma z,\ \alpha' x + \mathcal{E}' y + \gamma' z,\ \alpha'' x + \mathcal{E}'' y + \gamma'' z) = f(x, y, z). \tag{6}$$

Pour mieux fixer les idées, considérons en particulier le cas où les axes coordonnés sont rectangulaires. Dans ce cas, les coefficients α, $\mathcal{E}$, γ, α', $\mathcal{E}'$, γ', α'', $\mathcal{E}''$, γ'', pourront être exprimés en fonction des angles polaires φ, χ, ψ par des équations de la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = \cos\varphi, & \mathcal{E} = \sin\varphi\cos\chi, & \gamma = \sin\varphi\sin\chi, \\ \alpha' = \sin\varphi\cos\psi, & \mathcal{E}' = -\sin\chi\sin\psi - \cos\varphi\cos\chi\cos\psi, & \gamma' = \cos\chi\sin\psi - \cos\varphi\sin\chi\cos\psi, \\ \alpha'' = \sin\varphi\sin\psi, & \mathcal{E}'' = \sin\chi\cos\psi - \cos\varphi\cos\chi\sin\psi, & \gamma'' = -\cos\chi\cos\psi - \cos\varphi\sin\chi\sin\psi. \end{cases}$$

Donc, la formule (6) ou (5) devra se transformer en une équation identique, lorsqu'en prenant pour $f(x, y, z)$, ou pour $f(x, y, z, x, y_1, z_1, \ldots)$ une fonction isotrope, on supposera les coefficients $\alpha, \mathcal{E}, \gamma, \alpha', \mathcal{E}', \gamma', \alpha'', \mathcal{E}'', \gamma''$ déterminés par les équations (7). Par conséquent, l'équation (6) deviendra identique, lorsqu'on réduira $f(x, y, z)$ à la fonction isotrope $x^2 + y^2 + z^2$. On aura donc identiquement, quels que soient d'ailleurs x, y, z,

$$(8)\quad (\alpha x + \mathcal{E} y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \mathcal{E}' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \mathcal{E}'' y + \gamma'' z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et, par suite,

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \mathcal{E}^2 + \mathcal{E}'^2 + \mathcal{E}''^2 = 1, & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \mathcal{E}\gamma + \mathcal{E}'\gamma' + \mathcal{E}''\gamma'' = 0, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, & \alpha\mathcal{E} + \alpha'\mathcal{E}' + \alpha''\mathcal{E}'' = 0. \end{cases}$$

Pareillement, l'équation (5) deviendra identique, lorsqu'on prendra pour $f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_{11}, y_{11}, z_{11})$ la fonction isotrope

$$S(\pm x y_1 z_{11}) = x y_1 z_{11} - x y_{11} z_1 + x_1 y_{11} z - x_1 y z_{11} + x_{11} y z_1 - x_{11} y_1 z.$$

On aura donc identiquement, quels que soient d'ailleurs $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_{11}, y_{11}, z_{11}$,

$$(10)\quad S[\pm(\alpha x + \mathcal{E} y + \gamma z)(\alpha' x_1 + \mathcal{E}' y_1 + \gamma' z_1)(\alpha'' x_1 + \mathcal{E}'' y_1 + \gamma'' z_1)] = S(\pm x y_1 z_{11}),$$

et par suite,

$$(11)\qquad S(\pm \alpha\mathcal{E}'\gamma'') = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(12)\quad \alpha\mathcal{E}'\gamma'' - \alpha\mathcal{E}''\gamma' + \alpha'\mathcal{E}''\gamma - \alpha'\mathcal{E}\gamma'' + \alpha''\mathcal{E}\gamma' - \alpha''\mathcal{E}'\gamma = 1.$$

Il est, au reste, facile de s'assurer que les valeurs de $\alpha, \mathcal{E}, \gamma$;

$\alpha', \mathcal{C}', \gamma'$; $\alpha'', \mathcal{C}', \gamma''$ fournies par les équations (7) satisfont effectivement aux conditions (9) et (12). Ajoutons que les trois dernières des formules (9), jointes à l'équation (12), donneront

$$(13)\quad \frac{\alpha}{\mathcal{C}'\gamma'' - \mathcal{C}''\gamma'} = \frac{\alpha'}{\mathcal{C}''\gamma - \mathcal{C}\gamma''} = \frac{\alpha''}{\mathcal{C}\gamma' - \mathcal{C}'\gamma} = \frac{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2}{1} = 1,$$

etc.,

ou, ce qui revient au même,

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha = \mathcal{C}'\gamma'' - \mathcal{C}''\gamma', & \mathcal{C} = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \gamma = \alpha'\mathcal{C}'' - \alpha''\mathcal{C}', \\ \alpha' = \mathcal{C}''\gamma - \mathcal{C}\gamma'', & \mathcal{C}' = \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \gamma' = \alpha''\mathcal{C} - \alpha\mathcal{C}'', \\ \alpha'' = \mathcal{C}\gamma' - \mathcal{C}'\gamma, & \mathcal{C}'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \gamma'' = \alpha\mathcal{C}' - \alpha'\mathcal{C}. \end{cases}$$

Il est bon d'observer que des formules (14), jointes à l'équation (12), on tirera immédiatement

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \mathcal{C}^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha'^2 + \mathcal{C}'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha''^2 + \mathcal{C}''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \mathcal{C}'\mathcal{C}'' + \gamma'\gamma'' = 0, & \alpha''\alpha + \mathcal{C}''\mathcal{C} + \gamma''\gamma = 0, & \alpha\alpha' + \mathcal{C}\mathcal{C}' + \gamma\gamma' = 0. \end{cases}$$

On pourra de ces diverses formules déduire les valeurs de six des coefficients $\alpha, \mathcal{C}, \gamma, \alpha', \mathcal{C}', \gamma', \alpha'', \mathcal{C}'', \gamma''$ exprimées en fonction des trois autres. Ainsi, par exemple, après avoir choisi arbitrairement les valeurs de $\alpha, \mathcal{C}, \alpha'$, on pourra déduire γ et α'' des deux équations

$$\alpha^2 + \mathcal{C}^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

auxquelles on satisfait en prenant

$$(16)\quad \gamma = \pm\sqrt{1 - \alpha^2 - \mathcal{C}^2}, \qquad \alpha'' = \pm\sqrt{1 - \alpha^2 - \alpha'^2},$$

puis $\mathcal{C}'$ et γ' des deux équations

$$\mathcal{C}\mathcal{C}' + \gamma\gamma' = -\alpha\alpha', \qquad \mathcal{C}\gamma' - \mathcal{C}'\gamma = \alpha'',$$

auxquelles on satisfait en prenant

$$(17)\quad \mathcal{C}' = -\frac{\alpha\alpha'\mathcal{C} + \alpha''\gamma}{1 - \alpha^2}, \qquad \gamma' = -\frac{\alpha\alpha'\gamma - \alpha''\mathcal{C}}{1 - \alpha^2},$$

puis enfin, $\mathcal{C}''$ et γ'' des formules

$$(18)\quad \mathcal{C}'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \qquad \gamma'' = \alpha\mathcal{C}' - \alpha'\mathcal{C}.$$

Cela posé, en admettant, comme ci-dessus, que la fonction $f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots)$ soit isotrope, l'équation (5) devra évi-

demment devenir identique, non-seulement quand on y substituera les valeurs de $\alpha, \mathcal{E}, \gamma, \alpha', \mathcal{E}', \gamma', \alpha'', \mathcal{E}'', \gamma''$ exprimées en fonction des angles polaires φ, χ, ψ à l'aide des formules (7), mais encore quand on y substituera les valeurs de

$$\gamma ; \mathcal{E}', \gamma' ; \alpha'', \mathcal{E}'', \gamma'',$$

exprimées en fonction de $\alpha, \mathcal{E}, \alpha'$, à l'aide des formules (16), (17) et (18), quels que soient d'ailleurs les signes adoptés dans les seconds membres des équations (16).

Réciproquement, la fonction $f(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots)$ sera isotrope, si, pour transformer la formule (5) en une équation identique, il suffit d'y substituer les valeurs de $\alpha, \mathcal{E}, \gamma, \alpha', \mathcal{E}', \gamma', \alpha'', \mathcal{E}'', \gamma''$ exprimées en fonction des angles polaires φ, χ, ψ à l'aide des formules (7), ou les valeurs de

$$\alpha', \mathcal{E}', \gamma' ; \alpha'', \mathcal{E}'', \gamma'',$$

exprimées en fonction de $\alpha, \mathcal{E}, \alpha'$ à l'aide des formules (16), (17), (18).

§ 3. *Formes spéciales de fonctions isotropes assujetties à certaines conditions.*

Les fonctions isotropes acquièrent des formes spéciales et dignes de remarque, lorsqu'on les assujettit à certaines conditions.

Ainsi, en particulier, il arrive souvent qu'une fonction isotrope des coordonnées rectilignes de divers points change de signe sans changer de valeur numérique, quand on change les signes des coordonnées parallèles à un seul axe. Alors cette fonction isotrope devient ce que nous appellerons une fonction *hémitrope*. Telles sont, par exemple,

les fonctions τ et $\tau_{l,m,n}$, déterminées, dans le § 1^er^, par les équations (2) et (13), c'est-à-dire les sommes alternées dont chacune, divisée par 6, représente, au signe près, le volume d'un tétraèdre que l'on construit en prenant pour sommets trois points quelconques et l'origine des coordonnées. Il résulte d'ailleurs de la définition précédente qu'une fonction hémitrope n'est point altérée, quand on change à la fois les signes des coordonnées parallèles à deux axes, et qu'elle change de signe sans changer de valeur numérique, quand on change les signes de toutes les coordonnées. Il est encore évident que le rapport de deux fonctions hémitropes sera une fonction isotrope, mais non hémitrope, qui conservera la même valeur et le même signe, quand on changera le signe des coordonnées parallèles à un même axe.

Imaginons maintenant qu'une fonction isotrope ω des coordonnées rectilignes de divers points doive être en même temps une fonction linéaire de quelques-unes d'entre elles. On déduira aisément des principes établis dans le premier paragraphe, la forme particulière que devra prendre cette fonction isotrope.

Concevons, pour fixer les idées, que les points donnés se réduisent à trois $P, P_{,}, P_{,,}$, et que ω doive être non-seulement une fonction isotrope de leurs coordonnées

$$x, y, z; \qquad x_{,}, y_{,}, z_{,}; \qquad x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$$

supposées rectangulaires, mais encore une fonction linéaire des coordonnées de chacun des points $P_{,}, P_{,,}$. Supposons d'ailleurs que ω soit assujetti à s'évanouir quand on fait coïncider l'un des points $P_{,}, P_{,,}$ avec l'origine. En vertu des principes établis dans le paragraphe 1^er^, ω devra être une

fonction des quantités

$$(1)\qquad \rho = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \rho_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \qquad \rho_{11} = x_{11}^2 + y_{11}^2 + z_{11}^2,$$

$$(2)\qquad \varsigma = x_1 x_{11} + y_1 y_{11} + z_1 z_{11}, \qquad \varsigma_1 = x_{11} x + y_{11} y + z_{11} z, \qquad \varsigma_{11} = x x_1 + y y_1 + z z_1,$$

$$(3)\qquad \tau = x y_1 z_{11} - x y_{11} z_1 + x_1 y_{11} z - x_1 y z_{11} + x_{11} y z_1 - x_{11} y_1 z.$$

Parmi ces quantités, trois seulement, savoir

$$\varsigma,\ \varsigma_{11},\ \tau$$

sont fonctions linéaires des coordonnées x_1, y_1, z_1, avec lesquelles elles s'évanouissent; trois aussi, savoir

$$\varsigma,\ \varsigma_1,\ \tau$$

sont fonctions linéaires des coordonnées x_{11}, y_{11}, z_{11} avec lesquelles elles s'évanouissent. Cela posé, pour que ω soit en même temps une fonction linéaire de x_1, y_1, z_1 assujettie à s'évanouir quand x_1, y_1, z_1 s'évanouissent, et une fonction linéaire de x_{11}, y_{11}, z_{11} assujettie à s'évanouir quand x_{11}, y_{11}, z_{11} s'évanouissent, il sera évidemment nécessaire que ω soit non-seulement une fonction linéaire de

$$\varsigma,\ \varsigma_{11},\ \tau,$$

dans laquelle les coefficients de $\varsigma, \varsigma_{11}, \tau$ restent indépendants de x_1, y_1, z_1, mais encore une fonction linéaire de

$$\varsigma,\ \varsigma_1,\ \tau,$$

dans laquelle les coefficients de $\varsigma, \varsigma_1, \tau$ restent indépendants de x_{11}, y_{11}, z_{11}. Donc, dans la fonction ω, ς et τ devront se trouver multipliés par des facteurs indépendants des coordonnées x_1, y_1, z_1; x_{11}, y_{11}, z_{11}; et de plus, la partie de ω indépendante de ς et τ devra être proportionnelle à chacune des quantités $\varsigma_1, \varsigma_{11}$, par conséquent au produit $\varsigma_1 \varsigma_{11}$, et se réduire à ce produit multiplié par un facteur indépendant de x_1, y_1, z_1; x_{11}, y_{11}, z_{11}. Donc, en définitive, ω devra être

déterminé par une équation de la forme

$$\omega = P\varsigma + Q\varsigma_{,}\varsigma_{,,} + R\tau, \tag{4}$$

P, Q, R étant indépendants de $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$. Mais parmi les quantités

$$\rho,\ \rho_{,},\ \rho_{,,};\ \varsigma,\ \varsigma_{,},\ \varsigma_{,,};\ \tau$$

dont ω doit être fonction, une seule, savoir ρ, est indépendante de $x_{,}, y_{,}, z_{,}$; $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$. Donc, dans la formule (4), les facteurs P, Q, R doivent se réduire à des fonctions de ρ; et l'on doit avoir

$$\omega = \varsigma\varphi(\rho) + \varsigma_{,}\varsigma_{,,}\chi(\rho) + \tau\psi(\rho), \tag{5}$$

$\varphi(\rho)$, $\chi(\rho)$, $\psi(\rho)$ étant des fonctions de la seule quantité ρ, ou, ce qui revient au même,

$$\omega = \varsigma\varphi(r^2) + \varsigma_{,}\varsigma_{,,}\chi(r^2) + \tau\psi(r^2). \tag{6}$$

En d'autres termes, dans l'hypothèse admise, la fonction ω sera de la forme

$$\begin{aligned}\omega = {} & (x_{,}x_{,,}+y_{,}y_{,,}+z_{,}z_{,,})\varphi(r^2) \\ & + (xx_{,}+yy_{,}+zz_{,})(xx_{,,}+yy_{,,}+zz_{,,})\chi(r^2) \\ & + (xy_{,}z_{,,}-xy_{,,}z_{,}+x_{,}y_{,,}z-x_{,}yz_{,,}+x_{,,}yz_{,}-x_{,,}y_{,}z)\psi(r^2).\end{aligned} \tag{7}$$

§ 4. *Sur les fonctions isotropes et symboliques des coordonnées rectilignes de divers points.*

Nous appellerons *fonction symbolique* de diverses variables une fonction qui renfermera, non-seulement ces variables, mais encore des *lettres symboliques* indiquant des dérivées prises par rapport à quelques-unes de ces variables.

Une fonction symbolique qui dépendra uniquement des coordonnées rectilignes de divers points sera *isotrope*, si on

n'altère pas sa valeur en imprimant aux axes coordonnés un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on nomme

x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point mobile P,

ξ, η, ζ, les coordonnées rectangulaires d'un autre point mobile Q, dont la position dépende de celle du premier, et

a, b, c, les coordonnées rectangulaires d'un point fixe R, arbitrairement choisi.

Soit de plus :

$$\omega = f(a, b, c, D_x, D_y, D_z, \xi, \eta, \zeta) \tag{1}$$

une fonction symbolique des coordonnées $a, b, c, \xi, \eta, \zeta$, et des lettres caractéristiques D_x, D_y, D_z; c'est-à-dire une fonction des coordonnées a, b, c, des coordonnées ξ, η, ζ, et des dérivées des divers ordres de ξ, η, ζ différentiés par rapport à x, y, z. Soient enfin :

$$a, b, c; x, y, z; \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta},$$

et

$$\bar{\omega} = f(a, b, c, D_x, D_y, D_z, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \tag{2}$$

ce que deviendront les coordonnées

$$a, b, c; x, y, z; \xi, \eta, \zeta$$

des points R, P, Q, et la fonction ω, si l'on déplace les axes coordonnés en leur imprimant un mouvement de rotation quelconque autour de l'origine. La fonction symbolique ω sera isotrope, si elle n'est pas altérée par le déplacement des axes, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$\bar{\omega} = \omega; \tag{3}$$

et réciproquement si la fonction ω est isotrope, l'équation (3)

devra être une équation identique. D'ailleurs les coordonnées nouvelles des points P, Q, R seront liées à leurs coordonnées primitives par des équations semblables aux formules (2) du § 2, en sorte qu'on aura

$$(4)\quad \mathrm{x} = \alpha x + \mathcal{6} y + \gamma z,\ \mathrm{y} = \alpha' x + \mathcal{6}' y + \gamma' z,\ \mathrm{z} = \alpha'' x + \mathcal{6}'' y + \gamma'' z,$$
$$(5)\quad \xi = \alpha\xi + \mathcal{6}\eta + \gamma\zeta,\ \eta = \alpha'\xi + \mathcal{6}'\eta + \gamma'\zeta,\ \zeta = \alpha''\xi + \mathcal{6}''\eta + \gamma''\zeta,$$
$$(6)\quad \mathrm{a} = \alpha a + \mathcal{6} b + \gamma c,\ \mathrm{b} = \alpha' a + \mathcal{6}' b + \gamma' c,\ \mathrm{c} = \alpha'' a + \mathcal{6}'' b + \gamma'' c,$$

les coefficients $\alpha, \mathcal{6}, \gamma, \alpha', \mathcal{6}', \gamma', \alpha'', \mathcal{6}'', \gamma''$ pouvant être réduits à trois, ou exprimés en fonction de trois angles polaires φ, χ, ψ en vertu des formules (7) du paragraphe 2; et c'est, eu égard à ces dernières formules et à la réduction dont il s'agit que l'équation (3) devra être identique. En d'autres termes, si la fonction ω est isotrope, l'équation (3) devra subsister, quelles que soient les valeurs attribuées aux trois angles polaires φ, χ, ψ.

Supposons maintenant que les coordonnées ξ, η, ζ du point Q soient liées aux coordonnées x, y, z du point P par des équations de la forme

$$(7)\quad \xi = Ae^{ux+vy+wz},\ \eta = Be^{ux+vy+wz},\ \zeta = Ce^{ux+vy+wz},$$

u, v, w, et A, B, C, étant les coordonnées rectangulaires de deux points fixes S, T. Si l'on pose, pour abréger,

$$(8)\qquad \varkappa = e^{ux+vy+wz},$$

on aura, non-seulement

$$(9)\qquad \mathrm{D}_x\varkappa = u\varkappa,\ \mathrm{D}_y\varkappa = v\varkappa,\ \mathrm{D}_z\varkappa = w\varkappa,$$

mais encore

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_x\xi = u\xi, & \mathrm{D}_y\xi = v\xi, & \mathrm{D}_z\xi = w\xi, \\ \mathrm{D}_x\eta = u\eta, & \mathrm{D}_y\eta = v\eta, & \mathrm{D}_z\eta = w\eta, \\ \mathrm{D}_x\zeta = u\zeta, & \mathrm{D}_y\zeta = v\zeta, & \mathrm{D}_z\zeta = w\zeta; \end{cases}$$

et par suite, dans la valeur de ω déterminée par la formule (1), on pourra substituer aux lettres caractéristiques D_x, D_y, D_z, les quantités u, v, w. En conséquence, on aura, dans l'hypothèse admise,

$$\omega = f(a, b, c, u, v, w, \xi, \eta, \zeta), \tag{11}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\omega = f(a, b, c, u, v, w, A_\varkappa, B_\varkappa, C_\varkappa). \tag{12}$$

D'autre part, si la fonction ω est isotrope, l'équation (3) sera identique, et ne cessera pas de l'être quand on attribuera aux coordonnées ξ, η, ζ du point Q les valeurs particulières que fournissent les équations (7). Mais alors $\bar{\omega}$ sera précisément ce que devient la valeur de ω déterminée par l'équation (12) quand on substitue aux coordonnées primitives

$$a, b, c; u, v, w; A, B, C; x, y, z$$

des trois points fixes R, S, T, et du point mobile P, les coordonnées

$$\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}; \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}; \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$$

de ces mêmes points, mesurées parallèlement aux directions nouvelles que prennent les axes des x, y, z, en vertu de leurs déplacements. En effet, les nouvelles coordonnées étant liées aux coordonnées primitives par les formules

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{a} = \alpha a + \xi b + \gamma c, & \mathrm{b} = \alpha' a + \xi' b + \gamma' c, & \mathrm{c} = \alpha'' a + \xi'' b + \gamma'' c, \\ \mathrm{u} = \alpha u + \xi v + \gamma w, & \mathrm{v} = \alpha' u + \xi' v + \gamma' w, & \mathrm{w} = \alpha'' u + \xi'' v + \gamma'' w, \\ \mathrm{A} = \alpha A + \xi B + \gamma C, & \mathrm{B} = \alpha' A + \xi' B + \gamma' C, & \mathrm{C} = \alpha'' A + \xi'' B + \gamma'' C, \end{array}\right\} \tag{13}$$

et la fonction $ux + vy + wz$ étant isotrope, on aura, non-seulement

$$ux + vy + wz = \mathrm{ux} + \mathrm{vy} + \mathrm{wz}, \tag{14}$$

et par suite

$$(15) \qquad \varkappa = e^{ux+vy+wz},$$

mais encore

$$(16) \qquad \bar{\xi} = Ae^{ux+vy+wz}, \quad \bar{\eta} = Be^{ux+vy+wz}, \quad \bar{\zeta} = Ce^{ux+vy+wz}.$$

En conséquence, la fonction $\bar{\omega}$, déterminée par l'équation (2), pourra être réduite à la forme

$$(17) \qquad \bar{\omega} = f(a, b, c; u, v, w; A\varkappa, B\varkappa, C\varkappa).$$

Or, pour obtenir le second membre de l'équation (17), il suffira évidemment de remplacer dans le second membre de l'équation (12) les coordonnées primitives des points fixes R, S, T par leurs coordonnées nouvelles, sans altérer la valeur de $\varkappa$, qui reste d'ailleurs invariable, tandis qu'aux coordonnées primitives du point fixe R et du point mobile P on substitue leurs coordonnées nouvelles. Donc, si la quantité ω, déterminée par l'équation (1), est une fonction symbolique et isotrope des coordonnées du point fixe R et des points mobiles P, Q, la valeur particulière de ω, déterminée par la formule (12), sera elle-même une fonction isotrope des coordonnées du point mobile P et des points fixes R, S, T.

Concevons maintenant que la quantité ω, déterminée par l'équation (1), soit une fonction linéaire et homogène, non-seulement des coordonnées a, b, c du point fixe R, mais encore des coordonnées ξ, η, ζ du point mobile P, et de leurs dérivées des divers ordres, prises par rapport aux variables x, y, z; l'équation (12) donnera

$$(18) \qquad \omega = \Omega\varkappa,$$

la valeur de Ω étant

$$(19) \qquad \Omega = f(a, b, c; u, v, w; A, B, C);$$

et l'équation (17) donnera pareillement

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega}\varkappa, \tag{20}$$

la valeur de $\bar{\Omega}$ étant

$$\bar{\Omega} = f(a, b, c ; u, v, w ; A, B, C). \tag{21}$$

Cela posé, la condition (3) entraînera évidemment la suivante

$$\bar{\Omega} = \Omega. \tag{22}$$

D'ailleurs $\bar{\Omega}$ sera précisément ce que devient Ω quand, aux coordonnées primitives des points fixes R, S, T, on substitue leurs coordonnées nouvelles. Donc, dans l'hypothèse admise, l'isotropie de la fonction symbolique ω entraînera l'isotropie de la fonction Ω, qui sera une fonction linéaire et homogène, non-seulement des coordonnées a, b, c du point R, mais encore des coordonnées A, B, C du point fixe T. Si, d'ailleurs, l'isotropie doit subsister, quelles que soient les positions attribuées aux points fixes et aux points mobiles, alors, en vertu de la formule (7) du paragraphe 3, Ω devra être de la forme qu'indique l'équation

$$\begin{aligned}\Omega = {} & (aA + bB + cC)\varphi(k^2) \\ & + (au + bv + cw)(uA + vB + wC)\chi(k^2) \\ & + [a(wB - vC) + b(uC - wA) + c(vA - uB)]\psi(k^2),\end{aligned} \tag{23}$$

la valeur de k^2 étant

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2. \tag{24}$$

Donc, puisque, pour déduire ω de Ω, il suffit de remplacer

$$u, v, w \text{ par } D_x, D_y, D_z,$$

et

$$A, B, C \text{ par } \xi, \eta, \zeta,$$

la fonction symbolique ω devra, dans l'hypothèse admise, être de la forme indiquée par l'équation

$$\begin{aligned}(25)\quad \omega = {} & \mathrm{E}(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ & + \mathrm{F}(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)(\mathrm{D}_x\xi + \mathrm{D}_y\eta + \mathrm{D}_z\zeta) \\ & + \mathrm{K}[a(\mathrm{D}_z\eta - \mathrm{D}_y\zeta) + b(\mathrm{D}_x\zeta - \mathrm{D}_z\xi) + c(\mathrm{D}_y\xi - \mathrm{D}_x\eta)],\end{aligned}$$

E, F, K désignant trois fonctions entières du trinôme

$$\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2.$$

Il est, au reste, facile de s'assurer *à posteriori* que la valeur de Ω, déterminée par l'équation (25), est toujours une fonction isotrope des coordonnées

$$a, b, c; x, y, z; \xi, \eta, \zeta$$

du point fixe R et des points mobiles P, Q. En effet, des équations (4) jointes aux formules (9) du paragraphe 2, on tire

$$(26)\quad x = \alpha\mathrm{x} + \alpha'\mathrm{y} + \alpha''\mathrm{z}, \quad y = 6\mathrm{x} + 6'\mathrm{y} + 6''\mathrm{z}, \quad z = \gamma\mathrm{x} + \gamma'\mathrm{y} + \gamma''z,$$

par conséquent

$$(27)\quad \mathrm{D}_x = \alpha\mathrm{D}_x + 6\mathrm{D}_y + \gamma\mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_y = \alpha'\mathrm{D}_x + 6'\mathrm{D}_y + \gamma'\mathrm{D}_z, \quad \mathrm{D}_z = \alpha''\mathrm{D}_x + 6''\mathrm{D}_y + \gamma''\mathrm{D}_z.$$

D'ailleurs, des formules (27), jointes aux équations (5), (6) et aux formules (12) et (15) du § 2, on tirera non-seulement

$$(28)\quad \mathrm{a}\bar{\xi} + \mathrm{b}\bar{\eta} + \mathrm{c}\bar{\zeta} = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

$$(29)\quad \mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2 = \mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2,$$

mais encore

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\mathrm{D}_x + \mathrm{b}\mathrm{D}_y + \mathrm{c}\mathrm{D}_z &= a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z \\ \mathrm{D}_x\bar{\xi} + \mathrm{D}_y\bar{\eta} + \mathrm{D}_z\bar{\zeta} &= \mathrm{D}_x\xi + \mathrm{D}_y\eta + \mathrm{D}_z\zeta,\end{aligned}$$

par conséquent

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l}(\mathrm{aD}_x+\mathrm{bD}_y+\mathrm{cD}_z)(\mathrm{D}_x\bar{\xi}+\mathrm{D}_y\bar{\eta}+\mathrm{D}_z\bar{\zeta})\\ =(a\mathrm{D}_x+b\mathrm{D}_y+c\mathrm{D}_z)(\mathrm{D}_x\xi+\mathrm{D}_y\eta+\mathrm{D}_z\zeta)\end{array}\right.$$

et

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{aD}_z\bar{\eta}-\mathrm{aD}_y\bar{\zeta}+\mathrm{bD}_x\bar{\zeta}-\mathrm{bD}_z\bar{\eta}+\mathrm{cD}_y\bar{\xi}-\mathrm{cD}_x\bar{\eta}\\ =a\mathrm{D}_z\eta-a\mathrm{D}_y\zeta+b\mathrm{D}_x\zeta-b\mathrm{D}_z\xi+c\mathrm{D}_y\xi-c\mathrm{D}_x\eta.\end{array}\right.$$

Donc, les fonctions

$$a\zeta+b\eta+c\xi,$$
$$(a\mathrm{D}_x+b\mathrm{D}_y+c\mathrm{D}_z)(\mathrm{D}_x\xi+\mathrm{D}_y\eta+\mathrm{D}_z\zeta),$$
$$a\mathrm{D}_z\eta-a\mathrm{D}_y\zeta+b\mathrm{D}_x\zeta-b\mathrm{D}_z\xi+c\mathrm{D}_y\xi-c\mathrm{D}_x\eta,$$

et la fonction symbolique

$$\mathrm{D}_x^2+\mathrm{D}_y^2+\mathrm{D}_z^2$$

sont toutes isotropes, et l'on pourra en dire autant de la valeur de ω fournie par l'équation (25), dans laquelle E, F, Ω désignent, comme on l'a dit, trois fonctions entières de la somme $\mathrm{D}_x^2+\mathrm{D}_y^2+\mathrm{D}_z^2$, ces trois dernières fonctions pouvant d'ailleurs être composées ou d'un nombre fini ou d'un nombre infini de termes.

Nous remarquerons, en finissant, qu'il n'est pas absolument nécessaire de supposer, dans les formules (1), (2) et (25), les coordonnées ξ, η, ζ et $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ comptées à partir de la même origine que toutes les autres. On pourrait, sans inconvénient, supposer que, dans les formules dont il s'agit, ξ, η, ζ représentent ou des coordonnées mesurées à partir d'une origine distincte de celle à laquelle se rapportent les coordonnées des points R et P, ou même des déplacements quelconques subis par le point mobile P au bout d'un temps plus ou moins considérable.

§ 5. *Sur les mouvements vibratoires et infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes isotropes de points matériels.*

Considérons les mouvements vibratoires et infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes de points matériels. Ces mouvements seront généralement représentés par des équations aux différences mêlées, qui renfermeront avec les dérivées des inconnues différentiées deux fois par rapport au temps, leurs différences finies, prises par rapport aux coordonnées ; et il suffira de développer ces différences en séries pour transformer les équations d'abord obtenues en équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, les coefficients des dérivées prises par rapport aux coordonnées seront quelquefois constants, plus souvent périodiques, et dans ce dernier cas, l'intégration des équations linéaires trouvées pourra être ramenée à l'intégration d'autres équations qui seront encore linéaires, mais à coefficients constants, savoir, de celles que nous avons nommées équations *auxiliaires*, et qui peuvent être censées déterminer les valeurs moyennes des inconnues.

Dans tous les cas, les équations trouvées, ou les équations auxiliaires seront dites *isotropes*, si on ne les altère pas en faisant subir aux axes coordonnés un déplacement qui résulte d'un mouvement de rotation imprimé à ces axes autour de l'origine. Les systèmes de points matériels dont les mouvements vibratoires se trouveront représentés par des équations isotropes, seront appelés eux-mêmes *systèmes isotropes*.

Il résulte de cette définition, que les systèmes isotropes sont ceux où les mouvements vibratoires se propagent en tous sens suivant les mêmes lois. Lorsque les vibrations propagées seront celles de l'éther, ou, en d'autres termes, du fluide lumineux, le mot isotrope sera remplacé par le mot *isophane*. En conséquence, un corps isophane sera celui qui aura la propriété de propager de la même manière en tous sens les vibrations lumineuses.

Les principes établis dans les paragraphes précédents s'appliquent naturellement à la recherche des formes que prennent les équations des mouvements infiniment petits d'un ou de plusieurs systèmes de points matériels, quand ces équations deviennent isotropes.

Considérons, pour fixer les idées, un système homogène de points matériels dans lequel se propage un mouvement vibratoire infiniment petit. Supposons d'ailleurs ce système renfermé dans une certaine portion de l'espace, ou à l'état d'isolement, ou avec un second système pareillement homogène, mais dont les molécules subissent des déplacements beaucoup plus petits que l'on puisse négliger sans erreur sensible. Soient

$\mathfrak{m}$ la masse d'un atome appartenant au premier système

x, y, z, les coordonnées initiales de cet atome, relatives à trois axes rectangulaires,

$x + \xi, y + \eta, z + \zeta$, les coordonnées du même atome, au bout du temps t. Enfin, supposons que les atomes des deux systèmes soient uniquement sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Les déplacements ξ, η, ζ d'un atome du premier système, mesurés au bout du temps t,

parallèlement aux axes coordonnés, seront déterminés par trois équations de la forme

$$(1) \qquad D_t^2\xi = \mathfrak{X}, \quad D_t^2\eta = \mathfrak{Y}, \quad D_t^2\zeta = \mathfrak{Z},$$

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, étant des fonctions linéaires homogènes des inconnues ξ, η, ζ, et des dérivées de divers ordres de ξ, η, ζ, différentiés par rapport à x, y, z. Ajoutons que, si le premier système est à l'état d'isolement, les coefficients des inconnues et de leurs dérivées pourront se réduire à des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes de x, y, z; et que, dans le cas contraire, pour obtenir des valeurs très-approchées des inconnues, il suffira souvent d'intégrer, à la place des équations (1), d'autres équations linéaires qui seront de même forme, et à coefficients constants.

Cela posé, concevons que les quantités $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, se réduisent effectivement à des fonctions linéaires de ξ, η, ζ, qui soient en même temps des fonctions symboliques entières de D_x, D_y, D_z, les divers coefficients étant des quantités constantes, c'est-à-dire indépendantes de x, y, z. Pour déterminer les formes particulières que pourront prendre les fonctions $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, quand les équations (1) deviendront isotropes, on devra commencer par substituer aux trois formules (1) une équation unique, qui détermine, non plus les dérivées secondes

$$D_t^2\xi, \quad D_t^2\eta, \quad D_t^2\zeta$$

des déplacements ξ, η, ζ, de l'atome $\mathfrak{m}$, mesurés parallèlement aux axes des x, y, z, mais la dérivée seconde

$$D_t^2\delta$$

d'un déplacement δ, mesuré parallèlement à une direction quelconque. En supposant que cette direction soit celle d'un rayon vecteur, équivalant à l'unité de longueur, et mené de

l'origine à un point fixe R, dont les coordonnées soient a, b, c, on aura

$$\mathcal{S} = a\xi + b\eta + c\zeta; \tag{2}$$

et de cette dernière formule jointe aux équations (1), on tirera

$$D_t^2 \mathcal{S} = a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}. \tag{3}$$

D'ailleurs, si les équations (1) sont isotropes, l'équation (3) devra rester inaltérable, quand on déplacera les axes coordonnés, à l'aide d'un mouvement de rotation quelconque imprimé à ces axes autour de l'origine; et cette condition devra être remplie, quelle que soit la position attribuée au point fixe R. Donc alors le second membre de la formule (3) devra être une fonction symbolique isotrope des coordonnées a, b, c, des déplacements ξ, η, ζ, et des lettres caractéristiques D_x, D_y, D_z. Mais d'autre part le second membre de la formule (3) sera en même temps une fonction linéaire homogène des coordonnées a, b, c, et une fonction linéaire homogène de ξ, η, ζ. Donc, ce second membre devra être de la forme de la fonction représentée par ω dans l'équation (25) du § 4, en sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z} = {} & E(a\xi + b\eta + c\zeta) \\ & + F(aD_x + bD_y + cD_z)(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) \\ & + K[a(D_z\eta - D_y\zeta) + b(D_x\zeta - D_z\xi) + c(D_y\xi - D_x\eta)], \end{aligned} \tag{4}$$

E, F, K, désignant trois fonctions entières du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Enfin, la formule (4) devant subsister quelle que soit la position attribuée au point fixe R situé à l'unité de distance de l'origine, on pourra, dans cette formule, réduire l'une quelconque des trois coordonnées de ce point R à l'unité, les deux autres à zéro. On pourra donc égaler séparément entre

eux, dans les deux membres de la formule (4), les coefficients des trois coordonnées a, b, c. En opérant ainsi, et en posant pour abréger

$$\upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta, \tag{5}$$

on obtiendra immédiatement les trois formules

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= E\xi + FD_x\upsilon + K(D_z\eta - D_y\zeta),\\ \mathfrak{Y} &= E\eta + FD_y\upsilon + K(D_x\zeta - D_z\xi),\\ \mathfrak{Z} &= E\zeta + FD_z\upsilon + K(D_y\xi - D_x\eta). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

en vertu desquelles les équations (1) seront réduites aux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} D_t^2\xi &= E\xi + FD_x\upsilon + K(D_z\eta - D_y\zeta),\\ D_t^2\eta &= E\eta + FD_y\upsilon + K(D_x\zeta - D_z\xi),\\ D_t^2\zeta &= E\zeta + FD_z\upsilon + K(D_y\xi - D_x\eta), \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Telle est la forme à laquelle se réduiront les équations (1), quand elles seront isotropes, si d'ailleurs les fonctions de

$$\xi, \eta, \zeta \quad \text{et de} \quad D_x, D_y, D_z,$$

représentées par

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$$

sont non-seulement linéaires par rapport aux déplacements ξ, η, ζ et à leurs dérivées des divers ordres, mais aussi homogènes et à coefficients constants.

On ne doit pas oublier que, dans les formules (7), les coefficients symboliques

$$E, F, K$$

représentent des fonctions entières du trinôme

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

Ajoutons que la variable υ, déterminée par l'équation (5), est

précisément la dilatation de volume du système des points matériels donnés autour du point (x, y, z).

§ 6. *Sur les coefficients symboliques renfermés dans les équations linéaires et isotropes qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système unique et homogène de points matériels.*

Lorsque les systèmes de molécules donnés se réduisent à un système unique de points matériels, uniquement soumis à des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, alors, comme on l'a vu dans le Mémoire précédent, les équations (1) du paragraphe 5 peuvent être présentées sous une forme digne de remarque ; et, en posant pour abréger

$$u = D_x, \quad v = D_y, \quad w = D_z,$$

on réduit ces équations aux suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} D_t^2\xi = G\xi + D_u(D_uH\xi + D_vH\eta + D_wH\zeta), \\ D_t^2\eta = G\eta + D_v(D_uH\xi + D_vH\eta + D_wH\zeta), \\ D_t^2\zeta = G\zeta + D_w(D_uH\xi + D_vH\eta + D_wH\zeta), \end{cases}$$

G, H étant des fonctions entières de u, v, w.

Si d'ailleurs on nomme :

$\mathfrak{m}$ la masse du point matériel ou de l'atome qui, dans l'état d'équilibre, avait pour coordonnées rectangulaires x, y, z,

m la masse d'un second atome,

r la distance qui séparait, dans l'état d'équilibre, l'atome m de l'atome $\mathfrak{m}$,

x, y, z les projections algébriques de la distance r sur les axes coordonnés,

$\mathfrak{m}m\mathrm{r}f(\mathrm{r})$ l'action exercée sur l'atome $\mathfrak{m}$ par l'atome m, placé à la distance r, la fonction $f(\mathrm{r})$ étant positive ou négative, suivant que l'atome $\mathfrak{m}$ est attiré ou repoussé,

alors, en posant, pour abréger,

$$\iota = \mathrm{x}\mathrm{D}_x + \mathrm{y}\mathrm{D}_y + \mathrm{z}\mathrm{D}_z = \mathrm{x}u + \mathrm{y}v + \mathrm{z}w, \tag{2}$$

on aura

$$\mathrm{G} = \mathrm{S}mf(\mathrm{r})(e^{\iota} - 1), \tag{3}$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{S}\frac{m}{\mathrm{r}}\mathrm{D}_{\mathrm{r}}f(\mathrm{r})\left(e^{\iota} - \frac{\iota^2}{2}\right), \tag{4}$$

la sommation qu'indique chaque signe S, s'étendant à tous les atomes m distincts de l'atome $\mathfrak{m}$. Ajoutons que l'on pourra, sans inconvénient, dans le second membre de la formule (4), remplacer le rapport $\frac{\iota^2}{2}$ par le trinôme

$$1 + \iota + \frac{\iota^2}{2},$$

c'est-à-dire par la somme des trois premiers termes du développement de e^{ι}, et supposer en conséquence la valeur de H déterminée, non plus par l'équation (4), mais par la formule

$$\mathrm{H} = \mathrm{S}\frac{m}{\mathrm{r}}\mathrm{D}_{\mathrm{r}}f(\mathrm{r})\left(e^{\iota} - 1 - \iota - \frac{\iota^2}{2}\right). \tag{5}$$

En effet,

$$\iota = \mathrm{x}u + \mathrm{y}v + \mathrm{z}w$$

étant une fonction linéaire de u, v, w, les valeurs de

$$\mathrm{D}_u^2\mathrm{H},\ \mathrm{D}_v^2\mathrm{H},\ \mathrm{D}_w^2\mathrm{H},\ \mathrm{D}_v\mathrm{D}_w\mathrm{H},\ \mathrm{D}_w\mathrm{D}_u\mathrm{H},\ \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v\mathrm{H},$$

tirées des formules (4) et (5) seront les mêmes, et par conséquent on n'altérera pas les équations (1) en substituant la formule (5) à la formule (4).

Supposons maintenant que le système de molécules donné soit homogène. Alors, dans les seconds membres des formules (4) et (5), développés suivant les puissances ascendantes et entières des lettres caractéristiques u, v, w, les coefficients que renfermeront les divers termes pourront devenir indépendants des coordonnées x, y, z, et se réduire ainsi à des quantités constantes. C'est ce qui arrivera en particulier si les divers atomes ou points matériels, étant doués de masses égales, coïncident avec les *nœuds* d'un *système réticulaire*, c'est-à-dire avec les points d'intersection de trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes. D'ailleurs lorsque, dans les développements de G et de H, les coefficients des divers termes se réduiront à des constantes, les seconds membres des formules (1), c'est-à-dire, les valeurs des quantités représentées par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ dans les équations (1) du paragraphe précédent, se réduiront à des fonctions linéaires de ξ, η, ζ qui seront en même temps fonctions explicites, non pas des coordonnées x, y, z, mais seulement des lettres symboliques D_x, D_y, D_z.

D'autre part, lorsque, dans les équations (1) du paragraphe 5, les seconds membres $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ se réduisent à des fonctions linéaires de ξ, η, ζ qui sont en même temps fonctions symboliques de D_x, D_y, D_z, ces équations ne peuvent, quand les coefficients demeurent constants, devenir isotropes sans coïncider avec les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} D_t^2\xi = E\xi + FD_x\upsilon + K(D_z\eta - D_y\zeta), \\ D_t^2\eta = E\eta + FD_y\upsilon + K(D_x\zeta - D_z\xi), \\ D_t^2\zeta = E\zeta + FD_z\upsilon + K(D_y\xi - D_x\eta), \end{cases}$$

la valeur de υ étant

$$(7)\qquad \upsilon = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta,$$

et les expressions symboliques

$$\mathrm{E},\ \mathrm{F},\ \mathrm{K}$$

étant des fonctions entières du trinôme

$$\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2.$$

Enfin, si dans les formules (6), (7) on remplace les lettres symboliques D_x, D_y, D_z par les lettres u, v, w, et si, d'ailleurs, on pose pour abréger

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}, \tag{8}$$

on trouvera non-seulement

$$\upsilon = u\xi + v\eta + w\zeta, \tag{9}$$

mais encore

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_t^2\xi &= \mathrm{E}\xi + \mathrm{F}u(u\xi + v\eta + w\zeta) + \mathrm{K}(w\eta - v\zeta), \\ \mathrm{D}_t^2\eta &= \mathrm{E}\eta + \mathrm{F}v(u\xi + v\eta + w\zeta) + \mathrm{K}(u\zeta - w\xi), \\ \mathrm{D}_t^2\zeta &= \mathrm{E}\zeta + \mathrm{F}w(u\xi + v\eta + w\zeta) + \mathrm{K}(v\xi - u\eta), \end{aligned}\right. \tag{10}$$

E, F, K étant trois fonctions entières de h. Donc, lorsque les équations (1) seront isotropes, mais à coefficients constants, elles se confondront avec les équations (10), en sorte que les seconds membres des unes et des autres devront être identiquement égaux. Donc alors, les fonctions de u, v, w, qui représenteront les coefficients symboliques des déplacements ξ, η, ζ, dans les seconds membres des équations (1), devront se confondre avec les coefficients symboliques de ces mêmes déplacements dans les seconds membres des équations (10); et, puisque le coefficient symbolique de ξ dans la seconde des équations (1) ne diffère pas du coefficient symbolique de η dans la première, les coefficients de ξ dans la seconde des équations (10) et de η dans la première devront encore être

égaux entre eux. En d'autres termes, il faudra que l'on ait, dans les équations (10),

$$K = -K,$$

par conséquent

$$K = 0. \tag{11}$$

De plus, cette condition étant remplie, et les équations (10) étant ainsi réduites aux formules

$$\begin{cases} D_t^2\xi = E\xi + Fu(u\xi + v\eta + w\zeta), \\ D_t^2\eta = E\eta + Fv(u\xi + v\eta + w\zeta), \\ D_t^2\zeta = E\zeta + Fw(u\xi + v\eta + w\zeta), \end{cases} \tag{12}$$

les seconds membres de ces formules devront coïncider eux-mêmes avec les seconds membres des équations (1). Or, cette coïncidence entraînera les six conditions

$$\begin{cases} G + D_u^2H = E + Fu^2, \quad G + D_v^2H = E + Fv^2, \quad G + D_w^2H = E + Fw^2, \\ D_vD_wH = Fvw, \qquad D_wD_uH = Fwu, \qquad D_uD_vH = Fuv. \end{cases} \tag{13}$$

Il reste à examiner quelle est la forme que devront prendre les fonctions G, H pour satisfaire aux conditions (13).

J'observerai d'abord que, E, F étant par hypothèse des fonctions du trinôme

$$u^2 + v^2 + w^2,$$

ou, ce qui revient au même, des fonctions de h, il suffira, pour satisfaire aux conditions (13), de supposer les fonctions symboliques G, H, réduites elles-mêmes à des fonctions de h. En effet, dans cette hypothèse, les conditions (13), jointes à la formule (8), donneront

$$D_h^2H = F, \tag{14}$$

$$G + D_hH = E, \tag{15}$$

et se trouveront toutes vérifiées si G, H vérifient les formules (14) et (15). D'ailleurs, la valeur de H fournie par l'équation (5)

s'évanouit avec ses dérivées de premier ordre $D_u H, D_v H, D_w H$, lorsque u, v, w, et par suite ι s'évanouissent; et l'on satisfait à cette condition en même temps qu'à l'équation (14) lorsqu'on prend

$$H = \iint F dh^2, \tag{16}$$

chaque intégration étant effectuée à partir de la limite $h = 0$. Enfin, en supposant la valeur de H déterminée par la formule (16), on tirera de l'équation (15)

$$G = F - D_h H = F - \int F dh \tag{17}$$

l'intégration étant encore effectuée à partir de $h = 0$.

Ce n'est pas tout; H devant, en vertu de la formule (15), s'évanouir avec ses dérivées de premier ordre, pour des valeurs nulles de u, v, w, les valeurs les plus générales de G et H qui satisferont en même temps à cette condition et aux formules (13), ne pourront différer des valeurs fournies par les équations (16) et (17). Car si l'on nomme $\mathcal{G}, \mathcal{S}$ les accroissements qu'on devra faire subir à ces dernières valeurs pour passer aux valeurs générales de G et H, il faudra, pour satisfaire aux formules (13), poser

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{G} + D_u^2 \mathcal{S} = 0, & \mathcal{G} + D_v^2 \mathcal{S} = 0. & \mathcal{S} + D_w^2 \mathcal{S} = 0, \\ D_v D_w \mathcal{S} = 0, & D_w D_u \mathcal{S} = 0, & D_u D_v \mathcal{S} = 0, \end{array}\right. \tag{18}$$

et de plus $\mathcal{S}$ devra s'évanouir avec ses dérivées de premier ordre $D_u \mathcal{S}, D_v \mathcal{S}, D_w \mathcal{S}$ pour des valeurs nulles de u, v, w. Or, pour vérifier en même temps cette dernière condition et les formules (18), il est nécessaire de supposer

$$\mathcal{G} = 0, \quad \mathcal{S} = 0. \tag{19}$$

En résumé, si, dans les équations (1), c'est-à-dire, dans les équations linéaires et aux dérivées partielles qui représentent les mouvements infiniment petits d'un système unique de molécules, les coefficients des dérivées des divers ordres se réduisent à des quantités constantes, alors, pour que ces équations deviennent isotropes, il sera nécessaire, et il suffira que les fonctions symboliques G, H, déterminées par les formules (3) et (5) se réduisent à des fonctions de la lettre symbolique

$$h = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2},$$

ou, ce qui revient au même, à des fonctions symboliques du trinôme

$$u^2 + v^2 + w^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2.$$

D'ailleurs, cette condition étant supposée remplie, il suffira de poser

$$E = G + D_h H, \qquad F = D_h^2 H \tag{20}$$

pour réduire les équations (1) aux formules (12).

Appliquées à la théorie de la lumière, les équations (12) représentent les mouvements infiniment petits de l'éther dans ceux des corps isophanes qui ne produisent pas le phénomène de la polarisation chromatique. Dans les corps qui produisent ce remarquable phénomène, les vibrations de l'éther se trouvent représentées non plus par les formules (12), mais par les formules (10). Je montrerai, dans un autre Mémoire, comment ces dernières formules se déduisent des équations à coefficients périodiques qui représentent les mouvements vibratoires de deux systèmes de molécules ou de l'un d'eux seulement.

RECHERCHES

EXPÉRIMENTALES

SUR LA PEINTURE A L'HUILE,

PAR M. E. CHEVREUL.

Premier mémoire, lu à l'Académie des sciences dans la séance du 8 juin 1850.

INTRODUCTION.

1. Lorsque je me trouvai chargé de faire un rapport sur la peinture au blanc de zinc, j'éprouvai, je l'avoue, un grand embarras; car la première condition à remplir était de savoir ce qu'est la peinture à l'huile. Or, je l'ignorais absolument. Pour sortir de mon ignorance, j'entrepris la longue série d'expériences que je viens soumettre aujourd'hui à l'Académie, avant le rapport dont une commission a été chargée.

Mes recherches, trop nombreuses pour être contenues dans un seul mémoire, en composent deux : le premier, renfermant les expériences qui me paraissent constituer la base de l'art du peintre en bâtiment, est l'objet de la communication

de ce jour; le second renfermera les considérations générales qui me paraissent les conséquences des faits que je vais exposer aujourd'hui.

2. La peinture à l'huile, telle qu'elle est employée dans les bâtiments, se compose essentiellement de trois matières, sans parler, bien entendu, des corps colorés.

1° De *blanc;* soit la céruse, soit l'oxyde de zinc par le feu;

2° D'*un liquide huileux;* soit uniquement l'huile de lin, soit l'huile d'œillette, qui, à Paris notamment, est employée à réduire le blanc en pâte molle, pâte à laquelle on ajoute ensuite des proportions variables d'huile de lin et d'essence de térébenthine;

3° D'*un corps appelé* SICCATIF; soit de l'huile de lin litharginée, soit de l'huile de lin manganésée, soit enfin de la litharge en poudre pour les premières couches et les tons foncés. On emploie quelquefois, au lieu de litharge, et pour les tons clairs seulement, l'acétate de plomb broyé à l'huile.

3. La peinture doit au *siccatif* la propriété de sécher bien plus vite qu'elle ne le ferait sans lui; et il est jugé indispensable par les peintres en bâtiments dans tous les cas où la couche de peinture qu'ils ont appliquée sur du bois, de la pierre, un métal, ne serait pas complétement sèche quarante-huit heures, ou soixante-douze heures au plus, après l'application.

4. La première question qui se présentait était de savoir ce qui se passe dans la dessiccation de la peinture.

CHAPITRE PREMIER.

En quoi consiste ce qu'on appelle la dessiccation de la peinture.

5. Les expériences que je vais rapporter démontrent que la peinture *sèche* en absorbant de l'oxygène, de sorte qu'une planche de bois de chêne qu'on vient de peindre sèche plus vite dans une cloche remplie d'oxygène qu'elle ne l'eût fait dans l'air atmosphérique; elles démontrent, en outre, qu'elle n'aurait pu sécher dans une cloche remplie d'acide carbonique.

6. Voici les détails d'expériences comparatives qui ne laissent aucun doute sur l'opinion que j'émets.

Le 17 novembre, à 1 heure, on a peint quatre planchettes de chêne. { Une face à la céruse préparée à l'huile de lin pure; L'autre face au blanc de zinc préparé à l'huile de lin pure.

Une planchette a été abandonnée à l'air libre (n° 1).

Une planchette a été plongée dans un flacon de verre de deux litres qu'on a fermé (n° 2).

Une planchette a été plongée dans un flacon de verre de deux litres, dans lequel on avait dirigé un courant de gaz oxygène sec, de manière à en expulser tout l'air. La planchette une fois introduite dans le flacon, on y avait dirigé un nouveau courant d'oxygène (n° 3).

Une planchette a été plongée dans un flacon de verre de deux litres, dans lequel on avait dirigé un courant de gaz

acide carbonique sec, de manière à en expulser l'air. La planchette une fois introduite, on avait dirigé un nouveau courant d'acide carbonique (n° 4).

	Le 18 nov., à 1 h. (après 24 h.).	Le 20 nov., à 1 h. (après 72 h.).
Air libre, n° 1.	La céruse de la planchette était presque sèche.	Parfaitement sèche.
	Le blanc de zinc était pris, mais non pas sec.	Parfaitement sec.
Air limité, n° 2.	La céruse de la planchette était presque sèche.	Parfaitement sèche.
	Le blanc de zinc était pris, mais non pas sec.	Parfaitement sec.
Gaz oxygène, n° 3.	La céruse de la planchette était parfaitement sèche.	
	Le blanc de zinc était parfaitement sec.	
Gaz acide carbonique, n° 4.	La céruse de la planchette	Presque prise, mais sans adhérence au bois.
	Le blanc de zinc	Absolument frais.

Il faut remarquer qu'après vingt-quatre heures le blanc de zinc, qui n'était pas sec dans l'air, l'était parfaitement dans le gaz oxygène, et que la céruse et le blanc de zinc des n^os^ 1, 2 et 3, qui étaient parfaitement secs après soixante-douze heures, adhéraient fortement au bois; tandis que la céruse du n° 4 s'enlevait entièrement par le frottement du doigt, et que le blanc de zinc s'attachait au doigt comme une peinture fraîche.

7. Les expériences que je viens de rapporter expliquent comment on peut garder longtemps la peinture à l'huile dans de l'eau sans qu'elle sèche, si elle reste en repos, et qu'on ne brise pas la pellicule qui se forme à la surface de la peinture submergée.

8. On voit combien l'expression de *sécher* est impropre, puisque la peinture, loin de perdre quelque chose, absorbe de l'oxygène, tandis que l'expression de sécher signifie qu'un corps humecté d'un liquide perd ce liquide par évaporation.

9. Enfin, toutes choses égales d'ailleurs, la peinture sèche

plus vite à la température de vingt-cinq à vingt-huit degrés, qu'à celle de quinze à dix-huit.

C'est ce qui explique pourquoi, dans la pratique, la proportion du siccatif varie avec la température. Ainsi, en hiver, on ajoute à l'huile de lin qui sert à délayer le blanc réduit en pâte, de 3 à 9 et même 10 de siccatif pour 100, tandis qu'en été on se borne à $\frac{1}{2}$, 1 $\frac{1}{2}$, 2 pour 100, si toutefois on ne le supprime pas absolument, notamment pour la dernière couche.

10. Voulant savoir l'augmentation de poids que de la peinture éprouverait par son exposition à l'air, j'étendis, dans une capsule de verre pesant 38$^{gr.}$,630, une couche de peinture à l'huile pesant 2$^{gr.}$,683. Je l'exposai à l'air, et la pesai à différents intervalles de temps.

			gr.	
Le 17 novembre, à	2 h.	le poids était de	2,683	100,00
—	4 h.	—	0,006	0,22
Le 19 —	10 h.	—	0,045	1,67
—	1 h.	—	0,048	1,79
—	4 h.	—	0,050	1,86
Le 20 —	10 h.	—	0,054	2,01
—	2 h.	—	0,060	2,23
Le 22 —	11 h.	—	0,067	2,49
Le 23 —	4 h.	—	0,068	2,53
Le 26 —	4 h.	—	0,0682.	2,54
Le 27 —	4 h.	—	0,0685.	2,55
Le 28 —	4 h.	—	0,0685.	2,55
Le 29 —	4 h.	—	0,0685.	2,55

La peinture n'augmentant plus, je m'aperçus, au moyen d'une spatule de platine, que les parties épaisses de la couche étaient molles ; en conséquence, je grattai la peinture pour qu'elle présentât le plus de surface possible à l'air.

			gr.	
Le 2 décembre,	à 4 h.,	le poids était de	0,0705	2,62
Le 3 —		—	0,0705	2,62
Le 5 —		—	0,0725	2,70
Le 9 —		—	0,0745	2,77
Le 10 —		—	0,0765	2,85
Le 13 —		—	0,0765	2,85

11. Tout le monde sait que l'huile de lin absorbe l'oxygène. J'ai voulu savoir si cette propriété est augmentée lorsqu'on la mêle avec de l'huile de lin manganésée; en conséquence, j'ai introduit dans des cloches graduées en centimètres cubes,

Le 6 juillet, à 2 h.	cc. 1,6 d'huile de lin. 8,0 d'air atmosphérique.	cc. 1,25 d'huile de lin. 0,35 d'huile de lin manganésée. 8,00 d'air atmosphérique.
Le 10 juillet, à 2 h., l'absorption était de	cc. 0,15	cc. L'absorption était de 1,6
Le 12	— 0,15	— 1,6

Je me suis assuré que le résidu de la seconde cloche était de l'azote pur, car il n'agissait pas sur le phosphore fondu. Ainsi, le mélange d'huile de lin et d'huile manganésée avait agi comme matière eudiométrique en faisant l'analyse de l'air, et le pouvoir absorbant de l'huile pure à l'huile mélangée avait été pour 100 volumes de liquide huileux :: 9,4 : 100.

12. Ces résultats m'ont conduit à l'examen comparatif du pouvoir absorbant de l'huile de lin, de l'huile manganésée, et d'un mélange d'huile de lin et d'huile manganésée, en se servant, cette fois, non d'air atmosphérique, mais de gaz oxygène pur.

Le 10 juillet 1849, à 5 h. du soir.	cc. 2,000 d'huile de lin présentant un cylindre de $0^m,01$ diamètre furent mis dans une cloche graduée, en contact avec du gaz oxygène.	cc. 2,00 d'huile de lin manganésée furent mis dans une cloche graduée, en contact avec du gaz oxygène.	cc. 2,000 d'un mélange : 2 cc. = { 1,56 huile de lin, 0,44 huile de lin manganésée, furent mis dans une cloche graduée, en contact avec du gaz oxygène.
L'absorption était après 2 jours	0,863		2,565
— 3 jours	1,181	0,30	3,260
— 6 jours	1,545	1,25	7,347
— 7 jours	1,590	1,65	7,608
— 8 jours	1,681	2,00	8,086
— 9 jours	1,772	3,00	8,956
— 10 jours	1,818	3,25	
— 11 jours	1,865	3,75	
— 12 jours			11,608
— 13 jours	2,000	4,50	12,565
— 14 jours	2,000	4,90	12,869
— 15 jours			14,695
— 16 jours	2,090	6,25	17,043
— 17 jours	2,118	6,35	18,347
— 18 jours	2,181	6,75	19,739
— 19 jours		7,05	
— 20 jours	2,272	8,75	20,608
— 21 jours	2,318	11,55	
— 22 jours	2,363	12,15	21,913
— 23 jours	2,363	13,95	22,782
— 24 jours	2,409		
— 25 jours	2,409	18,90	24,826
— 27 jours	2,454	19,50	
— 28 jours	2,500	20,05	29,000
— 29 jours	2,545		
— 30 jours	2,545	21,45	30,826

13. Le mélange d'huile de lin avec un peu plus de $\frac{1}{4}$ de son volume d'huile de lin manganésée, a donc un pouvoir absorbant bien plus grand que ne l'ont les principes du mélange pris séparément. En effet, si les pouvoirs absorbants restaient après le mélange ce qu'ils sont auparavant, on aurait :

	cc.	cc.
Pour	1,56 d'huile de lin pure.	1,985 d'oxygène absorbé.
	0,44 d'huile de lin manganésée.	4,719
		6,704

Eh bien, l'absorption réelle produite par le mélange a été 30,826, c'est-à-dire, plus grande de 4 fois $\frac{1}{2}$, puisque 6,704 : 30,825 :: 1 : 4,59.

N'est-il pas clair que si l'industrie, au lieu d'avoir commencé par chercher à augmenter le pouvoir siccatif de l'huile de lin pure, eût commencé par chercher à augmenter le pouvoir siccatif de l'huile manganésée, on aurait été conduit, en voyant le pouvoir siccatif de celle-ci augmenter par l'addition de l'huile de lin pure, à qualifier cette dernière de *siccatif?*

Je reviendrai sur la théorie de ces faits dans le second mémoire.

CHAPITRE II.

Les corps ont-ils de l'influence sur la durée de la dessiccation de la peinture qui en couvre la surface?

14. Je commence ce chapitre par l'exposé des faits que j'observai en 1845, époque où j'examinai comparativement des peintures faites à la céruse, au blanc de zinc préparé par M. Mathieu de Vitry-le-Brûlé, au blanc d'antimoine préparé par M. Rousseau, et à l'arséniate de protoxyde d'étain préparé par M. de Ruolz. Mais avant d'aller plus loin, il faut expliquer le sens des termes dont je me servirai pour définir l'état de l'huile ou celui de la peinture appliquée sur une surface quelconque.

Fraîche veut dire que l'huile ou la peinture s'attache au doigt;

Prise signifie que l'huile ou la peinture ne s'y attache pas, mais qu'elle garde l'empreinte de la peau du doigt;

Sèche veut dire que l'huile ou la peinture ne reçoit plus l'empreinte du doigt; elle paraît tout à fait solide ;

Enfin, je compte la durée de la dessiccation par jour composé de 24 heures.

Toutes les expériences faites en même temps sur une même surface sont comparatives entre elles, et relatives à la nature des huiles, à leur préparation, à leurs proportions quand on les emploie à l'état de mixtion, à la nature de la

matière solide qu'on y a incorporée, et enfin à la nature de la surface sur laquelle l'application des huiles ou de la peinture a été faite. Les circonstances atmosphériques étaient les mêmes pour les expériences d'une même série ; la seule cause qui ait pu agir d'une manière accidentelle sur les expé-

15.

Le 3 février 1845.	N° 1. Blanc de plomb (céruse) (*).	N° 2. Blanc de plomb de Lille (*).	
	Peinture préparée avec : gr. Huile de lin pure..... 10,0 Blanc de plomb..... 15,5	gr. Huile de lin pure..... 10,0 Blanc de plomb de Lille..... 18,5	
1re *couche.*	Ce mélange avait toutes les qualités désirables pour l'usage auquel il était destiné. Il fut appliqué sur une toile préparée à l'huile de lin + de l'huile de lin rendue siccative par la litharge + du blanc de plomb.	*Id*.....	....
Le 7 février.	Peinture inégalement sèche.	Peinture parfaitement sèche.	.....
Le 15.	Parfaitement sèche.	*Idem.*	.....
Le 22.	.....	.....	.....
Le 30 mars.	.....	.....	.....
2e *couche.*			
Les deux tiers de la surface de la toile qui avaient reçu une couche le 3 février en reçurent une seconde le 31 mars.			
Le 7 avril.	2e couche parfaitement sèche.	2e couche parfaitement sèche.	.....
Le 15.	.....	.....	.....
Le 28.	.....	.....	.....
3e *couche.*			
La moitié de la surface de la toile qui avait reçu deux couches de peinture en reçut une troisième le 2 mai.			
Le 5.	La 3e couche parfaitement sèche.	La 3e couche parfaitement sèche.	.....
Le 7.	.....	.....	....
Le 29.	.....	.....	.....
Le 30.	.....	.....	.....

(*) 2 grammes de blanc de plomb ont été dissous sans résidu par l'acide azotique étendu.

riences d'une même série, est l'inégalité d'épaisseur de chaque couche; mais j'ai tout lieu de penser, d'après la répétition de mes expériences, que cette cause a eu peu d'influence sur les résultats que j'ai consignés dans ce mémoire.

	N° 3. Blanc d'antimoine préparé par M. Rousseau.	N° 4. Blanc de zinc préparé par M. Mathieu de Vitry-le-Brûlé.
	gr.	gr.
	Huile de lin pure..... 10	Huile de lin pure..... 10,0
	Blanc d'antimoine..... 40	Blanc de zinc de Mathieu..... 7,4
.....	*Id*.....	*Id.*
	Cette peinture couvre moins que 1, 2 et 4.	Cette peinture couvre moins que 1 et 2.
.....	Elle n'était pas prise.	Elle était prise, mais non sèche.
.....	Elle n'était pas prise; car la toile ayant été posée inclinée, la peinture coula.	Non sèche.
.....	Elle n'était pas sèche, mais prise.	Parfaitement sèche.
.....	Elle était sèche depuis la veille.	
.....	Elle n'était pas prise.	Parfaitement prise, mais non sèche.
.....	Elle n'était pas prise, mais commençait à l'être.	Elle était sèche.
.....	Elle était sèche.	
.....	Non prise.	Presque sèche.
.....	Non prise.	Sèche.
.....	Non sèche, mais prise parfaitement.	
.....	Sèche.	

La solution azotique a été soumise à un courant de gaz ammoniac, jusqu'à ce que celui-ci rendît la liqueur légèrement alcaline.

16. *Conclusions* des expériences dont les résultats sont exposés dans le tableau portant la date du 3 février 1845.

1° Les peintures avaient été préparées de la manière suivante : pour chacune d'elles on avait pesé 10 grammes d'huile de lin, et le chef de l'atelier de peinture du Muséum d'histoire naturelle prenait ce qu'il jugeait convenable des deux blancs de plomb, du blanc d'antimoine et du blanc de zinc dans des quantités pesées d'avance. En pesant celles-ci après, je reconnus les quantités qui étaient entrées dans chacune des peintures.

Il ne faut pas perdre de vue qu'il n'y avait pas de siccatif.

La peinture au blanc de zinc, faite dans la proportion indiquée, couvrait moins que la peinture à la céruse, mais elle couvrait plus que la peinture au blanc d'antimoine.

2° La dessiccation des peintures au blanc de plomb, au blanc d'antimoine et au blanc de zinc a exigé pour chaque peinture des temps fort différents.

	Le blanc de plomb n° 2.	Le blanc de zinc.	Le blanc d'antimoine.
1re couche	4 jours.	18 jours.	50 jours.
2e couche	3 1/2 jours.	15 jours.	28 jours.
3e couche	3 jours.	5 jours.	27 jours.
	10 1/2	38	105

Il s'est produit un précipité, qu'on a séparé par la filtration, et qu'on a lavé sur le filtre.

La liqueur et les lavages s'étant troublés, on les a filtrés, et on a fini par obtenir des liqueurs claires qui, évaporées à sec, et le résidu rougi, n'ont laissé que $0^{gr},008$ de résidu.

2 grammes de blanc de Lille, traités de la même manière, ont laissé $0^{gr},033$ de résidu insoluble.

La solution précipitée par le gaz ammoniac, puis filtrée à plusieurs reprises, a donné un liquide dont le résidu, fixe au rouge cerise, pesait $0^{gr},009$.

On voit que la peinture à la céruse sèche beaucoup plus vite que les deux autres, et l'on peut conclure des expériences, que s'il n'était pas possible d'accélérer la dessiccation de la peinture au blanc de zinc par l'addition du *siccatif*, dans le langage des ateliers, il ne serait pas possible de l'employer, industriellement parlant, du moins dans toutes les circonstances; car la peinture en bâtiment exige qu'il ne s'écoule pas plus de 2 ou 3 jours entre la première couche et la seconde.

3° On doit remarquer que la deuxième et la troisième couche surtout, pour le blanc de plomb, et plus encore pour le blanc de zinc, ont exigé moins de temps pour sécher qu'il en a fallu à la première couche. On verra plus loin l'explication de ce résultat ([20] et [24 A et B]).

17.

14 août 1845.	N° 1. Blanc de plomb de Lille.	N° 2. Sous-carbonate de plomb pur.	
On a employé chacune de ces peintures comme celles du tableau précédent, sur toile préparée à la céruse.	Peinture préparée avec : gr. Huile de lin non lithargirée. 10 Blanc de Lille . . . . . 24 Meilleure que 2 pour couvrir, mais moins blanche.	Huile de lin non litharg. 10,0 Sous-carb. de plomb pur. 20,3	
1re *couche*, le 14 août.			
Le 17.	Parfaitement sèche.	Parfaitement sèche.	.....
Le 19.	.....	.....	.....
Le 21.	.....	.....	.....
Le 25.	.....	.....	.....
Le 26.	.....	.....	.....
Le 27.	.....	.....	.....
Le 28.	.....	.....	.....
Le 14 septembre.	.....	.....	.....
Le 22.	.....	.....	.....
Le 14 octobre.	.....	.....	.....
On n'a pas jugé convenable de donner une 2e et une 3e couche.			

18. Conclusions des expériences dont les résultats sont exposés dans le tableau portant la date du 14 août 1845.

1° Les résultats sont conformes à ceux du tableau de février pour le blanc de plomb, le blanc d'antimoine et le blanc de zinc, sauf que la dessiccation a été plus rapide, à cause de la différence de la température existante entre l'été et l'hiver.

Ainsi, la peinture au blanc d'antimoine n'avait mis que 14 jours à sécher, au lieu de 50 jours;
la peinture au blanc de zinc n'avait mis que 7 jours — 18 jours.

2° L'arséniate de protoxyde d'étain est absolument impro-

	N° 3. Blanc d'antimoine.	N° 4. Blanc de zinc.	N° 5. Arséniate de protoxyde d'étain.
	gr.	gr.	gr.
	Huile de lin non lithargirée. 10	Huile de lin non litharg.. 10,0	Huile de lin non litharg.. 10,0
	Blanc d'antimoine. 36	Blanc de zinc 5,5	Arséniate d'étain. 17,8
	Le blanc grenu sous la mollette.	Il lâche ou s'éclaircit en broyant.	Grains comme sableux s'empâtant mal, se comportant à la manière du blanc de Meudon.
.....	Pas prise.	Prise légèrement.	Pas prise.
.....	Pas prise.	Commence à sécher.	Pas prise.
.....	Pas prise.	Sèche.	Pas prise.
.....	Pas prise.	. . . . .	Pas prise.
.....	Quelques parties prises.	. . . . .	Pas prise.
.....	Commence à sécher.	. . . . .	Pas prise.
.....	Sèche, mais terne.	. . . . .	Pas prise.
.....	. . . . .	. . . . .	Pas prise.
.....	. . . . .	. . . . .	Pas prise.
.....	. . . . .	. . . . .	Pas prise.

pre à la peinture à l'huile; il semble même empêcher l'huile de sécher plus tôt qu'elle ne le ferait, si elle était absolument pure de toute substance étrangère (67, 68, 69).

19. Voulant savoir les rapports existants entre les propriétés siccatives de l'huile de lin pure, de l'huile de lin pure mêlée au blanc d'antimoine, et de l'huile de lin mêlée au blanc d'antimoine et à un peu d'huile de lin siccative lithargirée, j'ai fait coucher trois zones égales sur *verre* des trois matières précédentes, le 4 janvier 1850.

	1	2 gr.	3
Le 4 janvier 1850, à 8 h. du matin, on a étendu sur une plaque de verre	Huile de lin pure.	Huile de lin pure. 9,11 Oxyde d'antim. 14,50	Huile de lin pure. 8,85. Huile de lin litharginée. . . . . 2,00 Oxyde d'antim. 14,50
Les 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.	1re *couche.* Fraîche.	1re *couche.* Fraîche.	1re *couche.* Fraîche.
Le 16, à 8 h. du matin.	Fraîche.	Fraîche.	Commence à prendre.
Le 17.	Fraîche.	Fraîche.	Prend.
Le 18.	Fraîche.	Fraîche, moins avancée que 1.	Prend.
Le 19.	Commence à prendre.	Fraîche.	Prend, plus avancée que 1.
Le 20.	Presque sèche.	Fraîche.	Prend, moins avancée que 1.
Le 21.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.	Presque sèche.
Le 22.	Fraîche.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 23.	Fraîche.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 24.	Fraîche.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*
Les 25, 26, 27.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.
Le 28.	Fraîche.	Prise par place.	Comm. faibl. à prendre.
Le 29.	Fraîche.	Prend.	Prend.
Le 30.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Prend.
Le 31.	Commence à prendre.	Fraîche.	Prise.
Le 1er février, à 8 h.	Prend.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*
Le 2.	Prend.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 3.	Prend.	Fraîche.	Sèche.
Le 4.	Prise presque partout.	Comm. faibl. à prendre.	
Le 5.	Sèche par place.	Prise.	
Le 6.	Presque sèche.	Moins sèche que 1.	
Le 7.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*	
Les 8, 9, 10.	Fraîche.	Fraîche.	
Le 11.	Fraîche, excepté sur les bords.	Commence à prendre.	
Le 12.	Commence à prendre.	Presque prise.	
Le 13.	Presque prise.	Prise.	
Le 14.	Prise.	Presque sèche.	
Le 15.	Presque sèche.	Presque sèche.	
Le 16.	Sèche.	Sèche.	

20. *Conclusions.*

1° En première couche, l'huile de lin pure sèche plus vite sur le verre que l'huile mêlée à l'oxyde d'antimoine préparé par le feu. Cet oxyde est donc antisiccatif, relativement au verre.

2° L'huile lithargirée sert de siccatif à l'huile de lin mêlée à l'oxyde d'antimoine, ou, en d'autres termes, neutralise la propriété antisiccative de cet oxyde.

	N° 1. Huile de lin.	N° 2. Huile de lin. Oxyde d'antimoine.	N° 3. Huile de lin. Huile lithargirée. Oxyde d'antimoine.
1re couche....	17 jours.	26 jours.	21 jours.
2e couche....	17	8	9
3e couche....	9	9	2
	43	43	32

3° S'il est certain que la 2e et la 3e couches séchaient plus rapidement que la 1re, cependant il ne faudrait pas croire que, dans les expériences précédentes, l'accroissement est uniquement dû à l'influence des couches antérieures sur la couche postérieure. Car le temps ou le contact de l'air a exercé de l'influence sur l'huile n° 1 et sur les mélanges qui avaient été préparés pour les nos 2 et 3, comme nous le verrons, c'est-à-dire que le mélange n° 2, appliqué en première couche sur une surface de verre, aurait employé moins de 26 jours à sécher, et plus de 8 jours (24, A et B).

21. Plusieurs observations m'ayant conduit à penser que la nature des surfaces sur lesquelles on étend la peinture exerce de l'influence sur sa dessiccation, j'ai fait donner le même jour une première couche d'huiles diversement préparées, et de différentes peintures, sur deux planches de bois de chêne : l'une avait été peinte en brun avec huile de lin, siccatif, céruse, rouge de fer et noir, tandis que l'autre ne l'avait point été. Chaque planche était divisée en onze zones, et chaque zone était subdivisée en trois parties égales, afin d'apprécier l'effet d'une couche, de deux couches et de trois couches de chaque huile et de chaque peinture. Ainsi, la première couche était donnée à toute la zone; la seconde couche à deux parties de cette zone, et la troisième couche à une partie seulement. Il s'était écoulé 12 jours depuis que la première planche avait été peinte en brun, jusqu'à l'é-

poque de mes expériences. Les matières employées étaient identiques sur les deux planches et appliquées presque simultanément.

22. Voici le résumé et les conclusions des expériences faites sur le chêne peint en brun dont les résultats sont consignés dans le 1^er^ tableau. (Voyez à la fin du mémoire.)

a) *Huile de lin, huile de lin lithargirée, huile de lin manganésée, huile d'œillette.*

		Huile de lin.	Huile de lin lithargirée.	Huile de lin manganésée.
Durée de la dessiccation.	1re couche.	4 jours.	2 jours.	2 jours.
	2e couche.	17	3	3
	3e couche.	25	2	2
		46	7	7

L'huile de lin pure sèche bien moins vite que les huiles lithargirée et manganésée.

Si la première couche d'huile de lin pure a séché bien plus rapidement, c'est qu'elle a subi une influence de la part de la peinture qui couvrait la planche.

L'huile d'œillette a séché d'abord un peu plus lentement que l'huile de lin, puis elle a séché plus rapidement.

b) *Huiles et céruse.*

		Huile de lin. Céruse.	Huile de lin. Huile lithargirée. Céruse.	Huile de lin. Huile de lin manganésée. Céruse.
Durée de la dessiccation.	1re couche.	2 jours.	2 jours.	2 jours.
	2e couche.	4	4	2
	3e couche.	3	3	2
		9	9	6

Si la première couche de l'huile de lin et de céruse a séché plus rapidement que la deuxième et la troisième, c'est qu'elle a reçu l'influence de la peinture du fond; l'huile lithargirée n'a pas eu d'influence sur la dessiccation de l'huile de lin mêlée de céruse, tandis que l'huile manganésée l'a accélérée; mais il ne faut pas considérer ce résultat comme absolu; il

LE DE LIN ET SICCATIF.

		N° 8.	N° 9.	N° 10.	N° 11.
Le 23 décembre 1849, à 8 heures du matin, on a donné les premières couches sur la planche, dont la 3e couche de brun avait 12 jours.	1′ Huile d'œi 1 Huile de li	uile de lin n° 1. 37,95 uile lithargir.. 7,30 xyde de zinc.. 40,00 1re *couche.*	Huile de lin n° 1. 36,00 Huile manganés. 7,50 Oxyde de zinc. 40,00 1re *couche.*	Huile de lin n° 1.... 9,00 Oxyde d'antimoine . 14,50 1re *couche.*	Huile de lin n° 1.... 8,85 Huile lithargirée.... 2,00 Oxyde d'antimoine... 14,50 1re *couche.*
Le 25 décembre, à 8 heures.	1′ Fraîche. 1 Commence	mmence à prendre.	Bien prise.	Commence à prendre.	Prise.
Le 26 8	1′ Commence 1 Bien prise.	che. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Presque sèche.	Presque sèche.
Le 27 8	1′ Prise. 1 Sèche.	mmence à prendre.	Commence à prendre.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*
Le 28 8	1′ Sèche. 1 Commence	ntinue à prendre.	Prise.	Fraîche.	Commence à prendre.
Le 29 8	1′ Fraîche. 1 Prend.	ise.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	Prend.
Le 30 8	1′ Commence 1 Commence	esque sèche.	Prise.	Comm. très-faibl. à prendre.	Prend.
Le 31 8	1′ Prend faib 1 Prend.	che. 3e *couche.*	Sèche.	Continue.	Prend.
Le 1er janv. 1850, à 8 heures.	1′ Prend faib 1 Prend.	mmence à prendre.	.....	Continue.	Prend.
Le 2 8	1′ Prend faib 1 Prend.	ise.	.....	Prend.	Presque prise.
Le 3 8	1′ Prend. 1 Prend.	resque sèche.	.....	Presque prise.	Presque prise.
Le 4 8	1′ Prend. 1 Prend.	che.	.....	Presque prise.	Presque prise.
Le 5 8	1′ Prise en pa 1 Prend.	.....	.....	Presque prise.	Presque sèche.
Le 6 8	1′ Commence 1 Commence	.....	.....	Presque sèche.	Presque sèche; plus que 10.
0	1′ Continue.	.....	.....	Presque sèche.	Sèche. 3e *couche.*

TABLEAU 1er alinéa 22, p. 672.

PLANCHE DE BOIS DE CHÊNE PEINTE EN BRUN AVEC NOIR, ROUGE DE FER ET CÉRUSE BROYÉE A L'HUILE DE LIN ET SICCATIF

Dates	Heures	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6	N° 7	N° 8	N° 9	N° 10	N° 11
[illegible] décembre 18[illegible], à 8 heures [illegible]		1° Huile d'œillette 2 Huile de lin	Huil. de lin lithargée	Huile de lin mangan[illegible]	Huile de lin n° 1 [illegible] Céruse [illegible]	Huile n° 1 [illegible] Huile lithargée [illegible] Céruse [illegible]	Huile n° 1... 11,20 Huile mangan. 4,35 [illegible]	Huile de lin n° 1 36,55 Oxyde de zinc. 40,00	Huile de lin n° 1. 37,95 Huile lithargée [illegible] Oxyde de zinc [illegible]	Huile de lin n° 1 [illegible] Huile mangan[illegible] Oxyde de zinc [illegible]	Huile de lin n° 1 [illegible] Oxyde [illegible]	Huile de lin n° 1 [illegible] Huile lithargée [illegible] Oxyde [illegible]
		[illegible] couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	1re couche	
[illegible] à 4 heures		Fraiche 2 Commence à prendre	Seche 2e couche	Seche 2e couche	Seche 2e couche	Seche 2e couche	Seche 2e couche	Fraiche.	Commence à prendre	Bien prise	Commence à prendre	Prise
Le [illegible]	8	1 Commence à prendr 1 [illegible] prise 2 Prise	Commence à prendre	Commence à prendre	Commence à prendre	Prise	Presque seche	Commence à prendre	Seche, 2e couche	Seche 2e couche	Presque seche	Presque [illegible]
Le [illegible]	8	1 Seche 2e couche 1 Seche 2e couche	Presque seche	Presque seche	Prise	Presque seche	Seche, 3e couche	Seche, 2e couche,	Commence à prendre	Commence à prendre	Seche 2e couche	Seche 3e couche
Le [illegible]	8	Commence à prendre 1' Fraiche	Seche 3e couche	Seche 3e couche	Presque [illegible]	Presque [illegible]	Prise parfaitement	Fraiche	Continue à prendre	Prise	Fraiche	Commence à prendre
Le [illegible]	8	2 Prend 1' Commence faiblement à prendre	Prise	Commence à prendre	Seche [illegible] couche	Seche 3e couche	Seche	Fraiche	Prise	Seche 3e couche	Fraiche	Prend
Le [illegible]	8	2 Commence à prendre Prend faiblement	Seche	Seche	Commence à prendre	Commence à prendre		Commence à prendre	Presque seche	Prise	Comm. tres-faibl. à prendre	Prend
Le [illegible]	8	1 Prend 2 Prend faiblement			Presque [illegible]	Presque [illegible]		Prend	Seche 3e couche	Seche	Continue	Prend
Le [illegible] 18[illegible], à 8 heures		Prend Prend faiblement			Seche	Seche		Prend.	Commence à prendre		Continue	Prend
Le [illegible]	8	Prend 1 Prend						Prise	Prise		Prend	Presque prise
Le [illegible]	8	Prend [illegible]						Prise.	Presque seche		Presque prise	Presque prise
Le [illegible]	8	1 Prend 1 Presque prise						Prise parfaitement.	Seche		Presque prise	Presque prise
Le [illegible]	8	1 Prend 1' Commence à secher						Commence à secher			Presque prise	Presque seche
Le [illegible]	8	1 Commence à secher 1 Continue						Presque seche			Presque seche	Presque seche, plus que [illegible]
Le [illegible]	8	1 Continue, moins avancée que 1 1 Presque seche						Seche 3e couche			Presque seche	Seche [illegible]
Le 8	8	1 Commence à secher Presque seche						Fraiche			Presque seche	Fraiche
Le 9	8	1 Presque seche 1 Presque seche						Comm. faibl. à prend			Seche 3e couche	Fraiche
Le [illegible]	8	1 Presque seche 1 Presque seche						Prend.			Fraiche	Fraiche
Le [illegible]	8	1 Presque seche Presque seche						Prend			Fraiche	Fraiche
Le [illegible]	8	Presque seche 1 Presque seche						Prend			Fraiche	Fraiche
Le [illegible]	8	1 Seche [illegible] couche 1 Seche 3e couche						Prend			Fraiche	Commence à prend
Le [illegible]	8	Fraiches						Prend			Fraiche	Prend
Le [illegible]	8	Fraiches						Prend			Fraiche	Presque prise
Le [illegible]	8	Fraiches						Prend			Fraiche	Prise
Le [illegible]	8	Fraiches						Prend			Fraiche	Parfaitement prise
Le 18	8	Fraiches						Prend			Fraiche	Presque seche
Le [illegible]	8	Fraiches						Prend			Commence à prendre	Seche
Le [illegible]	8	Fraiches						Prise			Prend	Parfaitement seche
Le [illegible]	8	Fraiches						Presque seche			Prend	
Le [illegible]	8	Fraiches						Continue à secher			Prise	
Le [illegible]	8	Fraiches						Seche			Parfaitement prise	
Le [illegible]	8	Fraiches									Presque seche	
Le [illegible]	8	1 Commence à s'emboire 1 Fraiche									Presque seche	
Le [illegible]	8	1 Commence à s'emboire 1 Fraiche									Presque seche	
Le [illegible]	8	1 Commence à secher 1 Fraiche									Seche	
Le [illegible]	8	1' Continue à secher 1 Fraiche										
Le [illegible]	8	1 Continue à secher 1 Fraiche										
Le [illegible]	8	1' Seche par place 2 Fraiche et prise par place										
Le 31	8	1 Presque seche 2 Prise par place										
Le 1er [illegible], à 8 heures		1 Presque seche 1 Parfaitement prise par place										
Le 2	8	1' Presque seche 2 Parfaitement prise										
Le 3	8	1' Seche, *Finie* 1 Seche par place										
Le 4	8	2 Seche par place										
Le 5	8	2 Seche par place										
Le 6	8	2 Presque seche entierement										
Le 7	8	Seche										

est relatif à la préparation de l'huile siccative, car dans une expérience antérieure, sur un fond brun, la peinture à l'huile lithargirée a séché un peu plus vite que la peinture à l'huile manganésée.

c) *Huiles et blanc de zinc.*

		Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin. Huile de lin lithargirée. Blanc de zinc.	Huile de lin. Huile de lin manganésée. Blanc de zinc.
Durée de la dessiccation.	1re couche.	4 jours.	3 jours.	3 jours.
	2e couche.	11	5	3
	3e couche.	16	4	2
		31	12	8

Si la première couche d'huile de lin et de blanc de zinc a séché plus vite que les deux autres couches, c'est qu'elle a reçu l'influence de la peinture de la planche; mais, en définitive, le blanc de zinc est siccatif par rapport à l'huile.

L'huile de lin lithargirée et surtout l'huile manganésée ont une influence prononcée sur la dessiccation de l'huile pure et du blanc de zinc.

d) *Huiles et blanc d'antimoine* (*).

		Huile de lin. Blanc d'antimoine.	Huile de lin. Huile lithargirée. Blanc d'antimoine.
Durée de la dessiccation.	1re couche..	4 jours.	4 jours.
	2e couche...	13	11
	3e couche...	18	13
		35	28

L'influence de la peinture brune de la planche pour faire sécher le blanc d'antimoine uni à l'huile de lin pure, ou à

(*) Pris dans le commerce par M. Leclaire, il n'était pas aussi pur que celui de M. Rousseau, à en juger par une légère couleur qui altérait la blancheur que l'oxyde d'antimoine possède à l'état de pureté.

l'huile de lin mêlée d'huile lithargirée, est bien sensible quand on compare la durée de la dessiccation de la première couche à la dessiccation des deux autres.

L'huile lithargirée a une influence siccative sur le mélange d'huile de lin pure et d'oxyde d'antimoine.

e) La *céruse* est très-siccative, par rapport à l'huile de lin pure.

En première couche, le blanc de zinc et le blanc d'antimoine ont été indifférents.

23. Voici le résumé et les conclusions des expériences consignées dans le 2[e] tableau (voyez à la fin du mémoire); elles sont comparables à celles du tableau précédent : la différence est que le bois sur lequel les huiles et les peintures ont été appliquées était une planche de chêne non peinte préalablement (21).

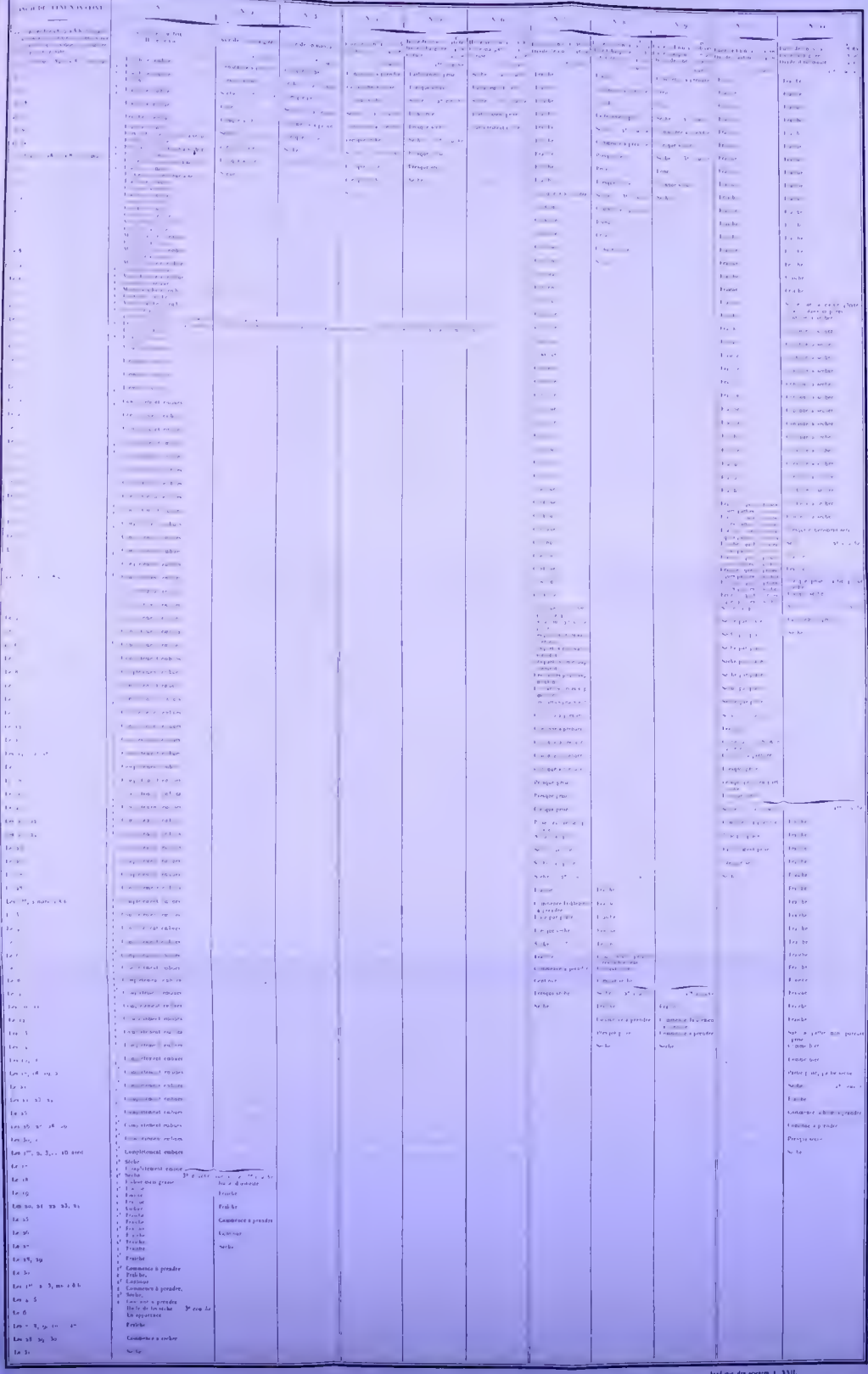
a) *Huile de lin, huile de lin lithargirée, huile de lin manganésée, huile d'œillette.*

		Huile de lin.	Huile de lin lithargirée.	Huile de lin manganésée.
Durée de la dessiccation.	1[re] couche.	22 jours.	4 jours.	3
	2[e] couche.	113	3	2
	3[e] couche.	24	3	3
		159	10	8

L'huile de lin pure sèche bien plus lentement que les huiles lithargirée et manganésée, et je dois reconnaître ici que la première couche n'était pas sèche après 22 jours, comme il le semblerait d'après le tableau. Je le crus; mais ce fut une erreur que je reconnus plus tard. Il est effectivement très-difficile de déterminer l'époque précise où une première couche d'huile pure qu'on a étendue sur du bois, ou plus généralement sur un corps poreux, est sèche, par la raison que l'huile pénétrant d'abord dans les pores de ce

PLANCHE DE CHÊNE NON PE		N° 8.	N° 9.	N° 10.	N° 11.
	gr.	gr.	gr.	gr.	gr.
Le 23 décembre 1849, à 8 h. du	36,55	Huile de lin n° 1.. 37,95	Huile de lin n° 1.. 36,00	Huile de lin n° 1... 9,00	Huile de lin n° 1..... 8,85
ou a donné les premières couch	40,00	Huile lithargirée.. 7,30	Huile mangan. .. 7,50	Oxyde d'antim. . . 14,50	Huile lithargirée. 2,00
une planche qui, comme la pr		Oxyde de zinc... 40,00	Oxyde de zinc... 40,00		Oxyde d'antimoine. 14,50
n'avait pas été peinte.	*couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
Le 25 décem. 1849, à 8 h. d		Fraîche.	Commence à prendre.	Fraîche.	Fraîche.
Le 26.		Commence à prendre	Prend.	Fraîche.	Fraîche.
Le 27.		Prend.	Prise.	Fraîche.	Fraîche.
Le 28.		Parfaitement prise.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.	Fraîche.
Le 29.		Sèche. 2e *couche.*	Commence à prendre.	Fraîche.	Fraîche.
Le 30.		Commence à prendre.	Presque sèche.	Fraîche.	Fraîche.
Le 31.		Presque prise.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	Fraîche.
Le 1er janvier 1850, à 8 h. du		Prise.	Prise.	Fraîche.	Fraîche.
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Le 7.		Commence à prendre très-faiblement.	.....	.....	Fraîche.
Le 8.	prendre.	Presque prise.	.....	.....	Fraîche.
Le 9.		Presque sèche.	.....	.....	Fraîche.
Les 10, 11.		Sèche. 2e *couche.*	1re *couche.*	.....	Fraîche.
Le 12.		Fraîche.	Fraîche.	.....	Fraîche.
Les 13.	.....	Commence à prendre.	Commence faiblement à prendre.	.....	Fraîche.
Les 14.	....	Presque prise.	Commence à prendre.	.....	Sur la partie non poreuse prise.
Les 15, 16.	.....	Sèche.	Sèche.	.....	Comme hier.
Les 17, 18, 19, 20.	.....	.....	.....	.....	Comme hier.
Le 21.	.....	.....	.....	.....	Partie prise, partie sèche.
Les 22, 23, 24.	.....	.....	.....	.....	Sèche. 2e *couche.*
Le 25.	.....	.....	.....	.....	Fraîche.
Les 26, 27, 28, 29.	.....	.....	.....	.....	Commence faiblem. à prendre.
Les 30, 31.	.....	.....	.....	.....	Continue à prendre.
Les 1er, 2, 3,...16 avril.	.....	.....	.....	.....	Presque sèche.
Le 17.	.....	.....	.....	.....	Sèche.
Le 18.					
Le 19.					
Les 20, 21, 22, 23, 24.					
Le 25.					
Le 26.					
Le 27.					
Le 28, 29.					
Le 30.					
Les 1er, 2, 3, mai à 8 h.					
Les 4, 5.					
Le 6.					
Les 7, 8, 9, 10,...27.					
Les 28, 29, 30.					
Le 31.					

TABLEAU 2° (alinéa 23 et 24, p. 171



Académie des sciences, t. XVII.

corps, il n'en reste plus assez à la surface pour produire un enduit brillant, lorsque cette huile sera sèche. Or, jusqu'au moment où la dessiccation de toute l'huile est complète, voici ce qu'on observe : d'abord l'huile de la surface se sèche, et dès lors elle ne tache pas le papier joseph avec lequel on la touche légèrement; mais si on presse de manière à mettre le papier en rapport avec les pores où l'huile a pénétré, alors celle-ci tache le papier. Cette explication fait comprendre pourquoi la dessiccation de l'huile est plus rapide sur les mailles du bois que sur les parties poreuses, pourquoi, lorsqu'une couche d'huile qu'on a étendue sur du bois est sèche, la nouvelle couche d'huile qu'on appliquera sur la première ne sera point embue, et pourquoi enfin une troisième couche, suffisamment épaisse, pourra apparaître comme un vernis.

On observe même qu'une couche d'huile de lin pure dont la surface est sèche au papier joseph, tandis que le reste est frais, peut recevoir une seconde et même une troisième couche de cette même huile, qui sécheront complétement, tandis que la portion d'huile de la première couche, qui a pénétré dans le bois, sera parfaitement fraîche, et tachera le papier qu'on comprimera sur le bois.

On voit combien la couche de peinture donnée à la première planche a favorisé la dessiccation de l'huile (22); mais évidemment, sans parler d'une action spéciale qu'elle a pu exercer, elle a agi mécaniquement en empêchant l'huile de pénétrer dans les pores du bois.

Enfin, c'est parce que les huiles lithargirée et manganésée ne sont pas embues, que, toutes choses égales d'ailleurs, elles se trouvent dans des conditions plus favorables à se dessécher et à prendre par la dessiccation l'aspect du vernis,

que ne se trouve l'huile pure, qui est beaucoup plus pénétrante.

b) *Huiles et céruse.*

		Huile de lin. Céruse.	Huile de lin. Huile de lin lithargirée. Céruse.	Huile de lin. Huile de lin manganésée. Céruse.
Durée de la dessiccation.	1re couche.	5 jours.	4 jours.	2 jours.
	2e couche.	3	3	2
	3e couche.	3	3	2
		11	10	6

La céruse est évidemment siccative relativement à l'huile de lin, et la première couche a servi de siccatif aux deux autres.

c) *Huiles et blanc de zinc.*

		Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin. Huile de lin lithargirée. Blanc de zinc.	Huile de lin. Huile de lin manganésée. Blanc de zinc.
Durée de la dessiccation.	1re couche.	66 jours.	6 jours.	5 jours.
	2e couche.	6	5	3
	3e couche.	6	5	3
		78	16	11

Le blanc de zinc est siccatif par rapport à l'huile de lin appliquée sur le chêne.

d) *Huiles et blanc d'antimoine.*

		Huile de lin. Blanc d'antimoine.	Huile de lin. Huile lithargirée. Blanc d'antimoine.
Durée de la dessiccation.	1re couche..	50 jours.	36 jours.
	2e couche...	9	5
	3e couche...	7	2
		66	43

Le blanc d'antimoine s'est montré plus siccatif que le blanc de zinc par rapport à l'huile de lin pure, tandis que le contraire a eu lieu relativement à l'huile mêlée d'huile lithargirée. J'ignore la cause de ce résultat, s'il ne tenait pas à l'impureté du blanc d'antimoine. (Note (*) de l'alinéa 22, *d*), page 673).

24. J'ai fait remarquer qu'une couche d'huile ou de peinture qu'on applique sur une plus ancienne qui vient de sécher, peut recevoir de celle-ci une influence qui la fait sécher plus vite que cela n'aurait eu lieu sans elle. Mais avant d'adopter cette conclusion d'une manière définitive, une contre-épreuve est nécessaire; car ne serait-il pas possible que l'huile ou la peinture qu'on applique sur une ancienne couche de cette huile ou de cette peinture eût subi, de la part du temps ou des agents atmosphériques, une modification qui la rendrait plus siccative qu'elle n'était au moment de son emploi en première couche? La question posée ainsi devait être résolue en examinant comparativement, avec l'huile ou la peinture donnée en deuxième ou troisième couche, la même huile ou la même peinture donnée en première couche sur les surfaces d'un même corps.

C'est ce qui a été fait pour la peinture à l'huile de lin pure et au blanc de zinc, et la peinture à l'huile de lin pure et au blanc d'antimoine.

A, *a*) Une première couche d'huile de lin pure et de blanc de zinc a mis 66 jours à sécher, et une seconde 6 jours sur bois de chêne.

Sur le même bois, la même peinture que celle qui avait été donnée en deuxième couche, donnée en première couche a employé 10 jours à sécher, au lieu de 6.

La deuxième couche avait été préparée avec la peinture qui avait 66 jours d'âge, et de l'huile de lin qui avait servi à la préparer et qui était restée dans un flacon fermé, mais contenant de l'air.

Les conséquences de cette expérience sont donc:

1° Que la peinture gardée 66 jours est plus siccative qu'au moment où elle a été préparée;

2° Que, malgré cela, la première couche a agi comme siccatif sur la seconde, puisque celle-ci a séché en 6 jours, au lieu de 10.

b) Enfin, la même peinture, âgée de 76 jours, étendue en deuxième couche et en première couche, toujours sur bois de chêne, n'a plus mis dans les deux cas à sécher que 5 jours.

Conséquemment, il était arrivé que, par le temps ou par l'influence des agents atmosphériques, la peinture avait acquis une propriété siccative assez prononcée pour ne plus recevoir d'influence d'une couche de la même peinture donnée antérieurement.

B) Mêmes résultats pour la peinture au blanc d'antimoine que pour la peinture au blanc de zinc.

La peinture à l'huile de lin pure et au blanc d'antimoine, qui avait mis 59 jours à sécher en première et en deuxième couche, employée en troisième couche, a mis 7 jours seulement à sécher, tandis qu'en première couche elle a mis 29 jours.

Les conséquences de cette expérience sont donc :

1° Que la peinture gardée 59 jours est plus siccative qu'au moment de sa préparation.

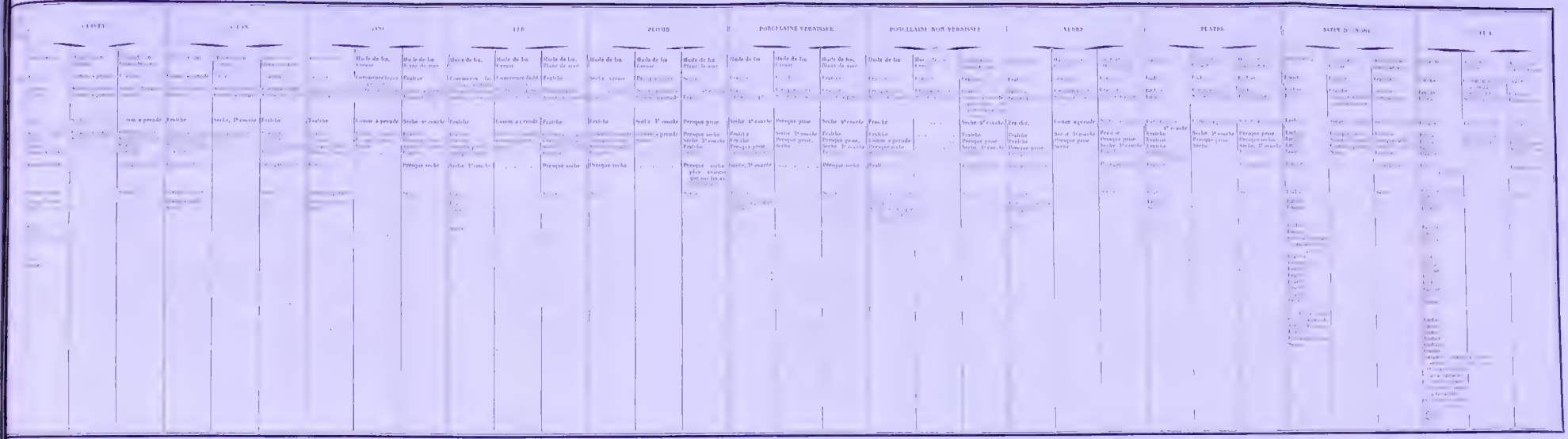
2° Que, malgré cela, les deux couches de peinture ont agi comme siccatif sur la troisième couche de cette même peinture, puisque celle-ci a séché en 7 jours, au lieu de 29.

25. Les résultats précédents offrant la preuve de l'influence des corps que l'on peint sur la durée de la dessiccation de la peinture et des huiles qu'on applique à leur surface, je me suis livré aux expériences comparatives que je

25 et 26, p. 678).

1er mai 1850, 10 heures du matin, a donné sur	LAINE VERNISSÉE.		SAPIN DU NORD.			PEUPLIER.		
e couche.	Huile	Huile de lin. Céruse.	Huile de lin. Blanc de zinc.	e de lin.	Huile de lin. Céruse.	Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin.	Huile de lin. Céruse.	Huile de lin. Blanc de zinc.
2 à 9 heures.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	he.	Fraîche.	Fraîche.	Embue.	Commence légèr. à prendre.	Fraîche.
3.	Fraîche.	Presque sèche.	Fraîche.	he.	Fraîche.	Fraîche.	Embue.	Presque prise.	Fraîche.
4.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Comm. à prendr.	he.	Sèche excepté les nœuds-résine.	Presque prise.	Embue.	Sèche. 2e *couche.*	Presque prise.
5.	Prise.	Presque prise.	Sèche. 2e *couche*	he.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Embue.	Presque sèche.	Sèche. 2e *couche.*
6.	Sèche.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	he.	Presque prise.	Fraîche.	Embue.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.
7.	Fraîche.	Presque prise.	Presque prise.	he.	Sèche. 3e *couche.*	Presque sèche.	Embue.	Presque prise.	Presque prise.
8.	Fraîche.	Sèche.	Sèche. 3e *couche*	he.	Comm. à prendr.	Sèche. 3e *couche.*	Embue.	Sèche.	Sèche. 3e *couche*
9.	Comm.	.....	Fraîche.	he.	Sèche.	Fraîche.	Embue.	.....	Fraîche.
10.	Presqu	.....	Presque sèche.	he.	.....	Presque sèche.	Embue. 2e *couche.*	.....	Presque sèche.
11.	Presqu	.....	Sèche.	he.	.....	Sèche.	Embue. { 1re *couche.* 2e *couche.*	.....	Sèche.
12.	Presqu	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
13.	Sèche.	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
14.	Fraîche	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
15	Fraîche	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
16.	Comm.	.....	.....	à la surface asse au fond. 2e *couche.*	.....	.....	Embue.		
17.	Prise.	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
18.	Sèche.	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
19.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
20.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
21.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
22.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
23.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
24.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
25.	.....	.....	.....	1re *couche,* parfait, sèch.	.....	.....			
26.	.....	.....	.....	n. à prendr.	.....	.....	Embue.		
27.	.....	.....	.....	e. 3e *couche.*	.....	.....	Embue.		
28.	.....	.....	.....	he.	.....	.....	Embue.		
29.	.....	.....	.....	item. prise.	.....	.....	Embue.		
30.	.....	.....	.....	e.	.....	.....	Embue.		
31.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	Embue.		
1er juin, 2.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	Embue, grasse encore.	1re *couche.* 2e *couche.*	
3.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1re *couche* sèche à la surface. 2e *couche* grasse.		
4.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1re *couche* sèche à la surface. 2e *couche* sèche. 3e *couche*		
5.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	Prise.		
6.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	Sèche.		

TABLEAU 3e (alinéa 25 et 26, p. 678



vais rapporter sur les corps suivants : le cuivre, le laiton, le zinc, le fer, le plomb, la porcelaine vernissée, la porcelaine non vernissée, le verre, le plâtre, le sapin du Nord et le peuplier. Les résultats de ces expériences sont exposés dans le 3^{e} tableau. (Voyez à la fin du mémoire.)

26. Résumé et conclusions.

A. *Métaux.*

a) Les résultats les plus remarquables observés sur les métaux soumis à l'expérience sont sans doute ceux que le plomb a présentés, non-seulement avec l'huile de lin pure, mais encore avec l'huile de lin et la céruse, et avec l'huile de lin et le blanc de zinc.

Ainsi, l'huile pure a séché sur le plomb avec une extrême rapidité, employée en première couche.

L'huile de lin mêlée à la céruse a séché plus lentement que l'huile pure, tandis que sur les autres corps la dessiccation du mélange a été égale ou plus rapide que celle de l'huile pure.

Le mélange d'huile de lin et de blanc de zinc sur le plomb sèche plus vite que le mélange d'huile de lin et de céruse, tandis que sur les autres corps les dessiccations suivent l'ordre inverse.

La preuve que la surface du plomb agit, c'est la lenteur avec laquelle se fait la dessiccation de l'huile de lin pure appliquée en deuxième et en troisième couche sur le même métal.

a') Enfin, les expériences suivantes démontrent que la surface du plomb décapé agit plus fortement que la surface du plomb ternie par son exposition à l'air.

		Plomb bien décapé.	Plomb terne.
Le 19 mai 1850, à 1 h.		1re *couche* .... d'huile de lin	..... d'huile de lin.
	à 3 de l'après-midi.	Prise.	Fraîche.
	à 5 h.	Presque sèche.	Prise.
	à 6 h.	Sèche.	Prise.
	à 8 h.	Parfaitement sèche.	Presque sèche.
Le 20	à 9 h. du matin.	2e *couche*.	Sèche, mais plus d'*amour* que sur le plomb décapé. 2e *couche*.
Le 21	à 8 h. du matin.	Fraîche.	Fraîche.
Le 22	—	Commence à prendre.	Commence à prendre, moins avancée que sur le plomb décapé.
Le 23	—	Presque sèche.	Presque sèche.
Le 24	—	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.
Le 25	—	Fraîche.	Fraîche.
Le 26	—	Presque sèche.	Presque sèche.
	à 8 h. du soir.	Sèche.	Sèche.

1° Il n'a donc fallu que 10 heures pour que la première couche d'huile sur plomb décapé séchât, et il en a fallu davantage sur le plomb terne.

2° En second lieu, une fois le plomb couvert d'une première couche, l'influence du métal décapé sur la dessiccation de la deuxième, et *à fortiori* de la troisième, est à peine sensible.

Dans le deuxième mémoire je reviendrai sur le fait remarquable de la présence du plomb ou de son oxyde dans l'huile de lin qui a séché sur ce métal.

b) *En première couche.*

Sur le cuivre..... L'huile a séché plus lentement que l'huile et la céruse, et même que l'huile et le blanc de zinc.

Sur le laiton et le zinc. L'huile a séché aussi vite que l'huile et la céruse, mais plus rapidement que l'huile et le blanc de zinc.
Mais sur le laiton la dessiccation est plus rapide que sur le zinc.

Sur le fer..... Mêmes résultats que sur le zinc ; mais l'huile et le blanc de zinc sèchent plus vite que sur le zinc.
Ce dernier résultat est analogue à celui qu'on observe avec le plomb; l'huile et la céruse sèchent plus lentement sur ce métal que ne le fait l'huile et le blanc de zinc.

c) *En trois couches.*

Sur le cuivre, le laiton, le zinc, le fer, le plomb même..... L'huile et la céruse sèchent plus vite que l'huile pure et l'huile mêlée au blanc de zinc.

B. *Porcelaine vernissée et non vernissée, verre et plâtre.*

d) En première couche.

Sur la porcelaine, le verre.	L'huile sèche un peu plus vite que l'huile avec le blanc de zinc, et l'huile avec la céruse un peu plus vite que l'huile.
Sur le plâtre.....	Peut-être l'huile sèche-t-elle aussi vite que l'huile avec le blanc de zinc.

e) En trois couches.

Sur la porcelaine, le verre, le plâtre.....	L'huile avec la céruse sèche plus vite que l'huile et le blanc de zinc, comme cela arrive pour les métaux. L'huile a séché moins vite que l'huile et le blanc de zinc.

C. *Bois de sapin du Nord, peuplier.*

f) En première couche.

Sur le sapin du Nord et le peuplier.....	L'huile pure a séché bien plus lentement que l'huile avec la céruse, et même que l'huile avec le blanc de zinc.

g) En trois couches.

Sur le sapin du Nord et le peuplier.....	L'huile avec la céruse ont séché plus vite que l'huile avec le blanc de zinc, et surtout que l'huile pure. L'huile pure sèche moins lentement sur le sapin du Nord que sur le peuplier.

27. Les expériences du tableau suivant confirment celles que je viens d'exposer.

Le 10 mai 1850, à 10 heures du matin, on a donné sur :	CUIVRE.	LAITON.	ZINC.	FER.	PLOMB.	PORCELAINE VERNISSÉE
1re *couche*.	Huile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.
Le 10 mai, à 5 heures du soir	.....	.....	.....	.....	Presque prise.	.....
Le 10 mai, à 11 heures du soir.	.....	.....	.....	.....	Sèche.	.....
Le 11 mai, à 10 h. du matin.	Presque sèche.	Presque prise.	Comm. à prendre.	Fraîche.	Parfaitement sèche, 2e *couche*.	Fraîche.
Le 12 10	Sèche. 2e *couche*.	Sèche. 2e *couche*.	Sèche. 2e *couche*.	Sèche. 2e *couche*.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche*.
Le 13 10	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.
Le 14 10	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Presque sèche par place.	Fraîche.
Le 15 10	Presque prise.	Presque prise.	Presque prise.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche*.	Presque prise.
Le 16 10	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 17 10	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 18 10	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Comm. à prendre.	Sèche. 3e *couche*.
Le 19 10	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Presque sèche.	Fraîche.
Le 20 10	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Sèche, mais *amour* (1).	Fraîche.
Le 21 10	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Sèche.	Presque sèche.
Le 22 10	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	.....	Sèche.
Le 23 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 24 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 25 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 26 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 27 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 28 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 29 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 30 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 31 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 1er juin, 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 2 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 3 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 4 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 5 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 6 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 7 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 8 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 9 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 10 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 11 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....
Le 12 10	.....	.....	.....	.....	.....	.....

(1) *Amour* signifie, en terme d'*art*, que la peinture, quoique sèche, retient légèrement le doigt.

ORCELAINE ON VERNISSÉE.	VERRE.	PLATRE.	SAPIN DU NORD.		PEUPLIER.	PEUPLIER.	CHÊNE.
ile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.	Huile de lin.		Huile de lin.		
ins fraîche que	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
r porc. verniss.							
he. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
îche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
îche.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
sque prise.	Presque prise.	Fraîche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
sque sèche.	Presque sèche.	Sèche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
sque sèche.	Presque sèche.		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
he. 3e *couche.*	Sèche 3e *couche.*		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
îche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
îche.	Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
sque sèche.	Presque sèche.		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
be.	Sèche.		Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
			Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
			Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
			Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
			Sèche. 2e *couche.*		Fraîche.		Fraîche.
			Fraîche.		Fraîche.		Fraîche.
			Prise.		Fraîche.		Fraîche.
			Sèche. 3e *couche.*	1re *couche.* Sur sapin neuf.	Fraîche.		Fraîche.
			Comm. à prendr.	Fraîche.	Comm. à prendr.		Fraîche.
			Presque sèche.	Fraîche.	Comm. à prendr.		Fraîche.
			Presque sèche.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	1re *couche.* Sur peuplier neuf.	Fraîche.
			Sèche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.	Prise.	Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.	Sèche.	Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.		Fraîche.	Fraîche.
				Fraîche.		Fraîche.	Fraîche.
				Comm. à prendr.		Fraîche.	Comm. à prendr.
				Sèch. à la surface.		Comm. à prendr.	Continue.
				Sèch. à la surface.		Sèch. à la surface.	Continue.
				Sèche.		Sèche.	Sèche à la surface seulement.

On voit :

Que l'huile de lin était sèche 13 heures après avoir été appliquée sur le plomb, tandis que la deuxième couche mit 4 jours à sécher, et la troisième à peu près 6 jours ;

Que l'huile sèche plus vite sur le sapin du Nord que sur le peuplier, et plus vite sur le peuplier que sur le chêne ;

Que la première et la deuxième couche d'huile, séchées, ont servi de siccatif à la troisième sur le sapin, puisque la troisième a mis 4 jours à sécher au lieu de 16 jours, et que l'huile de la troisième couche donnée en première a mis 14 jours à sécher ;

Que les résultats ont été les mêmes sur le peuplier, puisque la première couche ayant mis 22 jours à sécher, la même huile en deuxième couche n'a mis que 4 jours, et en première couche, 11 jours.

CHAPITRE III.

L'essence de térébenthine augmente-t-elle la propriété siccative de l'huile de lin pure, et celle de cette huile mêlée au blanc de zinc ?

28. On emploie, pour peindre, des mélanges d'huile de lin et d'essence de térébenthine en proportions variables suivant les couleurs, la nature des surfaces à peindre, la solidité de la peinture, et enfin l'aspect brillant ou mat qu'on veut donner à cette peinture.

a) L'essence, en diminuant la viscosité de l'huile mêlée avec la matière solide qu'on incorpore à cette dernière, en facilite l'application sur la surface à peindre.

b) Lorsque la peinture doit être plus ou moins mate, la proportion de l'essence relativement à l'huile est plus ou moins forte.

c) Lorsque la peinture doit être vernie, la proportion de l'essence ne peut être trop forte, si l'on veut éviter les gerçures de la peinture par suite de l'application du vernis.

d) Mais si la peinture doit avoir le maximum de stabilité et n'être ni mate ni vernie, que la couleur en soit foncée ou claire, on se trouve dans la nécessité de réduire la proportion de l'essence au minimum par rapport à l'huile, parce que celle-ci est le principe de la stabilité.

Voyons maintenant l'influence que l'essence de térébenthine peut avoir dans la peinture.

Il est clair que la peinture additionnée d'essence laisse, toutes choses égales d'ailleurs, après sa dessiccation un enduit plus riche en céruse pure ou colorée, relativement à l'huile de lin, que la peinture qui aurait été exclusivement composée de céruse et d'huile de lin. Il est évident encore que le *luisant* de la peinture étant dû à cette huile qui s'est séchée en passant graduellement de l'état liquide à l'état solide, toutes choses égales d'ailleurs, une peinture à l'essence laissant par la dessiccation une proportion moindre d'huile qu'une peinture dépourvue d'essence, la première devra être mate, ou moins luisante que celle-ci.

On voit donc l'extrême différence existant entre une peinture sans essence et une peinture avec essence. La première sèche en absorbant de l'oxygène sans rien perdre, tandis que la seconde sèche en absorbant de l'oxygène, mais en perdant par l'évaporation presque toute son essence. On comprend donc que moins il y aura d'essence dans une peinture, toutes choses égales d'ailleurs, et plus cette peinture retiendra d'huile après sa dessiccation, et plus dès lors elle aura de stabilité, et plus elle exigera de temps pour sécher.

Lorsqu'une peinture doit être vernie, on y ajoute beaucoup d'essence de térébenthine, afin de prévenir les gerçures. La raison de cette manière de procéder me paraît être la suivante.

Une peinture, toutes choses égales d'ailleurs, sèche d'autant plus lentement qu'elle contient plus d'huile. Or, une condition essentielle pour que la peinture ne se gerce pas

par suite de l'application du vernis, c'est qu'avant de la recevoir, elle soit parfaitement sèche, ou, en d'autres termes, parfaitement solide, et aussi adhérente à la surface du corps qui a été peint que possible. Conséquemment le vernis se gercerait par la dessiccation, à la manière de la vase d'un fossé mis à sec, que la peinture ne se gercerait pas, parce qu'elle resterait invariablement fixée où elle est; tandis que si elle avait reçu le vernis avant que sa partie intérieure eût été complétement solidifiée, sa couche superficielle étant solide et superposée à un corps mou, participerait au mouvement de retrait du vernis, faute d'être fixée à un corps solide.

D'après cela, il est aisé de concevoir qu'en mêlant beaucoup d'essence à la peinture qu'on voudra vernir, celle-ci séchera plus vite, et que dès lors on sera moins exposé à voir cette peinture se gercer par l'effet de retrait du vernis.

29. Outre les effets précédents, l'essence n'a-t-elle pas encore l'influence d'une matière siccative dans la peinture où on la fait entrer? C'est ce que je vais examiner.

30. Les expériences du tableau suivant comprennent six numéros, tant huiles que peintures au blanc de zinc.

Le n° 1 est de l'huile manganésée, telle que M. Leclaire la prépare pour son siccatif.
Le n° 2 est la même huile avec le blanc de zinc.

Le n° 3 est un mélange d'huile de lin pure et d'huile manganésée.
Le n° 4, le même mélange avec le blanc de zinc.

Le n° 5 est l'huile de lin pure mêlée à son volume d'essence et à 1/6 d'huile manganésée.
Le n° 6, le même mélange avec le blanc de zinc.

		N° 1. Huile manganésée.	N° 2. Poids.	N° 3. Poids.		
Le 9 janvier 1850, on a donné sur une planche de bois de chêne, à 10 heures du matin, une	Préparat.	5 heur. de cuisson.	Huile mangan. n° 1. 34	Huile de lin pure. 36		
		8 heur. de cuisson, avec peroxyde de manganèse.	Blanc de zinc.... 40	Huile de lin manganésée n° 1.... 16		
		1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*		
Le 10 janvier, à 10 h. du mat.		Comm. faibl. à prend.	Un peu plus que 1.	Presque embue.		
Le 11, 12, 13, 14,	10	Continue à prendre.	Continue à prendre.	Contin. de s'emboire.		
Le 15, 16, 17,	10	Continue à prendre.	Continue à prendre.	Très-embue.		
Le 18	10	Continue à prendre.	Parfaitement prise.	Très-embue.		
Le 19	10	Continue à prendre.	Presque sèche.	Très-embue.		
Le 20	10	Continue à prendre.	Presque sèche.	Très-embue.		
Le 21	10	Presque prise.	Sèche. 2e *couche.*	Très-embue.		
Le 22, 23,	10	Presque prise.	Prise.	Très-embue.		
Le 24	10	Parfaitement prise.	Sèche. 3e *couche.*	Très-embue.		
Le 25, 26,	10	Presque sèche.	Presque prise.	Très-embue.		
Le 27	10	Sèche. 2e *couche.*	Presque sèche.	Très-embue.		
Le 28	10	Comm. très-faib. à pr.	Sèche.	Très-embue.		
Le 29	10	Presque prise.		Très-embue.		
Le 30	10	Prise.		Très-embue. [unies.		
Le 31; 1, 2 févr.,	10	Presque sèche.		Comm. à pr. s. les part.		
Le 3	10	Sèche. 3e *couche.*		Prise par place.		
Le 4	10	Comm. très-faib. à pr.		Prise par place.		
Le 5	10	Continue à prendre.		Prise par place.		
Le 6	10	Presque prise.		Prise et sèche p. place.		
Le 7	10	Parfaitement prise.		Prise et sèche p. place.		
Le 8	10	Presque sèche.		Prise et sèche p. place.		
Le 9	10	Presque sèche.		Prise et sèche p. place.		
Le 10	10	Presque sèche.		Prise et sèche p. place.		
Le 11	10	Sèche.		Commence à sécher.		
Le 12, 13	10			Sèche par place.		
Le 14	10			Sèche par place.		
Le 15	10			Sèche. 2e *couche.*	1re *couche.*	
Le 16	10			Embue par pl., comm. à pr. dans d'autres.	Embue et fraîche.	
Le 17	10			Parfaitement prise.	Embue et fraîche.	
Le 18	10			Sèche. 3e *couche.*	Embue et fraîche.	Huile de lin de couche. 1re *cou*
Le 19	10			Comm. faib. à prend.	Embue et fraîche, quelques places prises.	Fraîche.
Le 20	10			Presque sèche.	Presque prise.	Fraîche.
Le 21	10			Sèche.	Presque prise.	Fraîche.
Le 22	10				Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.
Le 23	10				Fraîche.	Commence à séc
Le 24	10				Fraîche.	Presque sèche.
Le 25	10				Presque prise.	Sèche. 2e *cou*
Le 26	10				Presque sèche.	Commence à pre
Le 27	10				Sèche. 3e *couche.*	Continue.
Le 28	10				Fraîche.	Prise.
Le 1er mars,	10				Fraîche.	Sèche. 3e *co*
Le 2	10				Parfaitement prise.	Fraîche.
Le 3	10				Sèche.	Commence à pre
Le 4	10					Parfaitement pri
Le 5	10					Presque sèche.
Le 6	10					Sèche.

	N° 4. Poids.	N° 5. Volume.			N° 6. Volume.
	Huile de lin pure. . . . 36	Huile de lin pure. . 1			Huile de lin pure. . 1
	Huile de lin manganésée n° 1. 16	Essence. 1			Essence. 1
	Blanc de zinc. 56	Huile mangan. n° 1 » 1/6			Huile mangan. n° 1 » 1/6
					Blanc de zinc. . . . 2 1/2
	1re *couche.*	1re *couche.*			1re *couche.*
	Comm. à prend. comme 2.	Très-embue.			Commence à prendre.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Continue à prendre.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Continue à prendre.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Prise.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Parfaitement prise.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Commence à sécher.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Commence à sécher.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Commence à sécher.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Commence à sécher.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Continue à sécher.
	Continue à prendre.	Très-embue.			Continue à sécher.
	Quelques parties sèches.	Commence à prendre.			Continue à sécher.
	Prise génér. et part. sèch.	Prise par places.			Continue à sécher.
	Presque sèche.	Prise par places.			Presque sèche.
	Sèche. 2e *couche.*	Prise par places.			Presque sèche.
	Comm. très-faib. à prend.	Prise par places.			Sèche. 2e *couche.*
	Prise faiblement.	Prise.			Presque prise.
	Presque sèche.	Prise et sèch. par places			Parfaitement prise.
	Sèche. 3e *couche.*	Prise et sèch. par places			Sèche. 3e *couche.*
	Presque prise.	Prise et sèch. par places			Sèche.
	Parfaitement prise.	Prise et sèch. par places			
	Sèche.	Prise et sèch. par places			
		Com. à séc. et sèch. p. pl.			
		Continue à sécher.			
		Sèche. 2e *couche.*	1re *couche.*		
		Presque sèche.	Commence à sécher.		
		Parfait. sèche. 3e *couche.*	Presque sèche.	1re *couche.*	
		Prise.	Presque sèche.	Fraîche.	
		Sèche.	Sèche. 2e *couche.*	Presque prise.	
			Commence à prendre.	Presque prise.	
			Presque sèche.	Presque prise.	
			Sèche. 3e *couche.*	Presque sèche.	
			Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	
			Bien prise.	Comm. faibl. à prend.	
			Presque sèche.	Presque sèche.	
			Sèche.	Sèche. 3e *couche.*	
1re *couche.*				Commence à prendre.	
e.				Prise parfaitement.	
e.				Sèche.	
e.					
e.					
ement prise.					

Observations.

31. Toutes les huiles ont été mélangées le même jour, mais le blanc de zinc n'était incorporé qu'au moment même où l'on couchait le mélange.

Sachant que les huiles abandonnées à elles-mêmes se modifient (24 A), j'ai voulu apprécier cette influence sur les dessiccations des deuxième et troisième couches, en ayant égard à l'influence que celles-ci peuvent recevoir de la peinture qu'elles recouvrent (24 A).

C'est pour satisfaire à l'examen de ces influences que l'on a donné, en même temps que les deux couches d'huile n° 3, une première couche avec cette même huile n° 3, et en même temps que la troisième couche avec l'huile n° 3, une première couche, et qu'on a répété ces expériences avec l'huile n° 5.

32. *Résumé et conclusions.*

a) Le blanc de zinc est siccatif relativement à l'huile manganésée, puisque,

	N° 1. Huile manganésée.	N° 2. Huile manganésée. Blanc de zinc.
1re couche a séché en	18 jours.	12 jours.
2e couche.	7	3
3e couche	8	3
	33	18

b) Le blanc de zinc est siccatif relativement à l'huile de lin pure mêlée d'huile manganésée, puisque

	N° 3. Huile de lin pure. . 36 gr. Huile manganésée . 16	N° 4. Huile de lin pure. . 36 gr. Huile manganésée . 16 Blanc de zinc. . . . 56
1re couche a séché en . .	37 jours.	25 jours.
2e couche	3	4
3e couche	3	4
	43	33

c) Le blanc de zinc est siccatif relativement à l'huile de lin pure mêlée d'huile manganésée et d'essence, puisque

	N° 5.	N° 6.
	Huile de lin pure. . . . . 1 vol.	Huile de lin pure. . . . . 1 vol.
	Essence 1	Essence 1
	Huile de lin manganésée. 0 1/6	Huile de lin manganésée. 0 1/6
		Blanc de zinc 2 1/2
1re couche a séché en . .	36 jours.	25 jours.
2e couche	3	3
3e couche	2	1
	41	29

d) Dans les proportions employées nos 3 et 4, nos 5 et 6, l'essence n'a pas, à proprement parler, une influence de siccatif bien sensible; cependant il faut remarquer que la proportion du siccatif huile manganésée est bien plus forte dans les mélanges nos 3 et 4 que dans les nos 5 et 6, où se trouve l'essence.

e) L'huile de lin pure mêlée d'huile manganésée n° 3 a séché plus vite en deuxième couche qu'en première (dans le rapport de 37:3), par la double raison que le temps ou l'air a agi, et que la première couche a servi de siccatif à la seconde. En effet, le n° 3, âgé de trente-sept jours, a mis sept jours à sécher en première couche, au lieu de trois jours qu'il a mis à sécher en seconde couche.

f) Résultats analogues pour le n° 5.

33. Je vais examiner l'influence de l'essence sur la dessiccation de l'huile de lin pure, et de l'huile de lin pure mêlée avec le blanc de zinc.

Le 7 avril 1850, on mit, à 10 h. du matin	N° 1. Sur verre.	N° 2. Sur verre.	N° 3. Sur verre.	
1re *couche.*	Huile de lin.	Essence de térébenthine.	Huile de lin . . 2 Vol. Essence 1	
Le 8 avril, à 10 h. du matin.	Fraîche.	Évaporée, léger résidu (*).	Fraîche.	
Le 9.	Fraîche.	. . . . .	Fraîche.	
Le 10.	Fraîche.	. . . . .	Prise par place.	
Le 11.	Commence à sécher.	. . . . .	Sèche par place.	
Le 12.	Presque sèche.	. . . . .	Sèche. 2e *couche.*	
Le 13.	Presque sèche.	. . . . .	Fraîche.	
Le 14.	Sèche. 2e *couche.*	. . . . .	Fraîche.	
Le 15.	Fraîche.	. . . . .	Commence à prendre.	
Le 16.	Fraîche.	. . . . .	Continue.	
Le 17.	Fraîche.	. . . . .	Continue.	
Le 18.	Commence à prendre.	. . . . .	Presque prise.	
Le 19.	Continue.	. . . . .	Prise.	
Le 20.	Continue.	. . . . .	Sèche par place.	
Le 21.	Continue.	. . . . .	Sèche. 3e *couche.*	
Le 22.	Continue.	. . . . .	Fraîche.	
Le 23.	Prise.	. . . . .	Fraîche.	
Le 24.	Presque sèche.	. . . . .	Fraîche.	
Le 25.	Sèche. 3e *couche.*	. . . . .	Commence à prendre.	
Le 26.	Fraîche.	. . . . .	Prise.	
Le 27.	Fraîche.	. . . . .	Sèche.	
Le 28.	Fraîche.	. . . . .	. . . . .	
Le 29.	Commence à prendre.	. . . . .	. . . . .	
Le 30.	Prise par place.	. . . . .	. . . . .	
Le 1er mai.	Sèche par place.	. . . . .	. . . . .	
Le 2.	Sèche.	. . . . .	. . . . .	
Le 3.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
Le 4.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
Le 5.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
Le 6.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
Le 7.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	

(*) J'ai voulu savoir si, en étendant de l'huile de lin pure sur le verre où était le résidu de l'huile de térébenthine évaporée, l'huile de lin se sécherait plus vite que l'huile étendue sur du verre exempt de résidu. Cette expérience n'a pas donné de différence appréciable entre les deux huiles de lin.

	N° 4.	N° 5.	N° 6.	N° 7.
	Sur verre.	Sur bois de chêne.	Sur verre.	Sur bois de chêne.
		Peinture identique au n° 4.		Peinture identique au n° 6.
	Poids.	Poids.	Poids.	Poids.
	Huile de lin . . 1	Huile de lin. . . 1	Huile de lin . . 2	Huile de lin . . . -
	Blanc de zinc . . 1	Blanc de zinc . . 1	Essence 1	Essence . . . . .
			Blanc de zinc . . 3	Blanc de zinc .
. . . . .	Fraîche.	Fraîche.	Commence à prendre.	Fraîche.
. . . . .	Prise.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.
. . . . .	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.	Presque prise.	Fraîche.
. . . . .	Fraîche.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*	Prise.
. . . . .	Presque prise.	Fraîche.	Prise.	Commence à sécher.
. . . . .	Presque sèche.	Fraîche.	Sèche.	Presque sèche.
. . . . .	Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	. . . . .	Parfaitement sèche.
. . . . .	Fraîche.	Fraîche.		
. . . . .	Commence à prendre.	Fraîche.		
. . . . .	Presque prise.	Fraîche.		
. . . . .	Sèche.	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Partie fraîche.		
. . . . .	. . . . .	Partie sèche.		
. . . . .	. . . . .	Partie sèche.		
. . . . .	. . . . .	Sèche.		

34. *Résumé et conclusions.*

a) L'huile de lin pure sèche moins vite sur verre que lorsqu'elle est mêlée à la moitié de son volume d'essence.

Durée de la dessiccation.	N° 1. Huile de lin.	N° 3. Huile de lin. . 2 vol. Essence. . . . 1
1re couche	7 jours.	5 jours.
2e couche.	11	9
3e couche.	7	6
	25	20

Il est clair qu'ici je n'examine pas si la dessiccation est plus rapide dans le dernier cas que dans le premier, parce qu'il reste sur la surface du verre moins d'huile de lin lorsqu'elle a été appliquée mélangée avec l'essence. Je parle simplement du cas où l'on use d'huile pure, comparativement à de l'huile mêlée avec la moitié de son volume d'essence.

b) L'huile de lin mêlée au blanc de zinc sèche plus vite que lorsqu'elle est mêlée à l'essence. Le rapport est de 11 : 20.

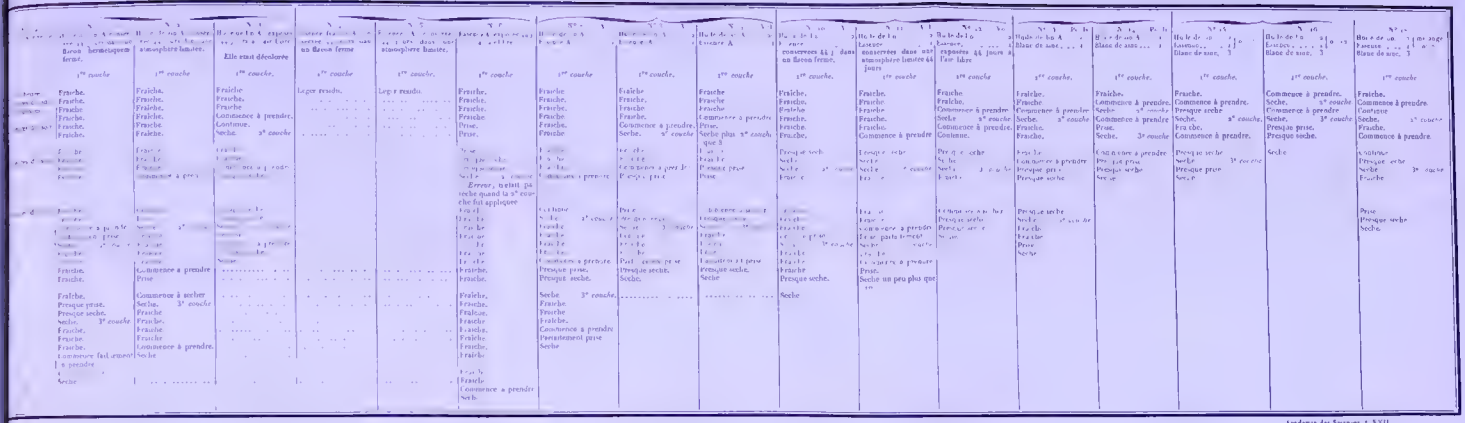
c) L'huile de lin mêlée à son poids de blanc de zinc sèche plus vite sur le verre que sur le chêne, puisqu'en première couche la durée de la dessiccation est de trois jours sur verre, et de trente jours sur chêne. N° 4 et n° 5.

d) L'huile de lin et le blanc de zinc sont rendus plus siccatifs par l'essence qu'ils ne le seraient sans elle, soit sur verre, soit sur chêne.

		N° 4. Huile de lin. Blanc de zinc.	N° 6. Huile de lin. Essence. Blanc de zinc.
Durée de la dessiccation. Sur verre.	1re couche . .	3 jours.	2 jours.
	2e couche . .	4	2
	3e couche . .	4	2
		11	6
		N° 5.	N° 7.
Sur chêne.	1re couche . .	30 jours.	7 jours.

	N° 12. Vol.	N° 13. Poids.	N° 14. Poids	N° 15.	N° 16.	N° 17.
	Huile de lin..... 2 Essence..... 1 exposées 44 jours à l'air libre.	Huile de lin A... 1 Blanc de zinc... 1	Huile de lin A"... 1 Blanc de zinc.... 1	Huile de lin... 2 Essence..... 1 Blanc de zinc.. 3 } n° 10.	Huile de lin... 2 Essence..... 1 Blanc de zinc.. 3 } n° 12.	Huile de lin.. 2 Essence..... 1 Blanc de zinc. 3 } mélange n° 7.
	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
10, à 10 heu	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.	Commence à prendre.	Fraîche.
9 heures	Fraîche.	Fraîche.	Commence à prendre.	Commence à prendre.	Sèche. 2e *couche.*	Commence à prendre.
11, à 8 heu	Commence à prendre.	Commence à prendre.	Sèche. 2e *couche.*	Presque sèche.	Commence à prendre.	Continue.
12.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Commence à prendre.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*
8 heures	Commence à prendre.	Fraîche.	Prise.	Fraîche.	Presque prise.	Fraîche.
13.	Continue.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*	Commence à prendre.	Presque sèche.	Commence à prendre.
14.	Presque sèche.	Fraîche.	Commence à prendre.	Presque sèche.	Sèche.	Continue.
8 heures	Sèche.	Commence à prendre.	Presque prise.	Sèche. 3e *couche.*	.....	Presque sèche.
15.	Sèche. 3e *couche.*	Presque prise.	Presque sèche.	Presque prise.	.....	Sèche. 3e *couche.*
16.	Fraîche.	Presque sèche.	Sèche.	Sèche.	.....	Fraîche.
8 heures	Commence à sécher.	Presque sèche.	.....	.....	.....	Prise.
17.	Presque sèche.	Sèche. 3e *couche.*	.....	.....	.....	Presque sèche.
18.	Presque sèche.	Fraîche.	.....	.....	.....	Sèche.
19.	Sèche.	Fraîche.				
30.	.....	Prise.				
31.	.....	Sèche.				
er juin.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.... 30.						
er juillet.						

TABLEAU 4ᵉ (alinéa 35 et 36, p. 695 et 696)



Académie des Sciences, t. XXII

35. Pour savoir si l'huile de lin pure ou l'huile mêlée d'essence devenait plus siccative avec le temps, parce qu'elle éprouvait l'influence de l'oxygène, soit en l'absorbant, soit en en recevant toute autre action, j'ai placé pendant quarante-quatre jours de l'huile de lin pure, de l'essence de térébenthine, de l'huile de lin mêlée à la moitié de son volume d'essence, dans trois conditions différentes, savoir: 1° dans un flacon absolument rempli; 2° dans un flacon bouché rempli au cinquième de sa capacité; 3° dans une soucoupe exposée à l'air. Ces huiles ont été ensuite étendues sur du verre, soit pures, soit mêlées de blanc de zinc. (Voyez à la fin du mémoire le 4e tableau.)

36. *Résumé et conclusions.*

a) L'exposition à l'air tend à rendre l'huile de lin plus siccative qu'elle ne l'aurait été sans cela. Ce n'est donc pas le temps seul qui augmente la disposition de l'huile à sécher, disposition dont il a été fait mention plus haut (24 et 35).

	N° 1. Huile de lin A conservée 44 jours dans un flacon fermé.	N° 2. Huile de lin A′ conservée 44 jours dans un flacon rempli aux 4/5 d'air.	N° 3. Huile de lin A″ exposée 44 jours à l'air libre.
1re couche a séché en. . .	11 jours.	9 jours.	4 jours.
2e couche	8	8	5
3e couche	6	6	4
	25	23	13

b) Le résidu de l'essence de térébenthine exposée à l'air étendue sur le verre, ne sèche pas dans un laps de temps où sèche non-seulement l'huile de lin exposée à l'air, mais même l'huile de lin pure.

	Résidu de l'essence exposée à l'air.	N° 1. Huile de lin A.	N° 2. Huile de lin A″.
1re couche a séché en. . .	7 jours.	11 jours.	4 jours.
2e couche	36	8	5
3e couche		6	4
		25	13

c) L'influence de l'air est très-sensible sur les mélanges d'huile de lin et d'essence, soit qu'on fasse les mélanges au moment de s'en servir, soit qu'on ait exposé à l'air les mélanges eux-mêmes.

	N° 7. Huile A. Essence A.	N° 8. Huile A'. Essence A'.	N° 9. Huile A''. Essence A''.	N° 10. Mélange d'huile A et d'essence A préservé 44 jours de l'air.	N° 11. Mélange d'huile A et d'essence A exposé 44 jours à l'air d'un flacon.	N° 12. Mélange d'huile A et d'essence A exposé 44 jours à l'air libre.
1re couche a séché en . .	8 j.	4 j.	4 j.	6 j.	6 j	3 j.
2e couche	8	5	5	5	5	2 1/2
3e couche	6	6	6	5	4	4
	22	15	15	16	15	9 1/2

Ainsi, n° 7 a séché en 22 jours et n° 9 en 15 jours.
n° 10 16 n° 12 9 1/2.

Remarque.

d) L'influence de l'air sur l'huile de lin et l'essence se fait pareillement sentir lorsque le blanc de zinc y est associé.

	N° 13. Huile de lin A. Blanc de zinc.	N° 14. Huile de lin A''. Blanc de zinc.	N° 15. Huile de lin A. Essence A. Blanc de zinc.	N° 16. Huile de lin A''. Essence A''. Blanc de zinc.
1re couche a séché en. .	3 j.	2 j.	3 j.	1 1/2 j.
2e couche	6	2	2 1/2	2
3e couche	4	3	2	2
	13	7	7 1/2	5 1/2

L'influence de l'essence sur l'huile non exposée à l'air pour en hâter la dessiccation est réelle, et surtout lorsque l'huile et l'essence ont été mélangées, puis exposées à l'air; il semble donc bien que l'essence agit comme siccatif, mais c'est faiblement.

37. Les expériences dont le tableau suivant présente les résultats montrent ce qu'on est en droit d'attendre de l'emploi de l'huile de lin exposée à l'air, soit pure, soit préalablement mêlée à la moitié de son volume d'essence:

Le n° 1 présente l'huile de lin pure;

Le n° 2, cette même huile mêlée avec le blanc de zinc.

Le n° 3 présente l'huile de lin pure et le blanc de zinc, auxquels on a ajouté une huile de lin qui avait été exposée 60 jours à l'air dans une capsule; une pellicule commençait à se former à sa surface. Elle était devenue épaisse ou visqueuse, et avait perdu presque toute sa couleur.

Le n° 4 présente l'huile de lin pure et le blanc de zinc, auxquels on a ajouté une huile de lin qui avait été mêlée avec la moitié de son volume d'essence, puis exposée 60 jours à l'air; il s'était formé une pellicule, et l'huile retenait quelque chose de la térébenthine.

Le n° 5 présente l'huile de lin pure et le blanc de zinc, auxquels on a ajouté de l'huile de lin qui avait été conservée dans un pot découvert. Cette huile s'est comportée comme l'huile du n° 3.

Le n° 6 présente l'huile de lin, le blanc de zinc et l'huile manganésée. Ce mélange est le terme de comparaison de la peinture telle qu'on l'emploie quand on n'y met pas d'essence.

Le n° 7 présente l'huile de lin exposée 60 jours à l'air, employée avec le blanc de zinc.

Le n° 8 présente l'huile de lin exposée à l'air après avoir été mêlée avec l'essence de térébenthine, employée avec le blanc de zinc.

Le 24 mai 1850, à 9 h. du matin, on a étendu sur verre.	N° 1. Huile de lin pure.	N° 2. Poids. Huile de lin pure. 100 Blanc de zinc ... 100	N° 3. Poids. Huile de lin..... 90 Blanc de zinc..... 100 Huile de lin exposée à l'air 60 jours (A)..... 10	N° 4. Poids. Huile de lin..... 90 Blanc de zinc..... 100 Huile de lin 2 / Exposées à Essence... 1 / l'air (B) 60 j. 10
	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
Le 25, à 9 h.	Fraîche.	Fraîche.	Comm. très-faibl. à prendre.	Commence très-faibl. à prendre.
Le 25, à 9 du soir.	.....	.....	.....	.....
Le 26.	Fraîche.	Commence faiblement à prendre.	Presque sèche.	Presque sèche, un peu moins que n° 3.
Le 27.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*
Le 28.	Commence à prendre.	Fraîche.	Commence à prendre.	Commence à prendre.
Le 29.	Sèche. 2e *couche.*	Presque sèche.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*
Le 30.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*	Presque prise.	Presque prise.
Le 1er juillet.	Commence à prendre.	Comm. faibl. à prendre.	Sèche.	Sèche.
Le 2.	Continue.	Presque sèche.		
Le 3.	Presque prise.	Sèche.		
Le 4.	Presque sèche.			
Le 5.	Sèche. 3e *couche.*			
Le 6.	Fraîche.			
Le 7.	Comm. faibl. à prendre.			
Le 8.	Continue.			
Le 9.	Commence à sécher.			
Le 10.	Sèche.			
Résumé.				
La 1re couche a séché en..	5 jours.	3 jours.	3 jours.	3 jours.
La 2e.....	6	3	2	2
La 3e.....	5	3	2	2
	16	9	7	7

Conclusions.

a) Les nos 1 et 2 montrent que le blanc de zinc est siccatif relativement à l'huile de lin pure et au mélange d'huile et de blanc de zinc, appliqués sur verre.

b) L'huile de lin exposée à l'air, pure ou mêlée d'essence, est décidément siccative, puisque :

1° Mêlée à l'huile de lin pure dans le rapport de 10 à 90, elle a donné des peintures qui ont séché en sept jours, tandis que l'huile de lin pure mêlée de blanc de zinc a séché en neuf jours.

Mais ces mélanges sèchent plus lentement que le mélange de 10 d'huile manganésée et de 90 d'huile de lin pure.

2° L'huile de lin exposée à l'air jusqu'à ce qu'elle commence à se couvrir d'une pellicule, mêlée au blanc de zinc

N° 5.	Poids.	N° 6.	Poids.	N° 7.	Poids.	N° 8.	Poids.
Huile de lin	90	Huile de lin	90	Huile de lin exposée à l'air (A)	100	Huile .. 2 | Exposées à Essence. 1 | l'air (B) ..	100
Blanc de zinc	100	Blanc de zinc	100	Blanc de zinc	100	Blanc de zinc	100
Huile gardée dans un pot découvert	10	Huile manganésée	10				
1re *couche.*		1re *couche.*		1re *couche.*		1re *couche.*	
Fraîche.		Presque sèche.		Presque sèche.		Presque sèche.	
.....		Sèche.		Sèche.		Sèche.	
Parfaitement prise.		2e *couche.*		2e *couche.*		2e *couche.*	
Sèche. 2e *couche.*		Sèche. 3e *couche.*		Sèche. 3e *couche.*		Sèche. 3e *couche.*	
Commence à prendre.		Sèche.		Sèche.		Sèche.	
Sèche. 3e *couche.*							
Presque prise.							
Sèche.							
3 jours.		1 1/2 jours.		1 1/2 jours.		1 1/2 jours.	
2		1		1		1	
2		1		1		1	
7		3 1/2		3 1/2		3 1/2	

donne une peinture qui sèche aussi vite que la peinture à laquelle on a ajouté, pour 90 d'huile de lin pure, 10 d'huile manganésée.

On peut donc se passer de siccatif lorsqu'on emploie l'huile de lin exposée à l'air; et si on trouvait qu'elle séchât trop vite, on pourrait l'employer mélangée d'huile de lin pure.

c) La peinture faite exclusivement avec le blanc de zinc et l'huile de lin exposée à l'air, a l'aspect d'un vernis, et non d'une peinture ordinaire dans laquelle la brosse a laissé des lignes parallèles. Les nos 7 et 8 ne présentent aucune de ces lignes. Je crois que dans la peinture des tableaux on pourrait tirer parti de l'emploi de cette huile, en en opposant l'effet à celui d'une huile ordinaire.

CHAPITRE IV.

Recherches sur l'influence de la litharge, du peroxyde de manganèse et de la chaleur, pour rendre l'huile de lin siccative.

38. L'huile lithargirée qu'on emploie communément sous le nom de *siccatif*, se prépare ordinairement de la manière suivante. On fait chauffer jusqu'au *bouillon* de l'huile de lin dans une marmite de fonte; on l'écume. Après trois ou six heures, on ajoute $\frac{1}{10}$ de son poids environ de litharge, et on continue à chauffer cinq ou six heures(1).

M. Leclaire prépare l'huile manganésée en faisant chauffer l'huile seule au *bouillon* cinq heures, puis huit heures au moins avec le peroxyde de manganèse.

Les expériences consignées dans le tableau suivant ont été entreprises avec l'intention d'apprécier l'influence de la chaleur, indépendamment de celle de l'oxyde métallique, et, en outre, de savoir si la chaleur est employée de la manière la

(*) Voici d'autres procédés :

100 kilogr. d'huile de lin, aussi ancienne que possible, sont chauffés 6 heures environ. On y ajoute 6 kilogr. de litharge et 3 kilogr. de terre d'ombre. On fait chauffer 6 heures, on laisse reposer, et on décante.

On falsifie l'huile lithargirée en y ajoutant de l'huile de résine, de l'essence et de l'arcanson. Cette addition est tout à fait mauvaise.

	DD.		D.	FF.	F.
Le 5 ja	in B bouillie 3 h. du ma		Huile de lin B bouillie 3 h. avec du peroxyde de manganèse qui avait servi.	Huile de lin B bouillie 8 h. sans addition.	Huile de lin B bouillie 8 h. avec peroxyde de manganèse qui avait servi.
	ation (identique à une p				
	chêne.				
	re *couche.*		1re *couche.*	1re *couche* Elle était si épaisse qu'il a fallu la faire chauffer et l'étendre avec le doigt.	1re *couche*
Le 6 ja	C.	.....	Comm. faiblement à prendre.	Pas de changement.	Commence à prendre.
Le 7.	C.	.....	Continue.	Pas de changement.	Continue.
Le 8.	C.	.....	Continue.	Pas de changement.	Continue.
Le 9.	C.	.....	Presque sèche.	Pas de changement.	Presque prise.
Le 10.	C.	.....	Sèche. 2e *couche.*	Pas de changement.	Presque prise.
Le 11.	C.	.....	Comm. très-faibl. à prendre.	Pas de changement.	Presque prise.
Le 12.	C.	.....	Continue.	Pas de changement.	Presque prise.
Le 13.	C.	.....	Parfaitement prise.	Pas de changement.	Presque prise.
Le 14.	C.	.....	Prusque sèche.	Pas de changement.	Sèche sur les parties unies.
Le 15.	C.	.....	Presque sèche.	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 16.	C.	.....	Sèche. 3e *couche.*	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 17.	C.	.....	Fraîche.	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 18.	C.	.....	Comm. faiblement à prendre.	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 19.	C.	.....	Prise.	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 20.	C.	.....	Parfaitement prise.	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 21.	C.	.....	Presque sèche.	Pas de changement.	Sèche. 2e *couche.*
Le 22.	C.	.....	Sèche.	Pas de changement.	Comm. faiblement à prendre.
Les 23	C, peut-être plus	.....	.....	Pas de changement.	Continue.
Le 30.	C, peut-être plus	.....	.....	Pas de changement.	Prise.
Le 31.	C.	.....	.....	Pas de changement.	Sèche. 3e *couche.*
Le 1er	C.	.....	.....	Pas de changement.	Fraîche.
Le 2.	C, plus avancée.	.....	.....	Pas de changement.	Commence à prendre.
Les 3,	ée que CC.	.....	.....	Pas de changement.	Continue.
Le 7.	e partie sèche.	.....	.....	Pas de changement.	Parfaitement prise.
Les 8,	e partie sèche.	.....	.....	Pas de changement.	Presque sèche.
Le 13.	grande partie.	.....	.....	Pas de changement.	Sèche.
Le 14.	2e *couche.*	1re *couche.*	.....	Pas de changement.	
Le 15.		Fraîche.	.....	Pas de changement.	
Le 16.	ent prise.	Fraîche.	.....	Prise en quelques parties.	
Le 17.	èche.	Fraîche.	.....	Continue lentement.	
Le 18.	3e *couche.*	Fraîche.	.....	Continue.	
Le 19.		Fraîche.	.....	Continue.	
Les 20	rement.	Fraîche.	.....	Continue.	
Le 21.					
Le 22.		Fraîche.	.....	Continue.	
Le 23.	rise.	Fraîche.	.....	Continue.	
Le 24.	rise.	Fraîche.	.....	Continue.	
Le 25.	rise.	Commence à prendre.			
Le 26.	ent prise.	Prise.	.....	Continue.	
Le 27.	èche.	Sèche par place.	.....		
Le 28.		Sèche par place.	.....	Continue.	
Le 1er	.....	Sèche par place.	.....	Continue.	
Le 2.	.....	Sèche par place.	.....	Continue.	
Le 3.	.....	Sèche. 2e *couche.*	.....	Presque sèche.	
Le 4.	.....	Fraîche.	.....	Presque sèche.	
Les 5,	.....	Fraîche.	.....	Sèche.	
Le 7.	.....	Comm. très-faibl. à prendre.			
Le 8.	.....	Continue.			
Les 9,	.....	Presque sèche.			
Les 11	.....	Sèche.			
13, 14,					
20, 21,					
1er avr					
Le 14.					
Les 15					
Le 18.					
Le 19.					
Le 20.					
Le 21.					
Le 22.					
Le 23.					
Le 24.					
Le 25.					
Les 26					
Le 28.					
Le 29.					
Le 30.					

TABLEAU 5e (alinéa 39, p. 701).

Le 5 janvier 1850, à 8 h du matin, on étendit sur une planche de bois de chêne.......	A Huile de lin pure.	EE. Huile de lin A bouillie 3 h		E. Huile de lin A bouillie 3 h avec 1/10 de son poids de litharge	B Huile de lin A bouillie 5 h sur un feu doux, dans une marmite de fonte	CC. Huile de lin B bouillie 3 h sans addition.		C Huile de lin B bouillie 3 h avec 1/10 de son poids de litharge	DD. Huile de lin B bouillie 3 h sans addition (identique à CC).		D Huile de lin B bouillie 3 h avec du peroxyde de manganèse qui avait servi	FF Huile de lin B bouillie 8 h sans addition	F Huile de lin B bouillie 8 h avec peroxyde de manganèse qui avait servi
	1re couche	1re couche		1re couche	1re couche	1re couche		1re couche	1re couche		1re couche	1re couche. Elle était si épaisse qu'il a fallu la faire chauffer et l'étendre avec le doigt	[illegible]
[illegible]	Fraîche et embue	Fraîche et très-embue.	...	Presque sèche.	Fraîche, peu embue à cause de sa viscosité	Fraîche, plus embue que B.	...	Comm. faiblement à prendre	Comme CC.	...	Comm. faiblement à prendre.	Pas de changement.	Commence à prendre
[illegible]	Fraîche et embue.	Fraîche et très-embue	...	Sèche 2e couche	Fraîche.	Fraîche	...	Presque prise.	Comme CC.	...	Continue.	Pas de changement	Continue
[illegible]	Fraîche et embue	Fraîche et très-embue	...	Parfaitement prise.	Fraîche.	Fraîche.	...	Presque sèche	Comme CC.	...	Continue	Pas de changement.	Continue
[illegible]	Fraîche et embue.	Très-embue.	...	Presque sèche.	Continue à s'emboire	Commence à s'emboire sensiblement	...	Sèche 2e couche	Comme CC.	...	Presque sèche	Pas de changement.	Presque prise
[illegible]	Très-embue.	Très-embue		Sèche 3e couche	Presque embue.	Continue.	...	Comm. faiblement à prendre	Comme CC.	...	Sèche. 2e couche	Pas de changement	Presque prise
[illegible]	Très-embue	Très-embue.	...	Presque sèche.	Presque embue	Continue	...	Continue.	Comme CC.	...	Comm. très-faibl. à prendre	Pas de changement.	Presque prise
[illegible]	Très-embue	Très-embue.	...	Sèche.	Presque embue.	Continue	...	Presque sèche.	Comme CC.	...	Continue.	Pas de changement.	Presque prise
[illegible]	Très-embue	Très-embue.	...	...	Presque embue.	Continue	...	Presque sèche	Comme CC.	...	Parfaitement prise.	Pas de changement	Presque prise
[illegible]	Très-embue.	Très-embue.	...	...	Presque embue.	Continue	...	Sèche. 3e couche	Comme CC.	...	Presque sèche	Pas de changement	Sèche sur les parties [illegible]
[illegible]	Très-embue	Très-embue.	...	...	Presque embue	Continue	...	Commence à prendre.	Comme CC	...	Presque sèche.	Pas de changement	Presque sèche
[illegible]	Très-embue.	Très-embue	...	...	Presque embue.	Continue.	...	Continue	Comme CC.	...	Sèche. 3e couche	Pas de changement	Presque sèche
[illegible]	Très-embue.	Très-embue.	...	...	Presque embue	Continue.	...	Presque prise.	Comme CC.	...	Fraîche.	Pas de changement	Presque sèche
[illegible]	Très-embue.	Très-embue.	...	...	Presque embue.	Continue	...	Presque sèche	Comme CC	...	Comm. faiblement à prendre	Pas de changement.	Presque sèche
[illegible]	Très-embue.	Très-embue		...	Presque embue.	Presque embue	...	Presque sèche.	Comme CC	...	Prise.	Pas de changement.	Presque sèche
[illegible]	Très-embue	Très-embue		...	Presque embue	Presque embue.	...	Sèche.	Comme CC.	...	Parfaitement prise.	Pas de changement	Presque sèche
[illegible]	Très-embue.	Très-embue			Presque embue	Presque embue	...	...	Comme CC.	...	Presque sèche	Pas de changement	Sèche 2e couche
[illegible]	Très-embue	Très-embue			Presque embue.	Presque embue	...	...	Comme CC.	...	Sèche	Pas de changement	Comm. faiblement à p[illegible]
[illegible]	Très-embue.	Très-embue			Presque embue	Presque embue	...	...	Comme CC, peut-être plus avancée	...	...	Pas de changement	Continue
[illegible]	Très-embue.	Très-embue			Presque embue	Comm. à prendre par place	...	...	Comme CC, peut-être plus avancée.	...	...	Pas de changement	Prise.
[illegible]	Très-embue.	Comm. à prendre par place	...	...	Presque embue	Continue	...	...	Comme CC.	...	...	Pas de changement.	Sèche 3[illegible]
[illegible]	Très-embue.	Continue à prendre.	...	...	Presque embue.	Continue	...	...	Comme CC.	...	...	Pas de changement	Fraîche
[illegible]	Très-embue	Continue.	...	...	Presque embue.	Continue.	...	...	Comme CC, plus avancée	...	...	Pas de changement	Commence à prendre
[illegible]	Très-embue	Sèche par place.	...	...	Presque embue.	Continue et commence à sécher	...	...	Plus avancée que CC	...	...	Pas de changement.	Continue
[illegible]	Très-embue.	Sèche par place		...	Presque embue	Sèche en partie	...	...	En grande partie sèche.	...	...	Pas de changement	Parfaitement pr[illegible]
[illegible]	Très-embue	Sèche par place		...	Embue et parties sèches	Sèche en partie	...	...	En grande partie sèche	...	...	Pas de changement	Presque sèche
[illegible]	Très-embue	Sèche par place		...	Embues et parties sèches	Sèche en grande partie.	...	...	Sèche en grande partie.	...	...	Pas de changement	Sèche
[illegible]	Très-embue	Presque sèche		...	Embue et parties sèches.	Sèche. 2e couche	1re couche.	...	Sèche 2e couche	1re couche	...	Pas de changement	
[illegible]	Très-embue.	Sèche	1re couche	...	Comm. à sécher en entier	Fraîche.	Fraîche.	...	Fraîche.	Fraîche.	...	Pas de changement.	
[illegible]	Très-embue	Embue et fraîche	Fraîche	...	Continue.	Commence à prendre.	Fraîche et embue	...	Parfaitement prise.	Fraîche.	...	Prise en quelques parties	
[illegible]	Très-embue	Fraîche.	Fraîche.	...	Continue.	Parfaitement prise	Fraîche	...	Presque sèche.	Fraîche.	...	Continue lentement	
[illegible]	Très-embue.	En partie sèche.	Fraîche.	...	Continue.	Sèche. 3e couche	Fraîche	...	Sèche 3e couche.	Fraîche.	...	Continue	
[illegible]	Très-embue.	Sèche. 3e couche	Fraîche.	...	Continue.	Fraîche	Fraîche	...	Fraîche	Fraîche	...	Continue	
[illegible]	Très-embue	Fraîche et embue par place.	Fraîche.	...	Sèche. 2e couche	Presque prise	Fraîche	...	Prise légèrement.	Fraîche.	...	Continue	
[illegible]	...	...	...	...	Fraîche.	Parfaitement prise	Fraîche	...	Continue		...		
[illegible]	Très-embue	Commence à prendre.	Fraîche.	...	Fraîche.	Parfaitement prise.	Fraîche.	...	Continue.	Fraîche.	...	Continue	
[illegible]	Très-embue	Parfaitement prise	Fraîche.	...	Commence à prendre.	Presque sèche	Fraîche	...	Presque prise	Fraîche.	...	Continue	
[illegible]	Très-embue.	Sèche.	Fraîche	...	Continue.	Sèche.	Comm. faiblement à prendre	...	Presque prise.	Fraîche.	...	Continue	
[illegible]				...	Prise.	...	Continue.	...	Presque prise.	Commence à prendre	...		
[illegible]	Très-embue.	...	Fraîche.	...	Parfaitement prise.	...	Commence à sécher	...	Parfaitement prise.	Prise.	...	Continue	
[illegible]				...	Sèche 3e couche	...	Sèche 2e couche	...	Presque sèche.	Sèche par place.	...		
[illegible]	Très-embue	...	Fraîche.	...	Fraîche.	...	Fraîche	...	Sèche.	Sèche par place.	...	Continue	
[illegible] à 8 heures	Très-embue.	...	Fraîche	...	Fraîche.	...	Fraîche	...	...	Sèche par place	...	Continue	
[illegible]	Très-embue	...	Fraîche.	...	Comm. faiblement à prendre	...	Fraîche.	...	...	Sèche par place.	...	Continue.	
[illegible]	Très-embue.	...	Fraîche.	...	Prise.	...	Fraîche	...	...	Sèche 2e couche	...	Presque sèche	
[illegible]	Très-embue.	...	Fraîche	...	Parfaitement prise	...	Comm. faiblement à prendre.	...	...	Fraîche	...	Presque sèche	
[illegible]	Très-embue.	...	Fraîche	...	Presque sèche.	...	Presque prise et prise.	...	...	Fraîche.	...	Sèche	
[illegible]	Très-embue	...	Fraîche	...	Sèche.	...	Parfaitement prise	...	...	Comm. très-faibl. à prendre			
[illegible]	Très-embue		Fraîche				Presque sèche	...	...	Continue			
[illegible]	Très-embue		Sèche.				Sèche.	...	...	Presque sèche			
[illegible]	Très-embue									Sèche			
[illegible]	Très-embue												
[illegible]	Très-embue												
[illegible]	Très-embue, graissant le papier												
[illegible]	Sèche 2e couche	1re couche											
[illegible]	Fraîche	Embue et fraîche											
[illegible]	Commence à sécher.	Fraîche											
[illegible]	Presque sèche partout	Fraîche											
[illegible]	Sèche	Fraîche											
[illegible]		Fraîche											
[illegible]	3e couche (*)	Fraîche											
[illegible]	Fraîche.	Fraîche											
[illegible]	Commence à prendre	Fraîche											
[illegible]	Sèche	Fraîche											
[illegible]		Fraîche											
[illegible]		Commence à sécher											
[illegible]		Continue											
		Sèche											

(*) L'huile de la 3e couche, étendue sur une feuille de verre, était sèche après 48 heures.

plus utile au but qu'on veut atteindre. La chaleur a été conduite par un ouvrier habitué à ces opérations.

Je me sers du mot *bouillir* comme on s'en sert dans les ateliers; il exprime que l'on fait chauffer l'huile de manière qu'il s'en dégage quelques bulles de gaz de temps en temps.

39 et 40. *Résumé et conclusions* des expériences exposées dans le 5e tableau. (Voyez à la fin du mémoire.)

a) L'huile de lin, par une ébullition de 3 heures, devient plus siccative qu'elle ne l'aurait été sans cela; car

	A. Huile de lin pure.	EE. Huile de lin bouillie 3 heures.
1re couche a séché en ...	99 jours.	41 jours.
2e couche.....	6	4
3e couche.....	3	4
	108	49

b) L'huile de lin bouillie avec $\frac{1}{10}$ de litharge pendant 3 heures est bien plus siccative que si elle eût été chauffée sans le contact de cet oxyde; car

	E.
1re couche a séché en.....	2 jours.
2e couche.....	3
3e couche.....	2
	7

C'est donc une grande erreur de croire, avec quelques personnes, que dans le procédé *tel qu'on le pratique* généralement la chaleur seule agit.

c) L'huile de lin bouillie sans addition 5 heures est moins siccative que si l'ébullition n'eût été que de 3 heures,

	B.
1re couche a séché en.....	54 jours.
2e couche.....	6
3e couche.....	8
	68

puisque l'huile bouillie 3 heures a séché en 49 jours.

d) L'huile de lin qui a préalablement bouilli sans addition 5 heures, bouillie de nouveau 3 heures, n'éprouve guère de

changement dans sa propriété siccative, tandis qu'elle devient plus siccative si elle a bouilli le même temps sur la litharge; mais elle est moins siccative que l'huile qui a bouilli 3 heures avec cet oxyde, sans avoir subi d'ébullition préalable.

	CC. Huile de lin bouillie 5 h. Bouillie de nouveau 3 h.	C. Huile de lin bouillie 5 h. Bouillie de nouveau avec 1/10 de litharge 3 h.	E. Huile bouillie 3 h. avec litharge.
1re couche a séché en...	40 jours.	4 jours.	2 jours.
2e couche.....	4	5	3
3e couche.....	6	6	2
	50	15	7

e) L'huile de lin qui a préalablement bouilli 5 heures, bouillie 3 heures sur du peroxyde de manganèse qui avait déjà servi à une opération semblable, est à peu près aussi siccative que l'huile qui a bouilli sur la litharge dans les mêmes circonstances; mais elle est plus siccative que si l'ébullition sur le peroxyde de manganèse eût duré 8 heures. Enfin, l'huile qui a bouilli 5 heures, bouillie seule encore 8 heures, devient visqueuse, et, employée en 1re couche, elle exige un temps considérable pour sécher.

	D. Huile de lin bouillie 5 h. Bouillie de nouveau 3 h. avec le peroxyde de manganèse.	F. Huile de lin bouillie 5 h. Bouillie de nouveau 8 h. avec le peroxyde de manganèse.	FF. Huile de lin bouillie 5 h. Bouillie de nouveau 8 h. sans addition.
1re couche a séché en	5 jours.	16 jours.	54 jours.
2e couche.....	6	10	
3e couche.....	6	13	
	17	39	

f) On voit aussi que, dans les essais comparatifs, la présence de l'oxyde de plomb ou de manganèse a concouru avec la chaleur à augmenter la propriété siccative de l'huile.

41. L'ébullition directe de l'huile avec la litharge durant 3 heures seulement, ayant donné plus de propriété siccative

que l'huile n'en aurait acquis par le procédé ordinaire, c'est-à-dire, par une ébullition préalable de 3 à 6 heures (38) avant le traitement par la litharge, je voulus constater ce résultat par de nouvelles expériences.

Le 19 janvier 1850, à 10 heures du matin, on appliqua sur une planche de bois de chêne.	A. Huile de lin bouillie 5 heures dans un ballon de verre, au bain de sable, sur un feu continu.	Huile de lin bouillie 3 heures avec 15 pour 100 de litharge neuve.	Huile de lin bouillie 3 heures avec 15 p. 100 de litharge qui avait servi une fois à la même opération.	Huile de lin bouillie 3 heures avec 15 pour 100 de peroxyde de manganèse neuf.
	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
Le 20 janvier, à 10 h.	Commence à s'emboire.	Commence très-légèrement à prendre.	Parfaitement prise.	Fraîche.
Le 21.	S'emboit.	Continue.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.
Le 22.	S'emboit.	Presque prise.	Presque sèche.	Fraîche.
Le 23.	S'emboit.	Presque sèche.	Sèche.	Fraîche.
Le 24.	S'emboit.	Sèche. 2e *couche.*	Parf. sèche. 3e *couche.*	Fraîche.
Le 25.	S'emboit.	Comm. faibl. à prendre.	Prise parfaitement.	Fraîche (*).
Le 26.	S'emboit.	Prise.	Presque sèche.	Fraîche.
Le 27.	S'emboit.	Presque sèche.	Sèche.	Fraîche.
Le 28.	Presque embue.	Sèche. 3e *couche.*	.....	Fraîche et parties sèches.
Le 29	Presque embue.	Commence très-faiblement à prendre.	.....	Presque sèche.
Le 30.	Presque embue.	Presque prise.	.....	Sèche. 2e *couche.*
Le 31.	Presque embue.	Presque sèche.	.....	Fraîche.
Le 1er février.	Presque embue.	Presque sèche.	.....	Comm. faibl. à prendre.
Le 2.	Presque embue.	Sèche.	.....	Presque sèche.
Le 3.	Presque embue.	.....	.....	Sèche. 3e *couche.*
Le 4.	Presque embue.	.....	.....	Comm. à prendre faibl.
Le 5.	Presque embue.	.....	.....	Parfaitement prise.
Le 6.	Presque embue.	.....	.....	Presque sèche.
Le 7.	Presque embue.	.....	.....	Presque sèche.
Le 8.	Presque embue.	.....	.....	Sèche.
Les 9, 10, 11, 12.	Presque embue.	.....		
Les 13, 14, 15... 28.	Commence et continue à sécher.	.....		(*) Formation de petits cercles bruns qui ont peu à peu augmenté.
Les 1er, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 mars	Continue à sécher.	.....		
Le 8.	Presque sèche.	.....		
		1re *couche.*		
Le 9.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.		
Les 10, 11, 12, 13, 14.	Fraîche.	Commence à prendre.		
Les 15 et 16.	Commence à prendre.	Prise.		
Les 17 et 18.	Prise.	Parfaitement prise.		
Les 19 et 20.	Parfaitement prise.	Presque sèche.		
Les 21 et 22.	Presque sèche.			
		2e *couche.*		
Le 23.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche.		
Les 24, 25, 26, 27, 28, 29 et 30	Fraîche.	Fraîche.		
Les 31, et 1er et 2 avril.	Commence très-faiblement à prendre.	Fraîche.		
Les 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	Continue.	Commence à prendre, et continue.		
Le 11.	Prise.	Continue.		
Le 12.	Presque sèche.	Continue.		
Le 13.	Sèche et *amour.*	Continue.		
Le 14.	Sèche et *amour.*	Prise.		
Les 15 et 16.	Sèche et *amour.*	Commence à sécher.		
Les 17 et 18.	Sèche et *amour.*	Presque sèche et *amour.*		
Le 19.	Sèche et *amour.*	Sèche et *amour.*		

Huile de lin bouillie 3 heures avec 15 pour 100 de peroxyde de manganèse qui avait servi plusieurs fois.	Huile de lin A, cuite, bouillie ensuite 3 heures avec 15 pour 100 de litharge neuve.	Huile de lin A cuite, bouillie ensuite 3 heures avec 15 pour 100 de litharge qui avait servi une fois.	Huile de lin A cuite, bouillie ensuite 3 heures avec 15 pour 100 de peroxyde de manganèse neuf.	Huile de lin A cuite, bouillie ensuite 3 h. avec 15 p. 100 de peroxyde de manganèse qui avait servi plusieurs fois
1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
Très-embue.	Fraîche.	Commence légèrement à prendre.	Très-faiblement embue.	Fraîche.
Très-embue.	Fraîche.	Prise.	Faiblement embue.	Fraîche.
Très-embue.	Commence à prendre.	Sèche. 2e *couche.*	Commence à prendre.	Commence à prendre.
Très-embue.	Continue.	Commence à prendre.	Continue.	Continue.
Commence à sécher.	Prise.	Prise.	Continue.	Continue.
Sèche. 2e *couche.*	Presque sèche.	Presque sèche.	Continue.	Prise par place.
Fraîche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.	Sèche. 2e *couche.*
Presque prise.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Comm. faibl. à prendre.
Sèche. 3e *couche.*	Commence faiblement à prendre.	Commence faiblement à prendre.	Commence très-faiblement à prendre.	Continue faiblement.
Commence très-faiblement à prendre.	Presque prise.	Presque prise.	Continue.	Presque prise.
Parfaitement prise.	Parfaitement prise.	Prise.	Presque prise.	Parfaitement prise.
Presque sèche.	Sèche. 3e *couche.*	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.
Sèche.	Bien prise.	Presque sèche.	Presque sèche.	Presque sèche.
.....	Presque sèche.	Sèche.	Sèche.	Presque sèche.
.....	Sèche.	.....	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*
.....	.....	.....	Commence à prendre.	Commence à prendre.
.....	.....	.....	Parfaitement prise.	Prise.
.....	.....	.....	Presque sèche.	Presque sèche.
.....	.....	.....	Presque sèche.	Presque sèche.
.....	.....	.....	Sèche.	Sèche.

42. *Résumé et conclusions.*

1° L'huile de lin qui a bouilli 5 heures dans un ballon de verre placé sur un bain de sable, sous la direction d'un ouvrier peintre habitué à ce genre d'opération, n'a pas paru être plus siccative que l'huile de lin ordinaire;

2° L'huile de lin qui a bouilli 3 heures avec les 15 centièmes de son poids de litharge ou de peroxyde de manganèse, est plus siccative que l'huile de lin cuite pendant 5 heures.

a) La litharge est plus siccative que le peroxyde de manganèse.

b) La litharge qui a été chauffée une fois avec l'huile est plus active que celle qui ne l'a pas été.

c) Même résultat pour le peroxyde de manganèse qui a été chauffé plusieurs fois, relativement à celui qui ne l'a pas été.

3° L'huile qui a subi une cuisson de 5 heures, cuite de nouveau avec les 15 centièmes de son poids de litharge, est plus siccative que si elle eût été cuite avec le peroxyde de manganèse; mais il est remarquable que l'excès d'activité qui distingue la litharge ou le peroxyde de manganèse qui ont servi à cuire de l'huile de lin, d'avec la litharge ou du peroxyde de manganèse neufs, lorsqu'il s'agit d'huile de lin naturelle, il est remarquable, dis-je, que cet excès d'activité n'existe plus, lorsqu'il s'agit d'huile de lin qui a subi une cuisson de 5 heures.

43. Après avoir reconnu l'inutilité de cuire les huiles pour préparer un siccatif, aussi longtemps qu'on le fait habituellement, je constatai ces faits remarquables, que l'huile de lin exposée pendant 6 heures à une température de 70 degrés

environ, avec 10 pour cent de peroxyde de manganèse, peut être employée immédiatement en peinture, sans qu'il soit nécessaire d'y ajouter un siccatif; que l'huile de lin exposée le même temps à cette même température acquiert pareillement la propriété siccative, mais ne l'acquiert pas à un degré aussi prononcé, à beaucoup près. C'est ce qu'on verra par les expériences dont les résultats seront exposés plus bas (45).

Le 21 janvier 1850, on etendit sur un verre à vitre, à 9 heures du matin.	N° 1. Huile de lin A.			N° 2. Huile de lin A, chauffée 6 heures à une température de 70 à 80°, avec 10 p. 100 de peroxyde de manganèse qui avait servi.	N° 3. Huile de lin, n° 1 A. Oxyde de zinc.	N° 4. Huile de lin, n° 2. Oxyde de zinc.
	1re *couche.*			1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
Le 22 janvier, à 9 h.	Fraîche.			Prise.	Fraîche.	Fraîche.
Le 23.	Fraîche.			Presque sèche.	Fraîche.	Presque sèche.
Le 24.	Fraîche.			Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.	Sèche. 2e *couche*
Le 25.	Fraîche.			Commence à prendre.	Fraîche.	Parfaitement prise.
Le 26.	Fraîche.			Presque sèche.	Fraîche.	Sèche. 3e *couche*
Le 27.	Fraîche.			Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.	Presque prise.
Le 28.	Fraîche.			Commence à prendre.	Fraîche.	Sèche.
Le 29.	Fraîche.			Presque sèche.	Fraîche.	
Le 30.	Fraîche.			Sèche.	Fraîche.	
Les 31; 1er, 2, 3, 4 et 5 février.	Fraîche.				Fraîche.	
Le 6.	Commence à prendre.				Commence à prendre.	
Le 7.	Sèche par place.				Sèche par place.	
Les 8 et 9.	Presque sèche.				Sèche par place.	
Le 10.	Sèche, excepté quelques parties.				Sèche par place.	
Le 11.	Sèche. 2e *couche* (*).	1re *couche*, A'.			Sèche par place.	
Les 12, 13, 14, 15, 16.	Fraîche.	Fraîche.			Sèche par place.	
Le 17.	Commence faiblem. à prendre.	Fraîche.			Sèche par place.	
Le 18.	En grande partie prise.	Fraîche.			En grande partie sèche.	
Le 19.	Sèche par place.	Commence à prendre.			Sèche, sauf une place.	
Le 20.	Presque sèche.	Presque sèche.			Sèche. 2e *couche.*	
Le 21.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 2e *couche* (**).	1re *couche*, A''.		Fraîche.	
Le 22.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.		Fraîche.	
Le 23.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.		Commence faiblem. à prendre.	
Le 24.	Fraîche.	Fraîche.	Fraîche.		Prise.	
Le 25.	Commence à prendre.	Commence à prendre.	Commence à prendre.		Presque sèche.	
Le 26.	Parfaitement prise.	Continue à prendre.	Presque sèche.		Sèche. 3e *couche.*	
Le 27.	Parfaitement prise.	Presque prise.	Sèche, bonne à peindre.		Fraîche.	
Le 28.	Sèche.	Prise.	Parfaite- 2e *couche.* ment sèche.		Fraîche.	
Le 1er mars, à 7 h.		Presque sèche.	Fraîche.		Prise par place.	
Le 2.		Sèche. 3e *couche.*	Fraîche.		Prise, et parf. prise, par place.	
Le 3.		Fraîche.	Fraîche.		Parfaitement prise.	
Les 4, 5, 6.		Fraîche.	Fraîche.		Sèche.	
Le 7.		Commence à prendre.	Commence à prendre.			
Le 8.		Presque sèche.	Presque prise.			
Le 9.		Sèche.	Presque sèche.			
Le 10.			Sèche. 3e *couche.*			
Les 11, 12, 13.			Fraîche.			
Le 14.			Commence à prendre.			
Le 15.			Prise.			
Le 16.			Presque sèche.			
Le 17.			Sèche.			

(*) *Observation.* Afin de savoir si l'huile de lin n° 1 était devenue plus siccative avec le temps et le contact de l'air, après avoir donné la 2e *couche* ci-contre, on en donna une première sur du verre. On désignera cette huile par A'.

(**) Avec l'huile qui servit à donner la 2e couche, on donna une 1re couche A'', le 21 février.

44. *Résumé et conséquences.*

a) Il est remarquable que l'huile de lin ait reçu une si grande augmentation dans sa propriété siccative d'une exposition de 6 heures à une température de 70 à 80 degrés, avec 10 pour 100 de son poids d'un peroxyde de manganèse, qui avait déjà servi plusieurs fois à des opérations semblables.

	N° 1. Huile de lin.	N° 2. Huile de lin chauffée 6 h. de 70 à 80°, avec 10 p. 100 de peroxyde de manganèse.
La 1re couche a séché en. .	21 jours.	3 jours.
La 2e.	10	3
La 3e.	7	3
	38	9

b) Le blanc de zinc augmente la propriété siccative de cette dernière huile, puisque

	N° 3.
La 1re couche a séché en.	3 jours.
La 2e.	2
La 3e.	2
	7

c) Le blanc de zinc, dans l'expérience commencée le 21 janvier 1850, n'a pas eu la même influence sur l'huile de lin pure, puisque

	N° 1. Huile de lin.	N° 3. Huile de lin. Blanc de zinc.
La 1re couche a séché en. . .	21 jours.	30 jours.
La 2e.	10	6
La 3e.	7	8
	38	44

Cependant, je ne crois pas devoir en conclure que le blanc de zinc ait exercé une propriété siccative dans le sens négatif; car, avec le blanc de zinc et l'huile chauffée, des parties sèches dans la 1re couche se sont manifestées en même temps que des parties sèches dans l'huile pure.

45.

Le 23 mai 1850, à 8 h. du matin, on donna sur verre	N° 1. Huile de lin pure.	N° 2. Huile de lin pure exposée 6 h. à une température de 70 à 80°.	N° 3. Huile de lin pure chauffée 6 h au bouillon avec peroxyde de manganèse neuf.	N° 4. Huile de lin pure chauffée au bouillon avec peroxyde de manganèse qui avait servi deux fois.
	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*	1re *couche.*
A 10 h. du s.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	Sèche.
Le 24, 8 h. du m.	Fraîche.	Fraîche.	Presque sèche.	Parfait. sèche. 2e *couche.*
Le 25.	Fraîche.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Comm. faiblement à prendre.
Le 26.	Fraîche.	Prise par place.	Fraîche.	Presque sèche.
A 9 h. du s.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	Sèche.
Le 27.	Fraîche.	Sèche. 2e *couche.*	Fraîche.	Sèche. 3e *couche.*
Le 28.	Parfaitement prise et en partie presque sèche.	Fraîche.	Presque sèche.	Presque prise.
Le 29.	Sèche. 2e *couche.*	Commence à prendre.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche
Le 30.	Fraîche.	Presque prise.	Comm. très-faibl. à prendre.	
Le 1er juillet.	Fraîche.	Presque sèche.	Continue.	
Le 2.	Comm. à prendre par place.	Sèche. 3e *couche.*	Presque sèche.	
Le 3.	Presque prise.	Fraîche.	Sèche.	
Le 4.	Presque sèche.	Commence à prendre.		
Le 5.	Sèche. 3e *couche.*	Continue.		
Le 6.	Fraîche.	Prise.		
Le 7.	Comm. faiblement à prendre.	Sèche.		
Le 8.	Continue.			
Le 9.	Prise et commence à sécher.			
Le 10	Sèche.			

Résumé.

1re couche a séché en .	6 jours.	4 jours	2 jours.	1/2 jour.
2e couche.	6	5	4	4
3e couche.	5	5	4	2
	17	14	10	6 1/2

CHAPITRE V.

Quelle est l'influence que des corps solides, mêlés à la céruse ou au blanc de zinc, peuvent avoir sur la dessiccation de la peinture ?

46. Puisque des surfaces solides peuvent exercer une influence siccative, quelle qu'en soit la cause, à l'instar d'un siccatif liquide ajouté à l'huile de lin ordinaire, ne s'ensuit-il pas que des corps solides pourront, dans la peinture à la céruse et au blanc de zinc, agir comme siccatifs? ou, ce qui revient au même, un corps non siccatif ou peu siccatif ne pourra-t-il pas acquérir cette propriété? ou, s'il la possédait déjà, ne se trouvera-t-elle pas augmentée par l'association du corps avec la céruse ou le blanc de zinc qu'on incorpore à l'huile?

Je commence par établir l'action de l'huile de lin sur la céruse et sur le sulfate de plomb au moyen des résultats suivants, obtenus dans les mêmes conditions. Je ne m'occupe point ici du résultat portant le n° 3.

Le 19 mai 1849, à midi, on a donné à une planche de chêne une 1re *couche*.....	N° 1. Huile de lin. Céruse.	N° 2. Huile de lin. Sulfate de plomb. Glutineux, ne couvrant pas.	N° 3. Acide oléique hydraté. Sulfate de plomb. Glutineux, couvrant moins encore que n° 2.
Le 22, à midi.	Sèche parfaitement.	Non prise.	Non prise.
Le 26.	.....	Non prise.	Non prise.
Le 28.	.....	Prise.	Non prise.
Le 29.	.....	Commençant à sécher.	Non prise.
Le 30.	.....	Sèche à peu près.	Non prise.
Le 31.	2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Non prise.
Le 2 juin, à midi.	Sèche.	Sèche. La 1re couche a donc servi de siccatif à la 2e.	Non prise.
Le 7 juin, à midi.	3e *couche.*	3e *couche.*	Non prise.
Le 8.	Sèche.	Pas prise.	Non prise.
Le 9.	Sèche parfaitement.	Parfaitement prise, commençant à sécher.	Non prise.
Le 10.	.....	Sèche.	
Le 11.	.....		

47. *Résumé et conséquences.*

	N° 1. Huile de lin. Céruse.	N° 2. Huile de lin. Sulfate de plomb.
1re couche a séché en.....	3 jours.	12 jours.
2e couche.....	2	2
3e couche.....	2	4
	7	18

Le sulfate de plomb est donc beaucoup moins siccatif que la céruse; et, en outre, la 1re couche a servi évidemment de siccatif à la 2e.

48. Ce fait reconnu, j'en ai constaté un autre bien remarquable: c'est qu'un mélange de sulfate de plomb et de céruse peut sécher aussi bien que la céruse pure.

Les deux expériences comparatives que je vais rapporter démontrent, en effet, qu'un mélange de sulfate de plomb et de céruse (*) qu'on a mis dans le commerce récemment, se comporte avec l'huile de lin à la manière de la céruse.

(*) Ce mélange ne contenait absolument que du sulfate de plomb et de la céruse. Après avoir dissous la céruse par l'acide azotique, j'ai constaté que la solution, passée à l'acide sulfhydrique, ne retenait aucune base salifiable.

Le 20 mai, à 10 h., on a étendu sur un morceau de sapin	N° 1. Huile de lin. Sulfate de plomb. Céruse.	N° 2. Huile de lin. Céruse.
1re *couche.*	Se pelotonnant sous la brosse légèrem.	Ne se pelotonnant pas.
Le 21, à 10 heures.	Prise.	Prise.
Le 22.	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*
Le 23.	Commençant à sécher.	Commençant à sécher.
Le 24.	Sèche. 3e *couche.*	Sèche. 3e *couche.*
Le 25.	Presque sèche.	Presque sèche.
Le 26.	Sèche.	Sèche.

49. Nous avons vu que l'addition d'une huile de lin litharg irée ou manganésée à de l'huile de lin, rend cette dernière plus siccative, ou, en d'autres termes, plus susceptible d'absorber l'oxygène atmosphérique (13); il est remarquable qu'elle pourra recevoir un accroissement de cette propriété par des corps solides. D'abord, l'huile de lin mêlée à la céruse sèche plus vite que si elle était seule ; on peut donc considérer la céruse comme un siccatif. L'huile de lin mêlée au sulfate de plomb sèche très-lentement. Eh bien, un mélange de sulfate de plomb et de céruse sèche aussi vite que l'huile de lin mêlée de céruse. On est donc fondé à dire que le sulfate de plomb a reçu de la présence de la céruse une augmentation de sa propriété siccative.

50. Le sous-carbonate de zinc, préparé au moyen de l'azotate de zinc et du sous-carbonate du soude, ou le blanc de zinc soumis dans l'eau à un courant d'acide carbonique, est siccatif; et lorsqu'on l'ajoute au blanc de zinc, le mélange sèche plus vite que ne sécherait le mélange d'huile de lin et de blanc de zinc. Le n° 1 du tableau suivant montre la propriété siccative de ce mélange.

Le 6 mai 1849, à 10 h., on a étendu sur une planche de chêne une 1re *couche*.	N° 1. Huile de lin. Blanc de zinc. Oxyde de zinc carbonaté.	N° 2. Huile de lin. Blanc de zinc. Sulfate de zinc calciné.	N° 3. Huile de lin. Huile de lin bouillie avec sulfate de zinc calciné. Blanc de zinc.	N° 4. Huile de lin bouillie avec sulfate de zinc calciné. Blanc de zinc.	N° 5 (*). Huile de lin. Sulfate de zinc calciné.
Le 8 mai, à 10 h.	Prise parfaitement.	Prise moins parfaitement que n° 1.	Prise moins que nos 1 et 2.	Prise moins que n° 3.	Non prise, granuleuse et translucide.
Le 9.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.
Le 10, à 10 h.	2e *couche*.	2e *couche*.	2e *couche*.	2e *couche*.	2e *couche*.
Le 11.	Prise presque.	Prise presque.	Moins prise que 2.	Prise plus que 3.	Prise presque.
Le 12.	Commençant à sécher.	Commençant à sécher.	Commençant à sécher.	Commençant à sécher.	Commençant à sécher.
Le 13, à 10.	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Sèche. 3e *couche*.	Commençant à sécher.
Le 14.	Sèche presque.	Prise, non sèche.	Sèche presque.	Prise, non sèche.	Commençant à sécher.
Le 15.	Sèche parfaitement.	Sèche parfaitement.	Sèche parfaitement.	Sèche presque.	Commençant à sécher.
Le 16.	.....	.....	.....	Parfaitement sèche.	Sèche. 3e *couche*.
Résumé.					
La 1re couche a séché en	3 jours.	3 jours.	3 jours.	3 jours.	(*) Ce mélange n'est pas susceptible d'être employé en peinture.
La 2e	3	3	3	3	
La 3e	2	2	2	3	
	8	8	8	9	

51. Les expériences suivantes montrent que le mélange d'huile de lin et de sous-carbonate de zinc prend plus promptement que le blanc de zinc; mais ce qui échappait à toute prévision, c'est que le premier mélange, au lieu de constituer une peinture opaque, constitue un enduit demi-transparent ou transparent, bien différent de la peinture à la céruse ou au blanc de zinc.

	N° 1.	N° 2.	N° 3.
Le 6 mai 1849, à 10 h., on a donné à une planche de chêne une	Huile de lin. Sous-carbonate de zinc préparé avec un sous-carbonate alcalin.	Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin. Blanc de zinc. Sous-carbonate de zinc.
1re *couche*.	Mélange demi-transparent.		
Le 7 mai, à 10 h.	Prise.	Non prise.	Prise, mais moins que 1.
	—	—	—

Le 8 mai 1849, à 10 h., on a donné à une planche de chêne une 1re *couche*.	Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin. Blanc de zinc. Oxyde de zinc carbonaté. (*)
Le 9 mai, à 10 heures	Non prise.	Prise.
Le 10	Commence à prendre.	Bien prise.
Le 11	Prise.	Sèche.
Le 12	Sèche. 2e *couche*.	2e *couche*.
Le 13	Prise.	Sèche.
Le 14	Sèche. 3e *couche*.	3e *couche*.
Le 15	Prise.	Sèche, mais pas absolum.
Le 16	Sèche non absolument.	Sèche absolument.

Résumé.

La 1re couche a séché en	4 jours.	3 jours.
La 2e	2	1
La 3e	3	2
	9	6

(*) Il avait été préparé en dirigeant un courant de gaz acide carbonique dans de l'eau tenant du blanc de zinc en suspension. Cet oxyde carbonaté m'a paru plus énergique comme siccatif que le sous-carbonate de zinc obtenu de la décomposition de l'azotate de zinc par le sous-carbonate de soude.

52. Voulant savoir si l'art pourrait tirer parti de la propriété que possède le sous-carbonate de zinc de rendre le mélange d'huile de lin et de blanc de zinc plus siccatif qu'il ne l'est, de manière qu'on le substituerait à l'huile manganésée, qui a l'inconvénient de colorer le blanc de zinc auquel on l'associe, je fis les expériences suivantes :

	A.	Poids.	B.	Poids.
Le 21 juin 1849, à midi, on donna à des portes de sapin une 1re *couche.*	Huile de lin	100	Huile de lin	98
	Blanc de zinc 3/4 vol. / Sous-carbonate de zinc. 1/4	100	Huile de lin manganésée	2
			Blanc de zinc	100
Le 23 juin, à midi.	Sèche sur la face exposée à la lumière, pas absolument sèche sur la face qui regardait un mur.		Sèche sur les deux faces.	
Le 23 juin, à 1 h.		2e *couche.*		2e *couche.*
Le 24, à 1 h.	Prise presque.		Prise.	
Le 25, à 1 h.	Sèche.	3e *couche.*	Sèche parfaitement.	3e *couche.*
Le 26.	Prise presque.		Prise.	
Le 27.	Sèche.		Sèche.	

La 1re couche des peintures A et B avait une égalité d'aptitude à couvrir les surfaces sur lesquelles elle était appliquée. 4 heures après l'application, elle paraissait prise. Les deux portes, comparées ensemble un an après avoir été peintes, présentèrent ces différences, que la porte A était sensiblement plus blanche que la porte B, et que la peinture était peut-être moins adhérente à la première qu'à la seconde.

Conclusion. Si la peinture A, faite avec le mélange de blanc de zinc et de sous-carbonate, sèche réellement moins vite que la peinture B, faite avec l'huile de lin mélangée d'huile manganésée, cependant la différence n'est pas telle, qu'on ne puisse l'employer dans la peinture en bâtiment. L'avantage de cette peinture sur celle qui renferme de l'huile manganésée est la *blancheur ;* c'est donc lorsqu'on veut avoir des fonds blancs ou teintés légèrement de couleurs auxquelles le jaune nuirait, que l'emploi peut en être fait avec quelque avantage.

53. Dans plusieurs circonstances, j'avais remarqué que des poudres sableuses, introduites dans la peinture, semblaient en accélérer la dessiccation : des expériences que je rapporterai dans le 2e mémoire de ces recherches prouveront la réalité de cette remarque.

CHAPITRE VI.

Examen de différents mélanges de corps solides et de liquides huileux, au point de vue de la théorie et de la pratique de la peinture à l'huile.

54. Après avoir constaté les faits précédents concernant l'huile de lin, les siccatifs et la céruse, et d'une autre part le blanc de zinc et l'oxyde d'antimoine, qu'on a proposés pour remplacer la céruse, enfin l'influence des surfaces sur la dessiccation, j'ai voulu examiner, au point de vue de l'art de la peinture à l'huile, différents mélanges de corps huileux et de matières employées déjà ou non employées en peinture, espérant recueillir de cet examen quelques faits nouveaux, utiles à la théorie ou à la pratique de l'art.

Je commencerai par exposer les phénomènes que présente l'acide oléique hydraté, mêlé avec la litharge, la céruse, le minium, le chromate de plomb, l'oxyde de zinc, l'oxyde de zinc carbonaté, le chromate de zinc, le vert de Rinmann, l'oxyde d'antimoine, et le sulfure de ce métal préparé par voie humide.

J'exposerai ensuite l'action de l'acide oléique, de l'huile de lin pure, de l'huile de lin manganésée et de l'huile de lin lithargirée, sur l'acétate de plomb.

55. J'ai voulu voir quelle serait l'action réciproque de diffé-

rents composés métalliques et de différents corps gras mêlés ensemble, relativement à l'épaississement ou coagulation des matières mélangées.

Composés à base de plomb. Acide oléique hydraté.	Composés à base de zinc. Acide oléique hydraté.	Composés à base d'antimoine. Acide oléique hydraté.
Acide oléique + litharge.	Acide oléique + oxyde de zinc anhydre.	Acide oléique + oxyde d'antimoine sublimé.
Mélange pris instantanément en masse.	Mélange pris instantanément en masse.	Le mélange n'est pas pris, même après 24 heures.
Acide oléique + céruse.	Acide oléique + oxyde de zinc carbonaté.	
Le mélange ne se prend pas instantanément en pâte, même après 48 heures; alors cependant il y a un commencement d'endurcissement.	Pris en masse presque instantanément.	
Acide oléique + minium.		
Mélange non pris en pâte, même après 48 heures.		
Acide oléique + chromate de plomb.	Acide oléique + chromate de zinc.	
Mélange non pris en masse, même après 48 heures.	Mélange non pris en masse, même après 48 heures. En se servant du chromate de zinc obtenu en faisant bouillir le bichromate de potasse avec le blanc de zinc, le mélange se prendrait presque instantanément en masse.	
	Acide oléique + vert de Rinmann (oxyde de zinc + oxyde de cobalt).	
	Mélange pris en masse, mais non instantanément.	
		Acide oléique + sulfure d'antimoine orangé (du commerce).
		Le mélange ne se prend pas, mais après 48 heures la matière est épaissie.

56. L'acétate de plomb étant considéré comme une matière siccative, j'ai voulu savoir l'effet qu'il produirait sur plusieurs corps huileux.

N° 1. Acide oléique + acétate de plomb cristallisé et broyé.	N° 2. Huile de lin + acétate de plomb cristallisé et broyé.	N° 3. Huile de lin manganésée + acétate de plomb cristallisé et broyé.	N° 4. Huile de lin litharginée + acétate de plomb cristallisé et broyé.
Manifestation de l'odeur acétique.	Manifestation d'odeur plus faible que n° 1.	Odeur légère.	Odeur légère.
Après 10 minutes, pas d'épaississement.			
Après 48 heures, odeur acétique forte, masse épaissie.	Après 48 heures, pellicule à la surface; c'est donc par le contact de l'oxygène atmosphérique que l'épaississement a lieu.	Après 48 heures, pellicule à la surface moins épaisse que celle du n° 2.	Après 48 heures, pellicule semblable à celle du n° 3.
Après 96 heures, mêmes effets, mais plus prononcés.			

57. Je vais rapporter les résultats de quelques essais de peinture à la céruse, à la litharge et au blanc de zinc, dans lesquels l'huile de lin a été remplacée par l'acide oléique hydraté, soit pur, soit mêlé d'huile de lin.

Le 12 avril 1849, à 10 h. du m., on a comm. a peind. sur bois de chên. 1re *couche.*	N° 1. Acide oléique hydraté.	N° 2. Acide oléique hydraté. Céruse.	N° 3. Acide oléique hydraté. Litharge.
			Prise après 6 heures.
Le 13, à 10 h.	Fraîche.	Fraîche.	.....
Le 15.	Fraîche.	Prise presque.	Prise. 2e *couche.*
Le 16.	Fraîche.	Prise pas absolument.	Prise.
Le 18.	Absorbée presque par le bois.	Prise pas absolument.	3e *couche.*
.....	.....	.....	Prise après 6 heures.
Le 20.	Absorbée par le bois.	Prise pas absolument.	.....
Le 22.	2e *couche.*	Prise pas absolument.	.....
Le 29.	Fraîche.	Prise. 2e *couche.*	.....
Le 1er mai.	Fraîche.	Commençant à prendre.	
Le 3.	Fraîche.	Prise presque.	
Le 4.	Fraîche.	Prise	
Le 6.	Fraîche.	Commençant à sécher.	
Le 8.	Fraîche	Sèche non absolument.	
Le 10.	Fraîche, mais embue.	Sèche. 3e *couche.*	
Le 13.	Fraîche, mais embue.	Sèche, mais tendre.	
Le 16.	Embue, non sèche.		
Le 22.	Embue, non sèche.	Sèche.	
Le 22 juin.	Embue, toujours grasse au toucher. 3e *couche.*		
.....	.....	Mate.	Mate.
Le 22 juin 1850.	Toujours grasse, tachant le papier joseph.	La 2e couche, très-sèche, peu adhérente au bois; la 3e couche, très-sèche et très-adhérente.	Rude, avec un toucher gras cependant.—Cet effet doit être attribué à l'acide oléique en excès et à l'oléate de plomb. Très-adhérente au bois.

58. De tous ces mélanges, il n'y a que ceux d'acide oléique et de céruse, d'acide oléique et de litharge, et enfin d'huile de lin et de litharge, qui pourraient à la rigueur être employés, par la raison qu'ils sont les seuls à réunir la propriété de sécher avec celle d'adhérer aux surfaces sur lesquelles on les a étendus (64). Je ferai remarquer en outre que le dernier mélange est le seul qui soit brillant après la dessiccation. Cela tient à cette circonstance, que, dans tous les autres, la solidification s'opère plus ou moins rapidement entre les corps mêlés, dont un est liquide et l'autre solide; tandis que, dans le mélange d'huile de lin et de litharge, l'absorption d'oxygène étant produite par un corps liquide, et

N° 4.	N° 5.	N° 6.	N° 7.
Acide oléique hydraté. Blanc de zinc.	Acide oléique hydraté. Huile de lin. Céruse.	Acide oléique hydraté. Huile de lin. Blanc de zinc.	Huile de lin. Litharge.
Prise presque à l'instant pour le coucher ajouter un excès d'acide.			
Prise, mais s'attachant aux doigts.	Fraîche presque.	Prise presque.	Prise.
Prise. 2e *couche.*	Prise presque.	Prise. 2e *couche.*	2e *couche.*
Prise.	Prise.	Prise presque.	Prise.
3e *couche.*	2e *couche.*	Prise. 3e *couche.*	3e *couche.*
.....	.....	.....	Sèche après 24 heures.
Sèche.	Prise presque.	Prise presque.	
.....	Prise. 3e *couche.*	Sèche.	
.....	Sèche.		
Mate. Moins rude que n° 3; toucher un peu gras. 2e et 3e couches peu adhérentes au bois.	Mate. 2e et 3e couches parfaitement sèches, peu adhérentes au bois.	Mate. 2e et 3e couches peu adhérentes au bois.	Parfait. sèche, luisante. 2e et 3e couches très-adhérentes au bois.

cette absorption ayant pour conséquence la solidification lente de ce liquide, il y a une homogénéité qui permet à l'huide solidifiée, soit qu'elle ait de l'affinité pour le blanc, soit qu'elle n'en ait pas, de réfléchir la lumière d'une manière moins irrégulière que dans le cas où le passage de l'état liquide à l'état solide s'effectue entre des parties solides qui restent dans la position où le mélange les a mises; il n'est donc pas étonnant qu'alors le produit n'affecte point une surface brillante, ni même luisante.

59. La rapidité avec laquelle l'acide oléique mêlé à la litharge ou au blanc de zinc se prend en matière solide, me conduisit à essayer s'il ne serait pas possible d'en tirer parti

dans la pratique, pour le cas où l'on veut avoir des peintures qui sèchent rapidement. L'expérience m'apprit bientôt que les mélanges purs d'acide oléique et de litharge, ou d'acide oléique et de blanc de zinc, ne pourraient être industriellement employés à cause de la rapidité de leur solidification ; dès lors j'ajoutai, à l'acide oléique, de l'huile de lin et de l'essence. Voici les résultats des deux expériences comparatives:

	A.		B.	
		Vol.		Vol.
Le 7 juin 1849, à 2 heures, on donna à des portes de sapin une	Acide oléique.....	2	Huile de lin.....	4
	Huile de lin.....	1	Huile de lin manganésée....	» 4/5
	Essence de térébenthine....	1	Essence.....	1
	Huile manganésée.....	» 1/5	Blanc de zinc.	
1re *couche*, avec A et B.	Blanc de zinc.			
Le 9 juin 1849.	Parfaitement sèche.	2e *couche*.	Parfaitement sèche.	2e *couche*.
Le 11.	Parfaitement sèche.		Parfaitement sèche.	

Conclusion.

Les deux peintures présentaient une légère différence : la peinture à l'acide oléique A était sensiblement mate relativement à la peinture B; mais un défaut capital de la peinture A était un manque d'adhérence tel, que le frottement de l'ongle découvrait le bois ; c'est ce qui m'empêcha de donner une 3e couche.

6o. J'ai fait 12 mélanges, parmi lesquels il n'y a que le n° 9, formé d'acide oléique, d'huile de lin, d'essence et de céruse, qui soit susceptible d'être employé.

Ce tableau est très-propre à démontrer que l'acide oléique ne peut servir à la peinture qu'autant qu'il entre en combinaison avec un corps insoluble.

	N° 1.	N° 2.	N° 3.	N° 4.	N° 5.	N° 6
22 avril 1849, à 10 h. du matin, on donna sur bois de chêne une 1re *couche.*	Acide oléique.... 3 Essence..... 1 Ocre jaune.	Acide oléique.... 3 Huile de lin..... 1 Essence..... 1 Ocre jaune.	Acide oléique.... 3 Huile de lin..... 1 Essence..... 1 Ocre rouge.	Acide oléique.... 3 Huile de lin..... 1 Essence..... 1 Noir de charbon.	Acide oléique.... 3 Huile manganésée. 1 Essence..... 1 Ocre jaune.	Acide oléique.. 3 Ocre jaune.
29, à 10 heures.	Pris, non sec.	Moins pris que 1.	Non pris.	Non pris.	Non pris.	Non pris.
Le 1er mai.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Non pris.	Non pris.	Non pris.	Non pris.
Le 3.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Non pris.	Pris à peine.	Pris à peine.
Le 4.	Comme le 3 mai pour tous les essais.					
Le 6.	Comme le 3 mai pour tous les essais à peu près.					
Le 8.	Comme le 6 mai pour tous les essais.					
Le 10.	Pris presque.	Pris moins que 1.	Sec presque.	Comm. à prendre.	Pris presque.	Pris moins que 5
Le 13.	Comme le 10 mai pour tous les essais.					
Le 16.	Comme le 13 mai pour tous les essais.					
Le 22.	Comme le 16 mai pour tous les essais.					
Le 24.	Comme le 22 mai pour tous les essais.					
Le 26.	Comme le 24 mai pour tous les essais.					
Le 29.	Comme le 26 mai pour tous les essais.					
Le 9 juin.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Pris, non sec.	Pris, non sec.
Le 12.	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*
Le 14.	Comm. à prendre.	Comm. à prendre.	Comm. à prendre.	Comm. à prendre.	Comm. à prendre.	Comm. à prendre.
Le 16.	Pris.	Pris.	Pris.	Pris.	Pris.	Pris.
Le 21.	Mou.	Mou.	Mou.	Mou.	Mou.	Mou.
Le 21 juin 1850.	Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.

61. *Résumé et conclusions.*

Si nous recherchons les causes pour lesquelles le seul mélange d'acide oléique, d'huile de lin, d'essence et de céruse se soit solidifié de manière à adhérer au bois, nous les trouverons :

1° Dans ce que l'acide oléique est susceptible de former une sorte de combinaison avec la céruse, qu'il ne faut pas confondre avec l'oléate de plomb, représenté par de l'acide oléique et de l'oxyde de plomb;

2° Dans la propriété qu'a l'huile de lin de sécher lentement.

62. J'ai réuni dans un dernier tableau les résultats de différentes compositions au nombre de 30. (Voyez à la fin du mémoire le 6e tableau.)

63. *Résumé et conclusions.*

a) Tous les mélanges où l'acide oléique entre à l'état de

alinéas 62 et 63, p

N° 15.	N° 16.	N° 25.	N° 26.	N° 27.	N° 28.	N° 29.	N° 30.
Volumes. Acide oléiq. 2 / Huile de lin. 1 / Essence... 1 / Huile de lin manganés. $\frac{1}{5}$ } Mélange C. Chromate de zinc. Bleu de Prusse.	Mélange B. Ocre rouge, c. Charbon. zinc.	Mélange B. Blanc de zinc. Bleu de Prusse. Vermillon.	Mélange A. Blanc de zinc. Bleu de Prusse. Vermillon.	Mélange C. Blanc de zinc. Bleu de Prusse. Vermillon.	Mélange B. Blanc de zinc. Bleu de Prusse.	Mélange A. Blanc de zinc. Bleu de Prusse.	Mélange C. Blanc de zinc. Bleu de Prusse.
Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument.
Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*	Sèche. 2e *couche.*
Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.
3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche.*	3e *couche*
Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.
Mate tendre. Sèche. Adhérente.	Mate. Molle. Adhér. médiocre.	Mate tendre. Sèche. Adhér. médiocre.	Brillante, dure. Sèche. Adhérente.	Mate. Sèche, tendre. Adhér. médiocre.	Mate. Sèche. Adhér. médiocre.	Brillante, dure. Sèche. Adhérente.	Mate. Sèche. Adhér. médiocre.

TABLEAU 6e (alinéas 62 et 63, p. 724).

Le 29 avril 1849, à 10 h. du matin, on a donné, sur bois de chêne, la 1re couche.	N° 1	N° 2	N° 3.	N° 4.	N° 5.	N° 6	N° 7.	N° 8.	N° 9	N° 10
	Huile de lin. Terre d'ombre.	Huile de lin manganésée. Terre d'ombre.	Acide oléique. Terre d'ombre.	Huile de lin. Terre d'ombre calcinée.	Huile de lin mang. Terre d'ombre calcinée	Acide oléique. Terre d'ombre calcinée	Volumes Acide oléique 3 [illegible] 1 Oxyde de [illegible] Oxy. de fer rouge Ocre jaune	Volumes Acide oléique 1 [illegible] 1 Oxyde de zinc Oxy. de fer rouge Ocre jaune	Volumes Acide oléique 3 [illegible] 1 Oxyde de zinc Oxy. de fer rouge. Ocre jaune.	Acide oléique [illegible] manganésée Noir de charbon Ocre jaune.
1 mai à 10 h.	Prise	Prise.	Non prise.	Comme n° 1.	Sèche.	Non prise.	Prise non absolum[ent]	Moins prise que n° 7	Moins prise que n° 8	Non prise.
[illegible]	Sèche	Sèche		Sèche			Prise non absolum[ent]	Moins prise que n° 7.	Moins prise que n° 8.	Non prise.
[illegible]			Non prise embue.				Prise.	Prise peut-être plus que n° 7.	Prise.	Prise.
[illegible]	2e couche.	2e couche	....	2e couche	2e couche		Sèche 2e couche	Sèche, 2e couche	Sèche, 2e couche.	Prise mais non sèche
[illegible]	Sèche	Sèche.	....	Sèche.	Sèche.	....	Sèche	Sèche.	Sèche.	Non sèche.
[illegible]	3e couche	3e couche	....	3e couche.	3e couche.	....	3e couche	3e couche	3e couche	Non sèche.
[illegible]	Sèche	Sèche.	....	Sèche.	Sèche.	....	Sèche.	Sèche.	Sèche	Non sèche.
[illegible]										Non sèche
										Non sèche
										Non sèche
[illegible]	Luisante Parfaitement sèche mais adhérence médiocre au bois.	Luisante Parfaitement sèche mais adhérence médiocre.	[illegible] Grasse sans adhérence	Légèrement luisante Parfaitement sèche Adhér. médiocre	Luisante Parfaitement sèche [illegible] Adhér. médiocre	[illegible] Grasse sans adhérence	Mate Parfaitement sèche Adhér. médiocre	Mate Parfaitement sèche Adhér. médiocre	Mate Sèche Adhér. médiocre	Mate Molle Sans adhérence

Le 29 avril 1849	N° 11.	N° 12.	N° 13.	N° 14.	N° 15.	N° 16.	N° 17.	N° 18	N° 19	N° 20
	Huile de lin [illegible] Noir de charbon Ocre jaune.	Huile de lin [illegible] Noir d'ivoire [illegible] Noir d'ivoire.	Volumes Mélange: [illegible] 2, [illegible] 1, [illegible] 1, Huile de lin manganés. 1/2 Chromate de zinc. Bleu de Prusse.	Volumes Mélange: Huile de lin 2, [illegible] 1, Huile de lin mang. 1/2 Chromate de zinc Bleu de Prusse.	Volumes Mélange: Acide [illegible] 2, [illegible] 1, [illegible] 1, Huile de lin manganés. 1/2 Chromate de zinc Bleu de Prusse	Mélange B. Ocre rouge Charbon	Mélange A [illegible] Charbon	Mélange C Ocre rouge Charbon	Mélange B Blanc de zinc Ocre rouge Ocre jaune. Terre d'ombre	Mélange A Blanc de zinc Ocre rouge Ocre jaune, Terre d'ombre.
1 mai à 10 h.	Sèche.	Sèche	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument,	Sèche presque absolument	Moins sèche que n° 16	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument
[illegible]	....	....	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche	Sèche, 2e couche	Sèche, 2e couche.	Sèche, 2e couche.	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche
[illegible]	2e couche.	2e couche	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.
[illegible]	Sèche.	Sèche.	Sèche, 3e couche	Sèche, 3e couche.	3e couche	3e couche	3e couche.	3e couche.	3e couche	3e couche
[illegible]	3e couche.	3e couche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche
[illegible]	Sèche.	Sèche.								
[illegible]	Légèrement luisante Sèche Adhér. médiocre	Luisante Sèche Adhérence [illegible]	Mate tendre Sèche Adhérente.	[illegible] Sèche Adhérente	[illegible] Sèche Adhérente	Mate. Molle Adhér. médiocre	Brillante. Sèche Adhérente	Luisante. Molle Adhér. médiocre	Mate. Sèche tendre Adhérence faible	Sèche Brillante dure Adhérente

Le 29 avril 1849	N° 21.	N° 22.	N° 23.	N° 24	N° 25	N° 26	N° 27	N° 28	N° 29	N° 30
	Mélange C Blanc de zinc Ocre rouge Ocre jaune. Terre d'ombre.	Mélange B Blanc de zinc Chromate de zinc Vermillon	Mélange A Blanc de zinc Chromate de zinc Vermillon	Mélange C Blanc de zinc Chromate de zinc Vermillon	Mélange B Blanc de zinc Bleu de Prusse Vermillon	Mélange A Blanc de zinc Bleu de Prusse Vermillon	Mélange C Blanc de zinc Bleu de Prusse Vermillon	Mélange B Blanc de zinc Bleu de Prusse	Mélange A Blanc de zinc Bleu de Prusse	Mélange C Blanc de zinc Bleu de Prusse
1 mai à 10 h.	Sèche presque absolument.	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument	Sèche presque absolument
[illegible]	Sèche, 2e couche	Sèche, 2e couche	Sèche 2e couche.	Sèche 2e couche	Sèche, 2e couche	Sèche, 2e couche	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche	Sèche 2e couche
[illegible]	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche	Sèche.	Sèche	Sèche
[illegible]	3e couche	3e couche	3e couche	3e couche	3e couche.	3e couche	3e couche	3e couche	3e couche	3e couche
[illegible]	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche.	Sèche	Sèche	Sèche	Sèche	Sèche.	Sèche
[illegible]	Mate. Sèche Adhér. médiocre.	Mate tendre. Sèche Adhér. médiocre	Luisante. Sèche Adhér. plus grande que n° 22.	Terne Sèche Adhér. médiocre	Mate tendre. Sèche Adhér. médiocre	Brillante dure. Sèche Adhérente	Mate Sèche, tendre Adhér. médiocre	Mate. Sèche Adhér. médiocre	Brillante, dure Sèche Adhérente	Mate Sèche Adhér. médiocre

N° 7.	N° 8.	N° 9.	N° 10.	N° 11.	N° 12.
Acide oléique..... 3	Acide oléique..... 3	Acide oléique..... 2	Acide oléique..... 2	Acide oléique..... 2	Acide oléique..... 2
Ocre rouge.	Essence 1	Huile de lin..... 1	Huile de lin..... 1	Huile de lin..... 1	Huile de lin..... 2
	Ocre rouge.	Essence..... 1	Essence 1	Essence 1	Essence..... 1
		Céruse.	Ocre jaune.	Ocre rouge.	Noir de charbon
Non pris.	Non pris.	Pris, non sec.	Non pris.	Non pris.	Non pris.
Non pris.	Non pris.	Pris.	Non pris.	Presque pris.	Non pris.
Pris à peine.	Pris à peine.	Pris, non sec.	Sec presque.	Sec presque.	Non pris.
Pris moins que 5.	Pris moins que 5.	Sec absolument.	Sec absolument.	Sec imparfaitement.	Commençant à prendre
Pris, non sec.	Pris, non sec.	Sec.	Sec presque.	Sec presque.	Pris
2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*	2e *couche.*
Commenç. à prendre.	Commenç. à prendre.	Pris absolument.	Commenç. à prendre.	Commenç. à prendre.	Commençant à prendre.
Pris.	Pris.	Sec.	Pris.	Pris.	Pris.
Mou.	Mou.	.....	Mou.	Mou.	Mou.
Mou, sans adhérence au bois.	Mou, sans adhérence au bois.	Dur, et très-adhérent au bois.	Mou, non adhérent au bois.	Mou, non adhérent au bois.	Mou, non adhérent au bois.

pureté, ou associé avec l'huile de lin, sont ternes; et quand ils parviennent à l'état sec ou solide, ils ont peu d'adhérence avec la surface sur laquelle on les a appliqués.

b) Pour qu'une peinture soit à la fois adhérente et brillante, il faut la présence de l'huile de lin, ou, pour parler d'une manière générale, d'une huile siccative, dont la proportion soit suffisante pour qu'en absorbant l'oxygène les particules de l'huile ne soient pas trop éloignées les unes des autres par l'interposition de la matière solide et opaque qu'on y a incorporée; dès lors la surface a un brillant spéculaire.

CONCLUSIONS DU MÉMOIRE.

64. Expliquons maintenant ce qu'est la peinture à l'huile considérée de la manière la plus générale, conformément aux expériences précédentes.

La peinture est employée à deux fins : soit pour donner à la surface d'un objet une couleur différente de celle qu'il a ; soit pour conserver cet objet, en en rendant la surface moins susceptible d'être altérée par l'air, la pluie, ou salie par la poussière, par des corps huileux, etc., auxquels cette surface pourrait être exposée.

Trois conditions sont essentielles à remplir :

La *première*, c'est que la peinture ait assez de liquidité pour s'étendre à la brosse, avec assez de viscosité cependant pour adhérer aux surfaces, de manière à ne pas couler lorsque ces surfaces sont inclinées et même verticales, et à conserver l'égalité d'épaisseur qu'elle a dû recevoir du peintre ;

La *seconde*, c'est qu'après l'application elle devienne solide ;

La *troisième*, c'est qu'après être devenue solide, elle adhère fortement à la surface sur laquelle elle se trouve.

65. J'ai prouvé dans ce mémoire que la solidification de la peinture, soit à la céruse, soit au blanc de zinc, est due à l'absorption de l'oxygène atmosphérique. Mais puisqu'il est reconnu que l'huile pure se solidifie, on voit que la solidification est l'effet d'une cause première, indépendante du siccatif, et de la céruse ou du blanc de zinc.

Mes expériences montrent que le siccatif agit en augmen-

tant la faculté d'absorber l'oxygène atmosphérique que l'huile possède essentiellement.

Elles montrent en outre que la céruse et le blanc de zinc manifestent la propriété siccative dans beaucoup de cas, et que cette propriété existe dans certains corps que l'on peint, particulièrement dans le plomb.

66. Dès lors le peintre, intéressé à savoir, du moins approximativement, le temps que sa peinture mettra à sécher, doit prendre en considération tous les principes qui concourent à cet effet : conséquemment, un *siccatif* ne doit plus être considéré comme la *cause unique* du phénomène que présente la peinture lorsqu'elle se *sèche*, puisqu'à ce phénomène concourt un ensemble de corps qui ont la propriété de sécher dans des circonstances déterminées. En outre, il existe un fait remarquable : c'est que la *résultante* des activités de chaque espèce de corps entrant dans la constitution d'une peinture ne peut s'évaluer par la somme des activités spéciales de chaque corps, ainsi que le prouve l'observation rapportée (12, 13), de laquelle il résulte que l'huile de lin pure, dont l'activité est représentée par 1,985, et celle de l'huile manganésée, qui l'est par 4,719, étant mélangées, en ont une qui l'est par 30,826. Je reviendrai sur ce fait dans le 2^{e} mémoire, pour l'examiner au point de vue de la théorie chimique.

67. S'il est des corps qui augmentent la propriété siccative de l'huile de lin pure, il en est d'autres qui semblent doués de la propriété contraire.

Exemple:

Dans les expériences du 4 janvier 1850 (19),

L'huile de lin pure, appliquée en 1re couche sur verre, a séché en..... 17 jours

La même huile mêlée d'oxyde d'antimoine..... 26 jours

Dans cette circonstance, l'oxyde d'antimoine a donc été antisiccatif.

Dans les expériences du 14 août 1845 (17),
L'huile de lin mêlée d'oxyde d'antimoine, appliquée en 1re couche sur toile peinte à la céruse, a séché en..... 14 jours.
L'huile de lin mêlée d'arséniate de protoxyde d'étain, appliquée en 1re couche sur la même toile, n'était pas même prise en..... 60 jours.

Le bois de chêne paraît bien avoir la propriété antisiccative à un haut degré, car :

Dans l'expérience du 23 décembre 1849, trois couches d'huile de lin (23) ont mis à sécher 159 jours.
Dans l'expérience du 10 mai 1850, une 1re couche d'huile de lin (27) a mis à sécher, à la surface seulement..... 32 jours.

Le peuplier paraît avoir la propriété antisiccative à un degré moindre que le chêne, et le sapin du Nord semble l'avoir à un degré moindre encore que le peuplier.

Dans l'expérience du 10 mai 1850, trois couches d'huile de lin ont mis à sécher :
Sur peuplier..... 27 jours.
Sur sapin du Nord..... 23 jours.

Dans le second mémoire, je reviendrai sur l'influence que diverses propriétés physiques du bois peuvent avoir sur la dessiccation de l'huile.

68. S'il existe une activité siccative et une activité contraire ou antisiccative dans les corps, il ne me paraît pas douteux qu'il doive y avoir des circonstances où des corps ayant été couverts d'huile de lin, celle-ci n'éprouvera aucune influence de la part de la surface sur laquelle elle aura été étendue. Les expériences du 10 mai 1850 (27), où une première couche d'huile de lin a été donnée au cuivre, au laiton, au zinc, au fer, à la porcelaine et au verre, me sembleraient indiquer, sinon dans tous ces corps, du moins dans quelques-uns, l'indifférence dont je parle. La première couche était sèche sur tous après 48 heures.

69. Je me hâte de dire que je ne prétends pas distinguer les corps mis en contact avec l'huile de lin, ou plus généralement avec une huile siccative quelconque, en siccatifs, en antisiccatifs et en indifférents ou neutres, parce qu'il est entendu que, ne séparant pas les circonstances dans lesquelles les corps sont placés des propriétés qu'ils manifestent, ces circonstances variant, les propriétés observées dans les premières circonstances pourront varier dans les circonstances suivantes. Dès lors il y aurait erreur, selon moi, à envisager la propriété dont je parle, comme étant absolue dans les corps. J'ai tout lieu de penser qu'un corps peut être siccatif et antisiccatif dans des circonstances différentes, soit que la différence porte sur la température, ou sur la présence ou l'absence d'un autre corps, etc. : par exemple, le plomb est siccatif relativement à l'huile de lin pure, tandis que la céruse, à laquelle nous avons reconnu la propriété siccative, est antisiccative par rapport à l'huile de lin appliquée sur le plomb métallique (26).

70. Si les peintres veulent se rendre compte des opérations qu'ils exécutent, il faut nécessairement qu'ils se placent au point de vue où je viens de considérer la dessiccation de la peinture; c'est ainsi que dans des cas déterminés, et différents les uns des autres, ils pourront modifier leurs procédés habituels avec quelques chances de les perfectionner.

L'huile de lin est siccative. Cette propriété augmente presque toujours par son mélange avec la céruse, et, dans beaucoup de cas, avec le blanc de zinc même. Si le mélange n'est pas assez siccatif, il faut le rendre tel par un complément qui peut être de l'huile lithargirée ou manganésée : il est entendu que l'on doit tenir compte de la nature de la surface que

l'on peint, du cas où la peinture est appliquée en 1re couche, en 2e ou en 3e couche, et enfin de la température de l'air.

Au point de vue où nous nous plaçons, le *siccatif*, restreint à de l'huile lithargirée ou manganésée, perd beaucoup de son importance, puisqu'on pourra s'en passer en 2e et en 3e couche, et même en 1re, si la température de l'air concourt efficacement à l'effet.

71. D'un autre côté, il pourra être avantageusement remplacé pour toutes les couleurs claires, dans lesquelles la couleur jaune ou brune est nuisible, si l'esprit du peintre est bien pénétré des applications qu'il peut faire de quelques-unes des observations consignées dans ce mémoire.

Ainsi, l'huile de lin, exposée à la lumière au milieu de l'air atmosphérique, perd sa couleur et devient siccative. On peut donc dès lors l'employer avec la céruse ou le blanc de zinc, sans altérer la blancheur de ces corps.

72. Puisqu'en associant le blanc de zinc au sous-carbonate de zinc on peut à la rigueur se passer de siccatif, c'est encore un moyen de se soustraire aux inconvénients des siccatifs colorés, en même temps qu'il donne l'espérance de trouver des associations de corps incolores, qui pourront encore présenter plus d'avantage que celles dont je viens de parler.

73. Mes expériences démontrent que les procédés généralement pratiqués par les marchands de couleur pour rendre les huiles siccatives en les faisant chauffer avec des oxydes métalliques, laissent à désirer sous le double rapport de l'économie du combustible et sous celui de la coloration du produit,

Puisqu'en effet j'ai démontré :

1° Qu'une exposition de l'huile à une température de 70°

pendant 8 heures augmente très-sensiblement sa propriété siccative ;

2° Qu'en ajoutant du peroxyde de manganèse à cette même huile chauffée de la même manière, on la rend assez siccative pour s'en servir ;

3° Qu'il suffit de chauffer une huile de lin pendant 3 heures à la température où l'on opère généralement dans les laboratoires des marchands de couleur, avec 15 d'oxyde métallique pour 100, lorsqu'on veut obtenir une huile très-siccative.

74. Mes expériences expliquent parfaitement le rôle de l'huile de lin, ou plus généralement celui d'une huile siccative, dans la peinture. Effectivement, lorsqu'on mêle de l'acide oléique à des oxydes capables de le solidifier, l'acide, passant presque instantanément de l'état liquide à l'état solide, ne peut rien présenter d'uniforme dans l'ensemble des molécules de l'oléate produit. Il en est tout autrement d'une huile siccative passant progressivement à l'état solide par suite de l'absorption de l'oxygène. La lenteur avec laquelle s'effectue le changement d'état permet aux molécules huileuses l'arrangement symétrique qui les rendrait transparentes, si elles ne renfermaient pas entre elles des molécules opaques. Mais si celles-ci ne prédominent pas, l'arrangement est tel, que la surface de la peinture est luisante et même brillante, à cause de la lumière qui est réfléchie spéculairement par l'huile devenue sèche.

75. Si je dois m'abstenir ici de ce qui pourrait anticiper sur le jugement que doit porter une commission relativement à la substitution du blanc de zinc à la céruse, il y aurait un oubli blâmable de ma part, si je ne parlais pas de M. Leclaire ; car,

sans lui, il m'eût été impossible d'accomplir le travail dont je viens de présenter les résultats; et, sans ce travail, il serait bien difficile de pouvoir traiter, avec connaissance de cause, la question soumise à la commission dont je dois être l'organe. M. Leclaire, malgré ses affaires, a mis un tel empressement à exécuter lui-même les expériences de peinture décrites dans ce mémoire, et à en examiner avec moi les résultats, que, pendant plus de quinze mois, il est venu presque tous les jours dans mon laboratoire. Certes, il n'y a qu'un grand dévouement aux progrès de l'art qu'il exerce avec tant de distinction, et un grand amour de la vérité, qui aient pu le déterminer à faire une telle dépense de temps! Si le travail que je viens de présenter peut avoir le mérite d'éclairer un art qui jusqu'ici n'avait pas fixé l'attention des savants, l'Académie, qui s'est constamment efforcée d'atteindre ce but, saura la part que M. Leclaire y a prise; il était donc de toute justice que son nom se trouvât dans ce mémoire.

FIN DU TOME VINGT-DEUXIÈME.